SOLUZIONI COMPITO INTEGRATIVO

Esercizio 1

(1) Osserviamo che per $\alpha < 0$, l'integranda è una funzione continua in $[0, +\infty)$, quindi l'integrale proposto va studiato solo in un intorno $U(+\infty)$ dell'infinito, dove si ha

$$U(+\infty) \qquad 0 \le f(x) \sim \frac{\pi/2}{x^{6/5}} = C\frac{1}{x^{6/5}} \qquad \text{che è integrabile in senso improprio,}$$

quindi, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale esiste finito.

(2) Per $\alpha = 0$, l'integranda è una funzione continua in $(0, +\infty)$, quindi l'integrale proposto va studiato in un intorno $U(+\infty)$ dell'infinito e in un intorno destro $U(0^+)$ dell'origine. In $U(+\infty)$, come visto nel punto **(1)**, la funzione risulta integrabile in senso improprio. In $U(0^+)$, utilizzando lo siluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $x \mapsto \arctan x$, si ha

$$U(0^+) \qquad 0 \le f(x) \sim \frac{x}{x^{6/5}} = \frac{1}{x^{1/5}} \qquad \text{che è integrabile in senso improprio,}$$

quindi, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale esiste finito.

(3) Per $\alpha > 0$, l'integranda è una funzione continua in $[0, \alpha) \cup (\alpha, +\infty)$, quindi l'integrale proposto va studiato in un intorno $U(+\infty)$ dell'infinito e in un intorno $U(\alpha)$ del punto α. In $U(+\infty)$, come visto nel punto **(1)**, la funzione risulta integrabile in senso improprio. In $U(\alpha)$ si ha, invece,

$$U(\alpha) \qquad 0 \le f(x) \sim \frac{\arctan\alpha}{(x-\alpha)^{6/5}} = C\frac{1}{(x-\alpha)^{6/5}} \qquad \text{che NON è integrabile in senso improprio,}$$

quindi, in quest'ultimo caso, l'integrale NON esiste finito.

Esercizio 2

L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili, che non possiede integrali singolari e la cui soluzione è data da

$$\int \frac{1}{6(y^2+1)}\,dy = \int \frac{1}{x^2-5x+4}\,dx = \frac{1}{3}\left[\int \frac{1}{x-4}\,dx - \frac{1}{x-1}\,dx\right] \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{6}\arctan y = \frac{1}{3}\log\left|\frac{x-4}{x-1}\right| + C\,.$$

Imponendo la condizione iniziale si ricava

$$0 = \frac{1}{2}\arctan y(0) = \log 4 + C \qquad \Longrightarrow \qquad C = -\log 4\,.$$

Pertanto, la soluzione cercata è $y(x) = \tan\left\{\log\left[\frac{1}{16}\left(\frac{x-4}{x-1}\right)^2\right]\right\}$, $x < 1$.

Esercizio 3

I punti critici di f si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \cos x - \sin(x+y) = 0\,, \\ \cos y - \sin(x+y) = 0\,, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \cos x = \cos y\,, \\ \cos y - \sin(x+y) = 0\,, \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} x = y\,, \\ \cos x = \sin 2x = 2\sin x\cos x\,, \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x = -y\,, \\ \cos y = 0\,. \end{cases}$$

Tenendo conto che $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi$, si ottengono le seguenti soluzioni

$$(\pi/2, \pi/2)\,, \qquad (\pi/6, \pi/6)\,, \qquad (5\pi/6, 5\pi/6)\,.$$

Poiché la matrice Hessiana è

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x - \cos(x+y) & -\cos(x+y) \\ -\cos(x+y) & -\sin y - \cos(x+y) \end{pmatrix},$$

studiandone il determinante nei punti stazionari trovati si ricava

$$\det\big(Hf(\pi/2,\pi/2)\big) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} < 0\,, \qquad \det\big(Hf(\pi/6,\pi/6)\big) = \det\begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ -1/2 & -1 \end{pmatrix} > 0\,,$$
$$\det\big(Hf(5\pi/6,5\pi/6)\big) = \det\begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ -1/2 & -1 \end{pmatrix} > 0\,,$$

ovvero

$$\begin{aligned} &(\pi/6,\pi/6) \quad \text{e} \quad (5\pi/6,5\pi/6) \qquad \text{sono punti di massimo relativo}\,, \\ &(\pi/2,\pi/2) \quad \text{è punto di sella}\,. \end{aligned}$$

Esercizio 4

Osserviamo che il limite proposto si può riscrivere nella forma

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(x-1)^3+(x-1)^2+(y-2)^2}{x^2-2x+y^2-4y+5} &= \lim_{(x,y)\to(1,2)} \left[\frac{(x-1)^3}{(x-1)^2+(y-2)^2} + \frac{(x-1)^2+(y-2)^2}{(x-1)^2+(y-2)^2}\right] \\ &= \lim_{(x,y)\to(1,2)} \left[\frac{(x-1)^3}{(x-1)^2+(y-2)^2} + 1\right]. \end{aligned}$$

Pertanto, effettuando un cambiamento in coordinate polari centrate nel punto $(1,2)$, cioè $x = 1 + r\cos\theta$ e $y = 2 + r\sin\theta$, si ottiene

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \left[\frac{(x-1)^3}{(x-1)^2+(y-2)^2} + 1\right] = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^3\cos^3\theta}{r^2} + 1 = \lim_{r\to 0^+} r\cos^3\theta + 1 = 1\,.$$