SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1

I punti critici di f si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \cos x - \sin(x+y) = 0\,, \\ \cos y - \sin(x+y) = 0\,, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \cos x = \cos y\,, \\ \cos y - \sin(x+y) = 0\,, \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} x = y\,, \\ \cos x = \sin 2x = 2\sin x \cos x\,, \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x = -y\,, \\ \cos y = 0\,. \end{cases}$$

Tenendo conto che $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi$, si ottengono le seguenti soluzioni

$$(\pi/2, \pi/2)\,, \qquad (\pi/6, \pi/6)\,, \qquad (5\pi/6, 5\pi/6)\,.$$

Poiché la matrice Hessiana è

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x - \cos(x+y) & -\cos(x+y) \\ -\cos(x+y) & -\sin y - \cos(x+y) \end{pmatrix}\,,$$

studiandone il determinante nei punti stazionari trovati si ricava

$$\det\bigl(Hf(\pi/2,\pi/2)\bigr) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} < 0\,, \qquad \det\bigl(Hf(\pi/6,\pi/6)\bigr) = \det\begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ -1/2 & -1 \end{pmatrix} > 0\,,$$

$$\det\bigl(Hf(5\pi/6,5\pi/6)\bigr) = \det\begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ -1/2 & -1 \end{pmatrix} > 0\,,$$

ovvero

$$\begin{aligned} &(\pi/6,\pi/6) \quad \text{e} \quad (5\pi/6, 5\pi/6) \qquad \text{sono punti di massimo relativo}\,, \\ &(\pi/2,\pi/2) \quad \text{è punto di sella}\,. \end{aligned}$$

Esercizio 2

(1) Osserviamo che, per $\alpha = 1/2$, il termine generale della serie proposta è dato da $b_n = (-1)^n \frac{n}{3n+1} \not\to 0$, quindi, non essendo soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza (che richiede che il termine generale sia infinitesimo), si ottiene subito che la serie NON converge né assolutamente né semplicemente.

(2) Per $\alpha \ge 1$, ponendo

$$a_n := \frac{n}{3n^{2\alpha} + 1}$$

si ottiene facilmente che $a_n \sim \frac{1}{3n^{2\alpha-1}} \to 0$ e, per $\alpha > 1$, esso è asintotico al termine generale della serie armonica con esponente maggiore di 1, pertanto, per il criterio del confronto asintotico, la serie proposta converge assolutamente. Resta da studiare il caso $\alpha = 1$, che fornisce $a_n = \frac{n}{3n^2+1}$, la cui serie associata si comporta come la serie armonica e, quindi, diverge. Pertanto, in questo caso non si ha convergenza assoluta. D'altra parte, con un semplice calcolo, si verifica che la successione $\{\frac{n}{3n^2+1}\}$ è monotona decrescente, quindi sono soddisfatte le condizioni del Criterio di Leibniz e, pertanto, la serie converge semplicemente.

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili, che non possiede integrali singolari e la cui soluzione è data da

$$\int \frac{1}{2(y^2+1)}\,dy = \int \frac{1}{x^2 - 3x + 2}\,dx = \int \frac{1}{x-2}\,dx - \int \frac{1}{x-1}\,dx \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{2}\arctan y = \log\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C\,.$$

Imponendo la condizione iniziale si ricava

$$0 = \frac{1}{2}\arctan y(0) = \log 2 + C \qquad \Longrightarrow \qquad C = -\log 2\,.$$

Pertanto, la soluzione cercata è $y(x) = \tan\left\{\log\left[\frac{1}{4}\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^2\right]\right\}$, $x < 1$.

Esercizio 4

(1) Osserviamo che per $\alpha < 0$, l'integranda è una funzione continua in $[0, +\infty)$, quindi l'integrale proposto va studiato solo in un intorno $U(+\infty)$ dell'infinito, dove si ha

$$U(+\infty) \qquad 0 \le f(x) \sim \frac{1}{x^{4/3}} \qquad \text{che è integrabile in senso improprio,}$$

quindi, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale esiste finito.

(2) Per $\alpha = 0$, l'integranda è una funzione continua in $(0, +\infty)$, quindi l'integrale proposto va studiato in un intorno $U(+\infty)$ dell'infinito e in un intorno destro $U(0^+)$ dell'origine. In $U(+\infty)$, come visto nel punto **(1)**, la funzione risulta integrabile in senso improprio. In $U(0^+)$, utilizzando lo siluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \mathrm{e}^t$, con $t = -x$, si ha

$$U(0^+) \qquad 0 \le f(x) \sim \frac{x}{x^{4/3}} = \frac{1}{x^{1/3}} \qquad \text{che è integrabile in senso improprio,}$$

quindi, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale esiste finito.

(3) Per $\alpha > 0$, l'integranda è una funzione continua in $[0, \alpha) \cup (\alpha, +\infty)$, quindi l'integrale proposto va studiato in un intorno $U(+\infty)$ dell'infinito e in un intorno $U(\alpha)$ del punto α. In $U(+\infty)$, come visto nel punto **(1)**, la funzione risulta integrabile in senso improprio. In $U(\alpha)$ si ha, invece,

$$U(\alpha) \qquad 0 \le f(x) \sim \frac{1 - \mathrm{e}^{-\alpha}}{(x-\alpha)^{4/3}} = C \frac{1}{(x-\alpha)^{4/3}} \qquad \text{che NON è integrabile in senso improprio,}$$

quindi, in quest'ultimo caso, l'integrale NON esiste finito.

Esercizio 5

L'insieme di definizione della funzione proposta è $C.E. = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$ e su tale insieme f è continua. Per determinare gli evenutali asintoti, calcoliamo

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \lim_{x\to 0^\pm} \left[-x^2 \log\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] = \lim_{x\to 0^\pm} x^2 \log x^2 = 0 \qquad \lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \lim_{x\to 1^\pm} \frac{1}{x-1} \log(\mathrm{e}+1) = \pm\infty\,.$$

Quindi non ci sono asintoti orizzontali a $\pm\infty$ e c'è un solo asintoto verticale per $x \to 1^\pm$. Per quanto riguarda eventuali asintoti obliqui, osserviamo che

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1\,,$$

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^2}{x-1} \log(\mathrm{e} + 1/x^2) - x\right] \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2[1 + \log\left(1 + 1/(\mathrm{e}x^2)\right)] - x^2 + x}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 + x^2 \frac{1}{\mathrm{e}x^2} - x^2 + x}{x-1} = 1\,, \end{aligned}$$

dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo utilizzato lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine della funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = 1/(\mathrm{e}x^2)$. Quindi la retta di equazione $y = x + 1$ è asintoto obliquo a $\pm\infty$.

Esercizio 6

Poiché $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ ed è convessa, $f''(x) \ge 0$; pertanto

$$F'(x) = \log(1 + x^2) f''(x) \ge 0 \qquad \Longrightarrow \qquad F \text{ non decrescente.}$$

SOLUZIONI COMPITO B

Esercizio 1

I punti critici di f si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -\sin x + \sin(x+y) = 0\,, \\ -\sin y + \sin(x+y) = 0\,, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \sin x = \sin y\,, \\ -\sin y + \sin(x+y) = 0\,, \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} x = y\,, \\ \sin x = \sin 2x = 2\sin x \cos x\,, \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x = \pi - y\,, \\ \sin y = 0\,. \end{cases}$$

Tenendo conto che $-\pi/2 \le x \le \pi/2$, $-\pi/2 \le y \le \pi/2$, si ottengono le seguenti soluzioni

$$(0,0)\,, \qquad (\pi/3, \pi/3)\,, \qquad (-\pi/3, -\pi/3)\,.$$

Poiché la matrice Hessiana è

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -\cos x + \cos(x+y) & \cos(x+y) \\ \cos(x+y) & -\cos y + \cos(x+y) \end{pmatrix}\,,$$

studiandone il determinante nei punti stazionari trovati si ricava

$$\det\big(Hf(0,0)\big) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} < 0\,, \qquad \det\big(Hf(\pi/3,\pi/3)\big) = \det\begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ -1/2 & -1 \end{pmatrix} > 0\,,$$

$$\det\big(Hf(-\pi/3,-\pi/3)\big) = \det\begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ -1/2 & -1 \end{pmatrix} > 0\,,$$

ovvero

$$(\pi/3,\pi/3) \quad \text{e} \quad (-\pi/3,-\pi/3) \qquad \text{sono punti di massimo relativo}\,,$$
$$(0,0) \quad \text{è punto di sella}\,.$$

Esercizio 2

(1) Osserviamo che, per $\alpha = 1$, il termine generale della serie proposta è dato da $b_n = (-1)^n \frac{n+1}{2n} \not\to 0$, quindi, non essendo soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza (che richiede che il termine generale sia infinitesimo), si ottiene subito che la serie NON converge né assolutamente né semplicemente.

(2) Per $\alpha \ge 2$, ponendo

$$a_n := \frac{n+1}{2n^\alpha}$$

si ottiene facilmente che $a_n \sim \frac{1}{2n^{\alpha-1}} \to 0$ e, per $\alpha > 2$, esso è asintotico al termine generale della serie armonica con esponente maggiore di 1, pertanto, per il criterio del confronto asintotico, la serie proposta converge assolutamente. Resta da studiare il caso $\alpha = 2$, che fornisce $a_n = \frac{n+1}{2n^2}$, la cui serie associata si comporta come la serie armonica e, quindi, diverge. Pertanto, in questo caso non si ha convergenza assoluta. D'altra parte, con un semplice calcolo, si verifica che la successione $\{\frac{n+1}{2n^2}\}$ è monotona decrescente, quindi sono soddisfatte le condizioni del Criterio di Leibniz e, pertanto, la serie converge semplicemente.

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili, che non possiede integrali singolari e la cui soluzione è data da

$$\int \frac{1}{6(y^2+1)}\,dy = \int \frac{1}{x^2-5x+4}\,dx = \frac{1}{3}\left[\int \frac{1}{x-4}\,dx - \frac{1}{x-1}\,dx\right] \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{6}\arctan y = \frac{1}{3}\log\left|\frac{x-4}{x-1}\right| + C\,.$$

Imponendo la condizione iniziale si ricava

$$0 = \frac{1}{2}\arctan y(0) = \log 4 + C \qquad \Longrightarrow \qquad C = -\log 4\,.$$

Pertanto, la soluzione cercata è $y(x) = \tan\left\{\log\left[\frac{1}{16}\left(\frac{x-4}{x-1}\right)^2\right]\right\}$, $x < 1$.

Esercizio 4

(1) Osserviamo che per $\alpha < 0$, l'integranda è una funzione continua in $[0, +\infty)$, quindi l'integrale proposto va studiato solo in un intorno $U(+\infty)$ dell'infinito, dove si ha

$$U(+\infty) \qquad 0 \le f(x) \sim \frac{\pi/2}{x^{6/5}} = C\frac{1}{x^{6/5}} \qquad \text{che è integrabile in senso improprio,}$$

quindi, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale esiste finito.

(2) Per $\alpha = 0$, l'integranda è una funzione continua in $(0, +\infty)$, quindi l'integrale proposto va studiato in un intorno $U(+\infty)$ dell'infinito e in un intorno destro $U(0^+)$ dell'origine. In $U(+\infty)$, come visto nel punto **(1)**, la funzione risulta integrabile in senso improprio. In $U(0^+)$, utilizzando lo siluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $x \mapsto \arctan x$, si ha

$$U(0^+) \qquad 0 \le f(x) \sim \frac{x}{x^{6/5}} = \frac{1}{x^{1/5}} \qquad \text{che è integrabile in senso improprio,}$$

quindi, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale esiste finito.

(3) Per $\alpha > 0$, l'integranda è una funzione continua in $[0, \alpha) \cup (\alpha, +\infty)$, quindi l'integrale proposto va studiato in un intorno $U(+\infty)$ dell'infinito e in un intorno $U(\alpha)$ del punto α. In $U(+\infty)$, come visto nel punto **(1)**, la funzione risulta integrabile in senso improprio. In $U(\alpha)$ si ha, invece,

$$U(\alpha) \qquad 0 \le f(x) \sim \frac{\arctan\alpha}{(x-\alpha)^{6/5}} = C\frac{1}{(x-\alpha)^{6/5}} \qquad \text{che NON è integrabile in senso improprio,}$$

quindi, in quest'ultimo caso, l'integrale NON esiste finito.

Esercizio 5

L'insieme di definizione della funzione proposta è $C.E. = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$ e su tale insieme f è continua. Per determinare gli evenutali asintoti, calcoliamo

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2} = -\infty \qquad\qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to1^\pm} f(x) = \lim_{x\to1^\pm} \left[(x-1)^3 \log\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right)\right] = \lim_{x\to1^\pm} [-(x-1)^3 \log(x-1)^2] = 0$$

$$\lim_{x\to0^\pm} f(x) = \lim_{x\to0^\pm} \left[-\frac{1}{x^2}\log(\mathrm{e}+1)\right] = -\infty\,.$$

Quindi non ci sono asintoti orizzontali a $\pm\infty$ e c'è un solo asintoto verticale per $x \to 0^\pm$. Per quanto riguarda eventuali asintoti obliqui, osserviamo che

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1\,,$$

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{(x-1)^3}{x^2}\log(\mathrm{e} + 1/(x-1)^2) - x\right] \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)[1 + \log\left(1 + 1/(\mathrm{e}(x-1)^2)\right)] - x^3}{x^2} \\ &\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + (x-1)^3 \frac{1}{\mathrm{e}(x-1)^2} - x^3}{x^2} = -3\,, \end{aligned}$$

dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo utilizzato lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine della funzione $t \mapsto \log(1 + t)$, con $t = 1/(\mathrm{e}(x-1)^2)$. Quindi la retta di equazione $y = x - 3$ è asintoto obliquo a $\pm\infty$.

Esercizio 6

Poiché $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ ed è concava, $f''(x) \le 0$; pertanto

$$F'(x) = \log(1 + x^2)f''(x) \le 0 \qquad \Longrightarrow \qquad F \text{ non crescente.}$$