SOLUZIONI COMPITO del 23/03/2016
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
ENERGETICA - MECCANICA

TEMA A

Esercizio 1

Effettuando la sostituzione $t = \sin x$, da cui $dt = \cos x\, dx$, otteniamo

$$\int (\cos x) \log(3 + \sin x)\, dx = \left(\int \log(3+t)\, dt \right) \Big|_{t=\sin x} = \left(t\log(3+t) - \int \frac{t}{3+t}\, dt \right) \Big|_{t=\sin x}$$
$$= \left(t\log(3+t) - \int \frac{t+3-3}{3+t}\, dt \right) \Big|_{t=\sin x} = \left(t\log(3+t) - t + \int \frac{3}{3+t}\, dt \right) \Big|_{t=\sin x}$$
$$= [t\log(3+t) - t + 3\log(3+t)] \Big|_{t=\sin x} + C = (3+\sin x)\log(3+\sin x) - \sin x + C\,,$$

dove abbiamo utilizzato anche un'integrazione per parti. Imponendo ora la condizione richiesta otteniamo

$$4\log 4 = (3 + \sin \pi/2)\log(3+\sin\pi/2) - \sin\pi/2 + C = 4\log 4 - 1 + C \qquad \Longrightarrow \qquad C = 1\,.$$

Pertanto la primitiva cercata è $\varphi(x) = (3 + \sin x)\log(3+\sin x) - \sin x + 1$.

Esercizio 2

Innanzitutto ricordiamo che $\sqrt[5]{1+\varepsilon_n} - 1 \sim \frac{1}{5}\varepsilon_n$, con $\varepsilon_n = \frac{3+n}{n^3+1} \sim \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2} \to 0$.

a) Per $\alpha > 0$, osservando che $n^{2\alpha} + 2\log n + 4 \sim n^{2\alpha}$, otteniamo

$$a_n := [n^{2\alpha} + 2\log n + 4] \left(\sqrt[5]{1 + \frac{3+n}{n^3+1}} - 1 \right) \sim n^{2\alpha} \frac{1}{5n^2} = \frac{1}{5n^{2-2\alpha}}\,.$$

Pertanto, per confronto con la serie armonica generalizzata, la serie proposta converge per $2 - 2\alpha > 1$, ovvero $0 < \alpha < 1/2$, mentre diverge per $\alpha \geq 1/2$.

b) Per $\alpha \leq 0$, osservando che $n^{2\alpha} + 2\log n + 4 \sim 2\log n$, otteniamo

$$a_n := [n^{2\alpha} + 2\log n + 4] \left(\sqrt[5]{1 + \frac{3+n}{n^3+1}} - 1 \right) \sim 2\log n \frac{1}{5n^2} = \frac{2}{5n^2(\log n)^{-1}}\,.$$

Pertanto, per confronto con la serie di Abel di esponenti $p = 2$ e $q = -1$, la serie proposta converge.

Esercizio 3

Osserviamo, innanzitutto, che la funzione proposta è continua su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e derivabile su $\mathbb{R} \setminus \{-2; 0\}$, per i teoremi di composizione algebrica e funzionale di funzioni regolari. Pertanto, per stabilire se f è continua su tutto il suo dominio, resta solo da studiarne il comportamento in $x = 0$, mentre per stabilire se f è derivabile su tutto il suo dominio, resta solo da studiarne il comportamento in $x = 0; -2$.

a) Per quanto riguarda la continuità in $x = 0$, osserviamo che

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{2}\sqrt{7 + |x+2|} = \frac{3}{2}\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+3x)}{2x+x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}\,,$$

dove abbiamo utilizzato lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = 3x \to 0$, e il fatto che $2x + x^2 \sim 2x$, per $x \to 0$. Quindi, essendo uguali i due limiti direzionali, f risulta continua nell'origine e pertanto, da quanto affermato in precedenza, avremo che $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

b) Per quanto riguarda la derivabilità in $x = -2$, anziché passare attraverso il calcolo del limite del rapporto incrementale, osserviamo che

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{6x + 3x^2 - (2 + 8x + 6x^2)\log(1 + 3x)}{(1 + 3x)(2x + x^2)^2} & \text{se } x > 0; \\ \dfrac{1}{4\sqrt{9 + x}} & \text{se } -2 < x < 0; \\ -\dfrac{1}{4\sqrt{5 - x}} & \text{se } x < -2. \end{cases}$$

Pertanto si ricava subito che

$$\lim_{x\to-2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^-} -\frac{1}{4\sqrt{5 - x}} = -\frac{1}{4\sqrt{7}}\,, \qquad \lim_{x\to-2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{4\sqrt{9 + x}} = \frac{1}{4\sqrt{7}}\,,$$

ovvero f non è derivabile in $x = -2$, che risulta essere un punto angoloso.

c) Infine, poiché f è risultata continua in $x = 0$, possiamo studiarne anche la derivabilità in tale punto. Senza passare attraverso il limite del rapporto incrementale, ma utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1 + t)$, con $t = 3x$, otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{6x + 3x^2 - (2 + 8x + 6x^2)\log(1 + 3x)}{(1 + 3x)(2x + x^2)^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{6x + 3x^2 - (2 + 8x + 6x^2)(3x - 9x^2/2)}{(1 + 3x)(2x + x^2)^2}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{6x + 3x^2 - 6x - 24x^2 + 9x^2 + o(x^2)}{4x^2} = -3\,, \qquad \text{mentre} \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{4\sqrt{9 + x}} = \frac{1}{12}\,;$$

pertanto anche in $x = 0$ la funzione risulta non derivabile, presentando un punto angoloso.

Esercizio 4

L'equazione differenziale proposta risulta essere un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea, la cui equazione caratteristica associata è $2\lambda^2 + 7\lambda - 4 = 0$ che ha per soluzioni $\lambda = -4; 1/2$. Pertanto, l'integrale generale dell'omogenea è $y_0(x) = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{x/2}$. Per determinare una soluzione particolare dell'equazione completa utilizziamo il metodo di somiglianza e quello di sovrapposizione che forniscono $y_p(x) = y_{1p}(x) + y_{2p}(x)$ con $y_{1p}(x) = Ae^x$ e $y_{2p}(x) = B$. Derivando due volte ed inserendo nell'equazione completa ricaviamo $2A + 7A - 4A = 3$, da cui $A = 3/5$, e $-4B = 1$, da cui $B = -1/4$. Pertanto l'integrale generale dell'equazione completa è $y(x) = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{x/2} + \frac{3}{5}e^x - \frac{1}{4}$.

Infine, passando al limite per $x \to -\infty$, otteniamo

$$\lim_{x\to-\infty} \left[C_1 e^{-4x} + C_2 e^{x/2} + \frac{3}{5}e^x - \frac{1}{4}\right] = \lim_{x\to-\infty} \left[C_1 e^{-4x} - \frac{1}{4}\right] = \begin{cases} +\infty & \text{se } C_1 > 0; \\ -\infty & \text{se } C_1 < 0; \\ -1/4 & \text{se } C_1 = 0. \end{cases}$$

Quindi, per $C_1 = 0$, esistono infinite soluzioni limitate per $x \to -\infty$ date da $y(x) = C_2 e^{x/2} + \frac{3}{5}e^x - \frac{1}{4}$, al variare di $C_2 \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5

Osserviamo che, per le ipotesi fatte, $f(t) > 0$ per $t > 0$, $f'(t) \geq 0$ su tutto $\mathbb{R}$, ed $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Inoltre, dal Teorema di Torricelli e dal Teorema di derivazione della funzione composta, si ricava

$$F'(x) = f^3(x^2) > 0 \quad \forall x \neq 0\,; \qquad F''(x) = 3f^2(x^2)f'(x^2)2x \begin{cases} \geq 0 & \text{se } x > 0; \\ = 0 & \text{se } x = 0; \\ \leq 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Pertanto, avendo la derivata prima strettamente positiva per $x \neq 0$, F è strettamente crescente su $\mathbb{R}$; inoltre, poiché la derivata seconda si annulla nell'origine e cambia segno in un intorno di essa, $x = 0$ è un punto di flesso.

TEMA B

Esercizio 1
Effettuando la sostituzione $t = \tan x$, da cui $dt = (1 + \tan^2 x)\,dx$, otteniamo

$$\int (1+\tan^2 x)\log(2+\tan x)\,dx = \left(\int \log(2+t)\,dt\right)\Big|_{t=\tan x} = \left(t\log(2+t) - \int \frac{t}{2+t}\,dt\right)\Big|_{t=\tan x}$$
$$= \left(t\log(2+t) - \int \frac{t+2-2}{2+t}\,dt\right)\Big|_{t=\tan x} = \left(t\log(2+t) - t + \int \frac{2}{2+t}\,dt\right)\Big|_{t=\tan x}$$
$$= [t\log(2+t) - t + 2\log(2+t)]\Big|_{t=\tan x} + C = (2+\tan x)\log(2+\tan x) - \tan x + C\,,$$

dove abbiamo utilizzato anche un'integrazione per parti. Imponendo ora la condizione richiesta otteniamo

$$3\log 3 = (2+\tan\pi/4)\log(2+\tan\pi/4) - \tan\pi/4 + C = 3\log 3 - 1 + C \qquad \Longrightarrow \qquad C = 1\,.$$

Pertanto la primitiva cercata è $\varphi(x) = (2+\tan x)\log(2+\tan x) - \tan x + 1$.

Esercizio 2
Innanzitutto ricordiamo che $\sqrt[7]{1+\varepsilon_n} - 1 \sim \frac{1}{7}\varepsilon_n$, con $\varepsilon_n = \frac{2+n^2}{n^5+4} \sim \frac{n^2}{n^5} = \frac{1}{n^3} \to 0$.

a) Per $\alpha > 0$, osservando che $n^\alpha + 3\log n + 2 \sim n^\alpha$, otteniamo

$$a_n := [n^\alpha + 3\log n + 2]\left(\sqrt[7]{1+\frac{2+n^2}{n^5+4}} - 1\right) \sim n^\alpha\,\frac{1}{7n^3} = \frac{1}{7n^{3-\alpha}}\,.$$

Pertanto, per confronto con la serie armonica generalizzata, la serie proposta converge per $3 - \alpha > 1$, ovvero $0 < \alpha < 2$, mentre diverge per $\alpha \geq 2$.

b) Per $\alpha \leq 0$, osservando che $n^\alpha + 3\log n + 2 \sim 3\log n$, otteniamo

$$a_n := [n^\alpha + 3\log n + 2]\left(\sqrt[7]{1+\frac{2+n^2}{n^5+4}} - 1\right) \sim 3\log n\,\frac{1}{7n^3} = \frac{3}{7n^3(\log n)^{-1}}\,.$$

Pertanto, per confronto con la serie di Abel di esponenti $p = 3$ e $q = -1$, la serie proposta converge.

Esercizio 3
Osserviamo, innanzitutto, che la funzione proposta è continua su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e derivabile su $\mathbb{R}\setminus\{0;3\}$, per i teoremi di composizione algebrica e funzionale di funzioni regolari. Pertanto, per stabilire se f è continua su tutto il suo dominio, resta solo da studiarne il comportamento in $x = 0$, mentre per stabilire se f è derivabile su tutto il suo dominio, resta solo da studiarne il comportamento in $x = 0; 3$.

a) Per quanto riguarda la continuità in $x = 0$, osserviamo che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{3}\sqrt{1+|x-3|} = \frac{2}{3}\,, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\log(1-2x)}{-3x+2x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x}{-3x} = \frac{2}{3}\,,$$

dove abbiamo utilizzato lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = -2x \to 0$, e il fatto che $-3x+2x^2 \sim -3x$, per $x \to 0$. Quindi, essendo uguali i due limiti direzionali, f risulta continua nell'origine e pertanto, da quanto affermato in precedenza, avremo che $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

b) Per quanto riguarda la derivabilità in $x = 3$, anziché passare attraverso il calcolo del limite del rapporto incrementale, osserviamo che

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{6x - 4x^2 - (-3+10x-8x^2)\log(1-2x)}{(1-2x)(-3x+2x^2)^2} & \text{se } x < 0; \\[2ex] -\dfrac{1}{6\sqrt{4-x}} & \text{se } 0 < x < 3; \\[2ex] \dfrac{1}{6\sqrt{x-2}} & \text{se } x > 3. \end{cases}$$

Pertanto si ricava subito che

$$\lim_{x\to 3^-} f'(x) = \lim_{x\to 3^-} -\frac{1}{6\sqrt{4-x}} = -\frac{1}{6}\,, \qquad \lim_{x\to 3^+} f'(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{1}{6\sqrt{x-2}} = \frac{1}{6}\,,$$

ovvero f non è derivabile in $x=3$, che risulta essere un punto angoloso.

c) Infine, poiché f è risultata continua in $x=0$, possiamo studiarne anche la derivabilità in tale punto. Senza passare attraverso il limite del rapporto incrementale, ma utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t=-2x$, otteniamo

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{6x-4x^2-(-3+10x-8x^2)\log(1-2x)}{(1-2x)(-3x+2x^2)^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{6x-4x^2-(-3+10x-8x^2)(-2x-4x^2/2)}{(1-2x)(-3x+2x^2)^2}$$
$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{6x-4x^2-6x+20x^2-6x^2+o(x^2)}{9x^2} = \frac{10}{9}\,, \qquad \text{mentre} \qquad \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{6\sqrt{4-x}} = -\frac{1}{12}\,;$$

pertanto anche in $x=0$ la funzione risulta non derivabile, presentando un punto angoloso.

Esercizio 4

L'equazione differenziale proposta risulta essere un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea, la cui equazione caratteristica associata è $2\lambda^2-7\lambda-4=0$ che ha per soluzioni $\lambda=4;-1/2$. Pertanto, l'integrale generale dell'omogenea è $y_0(x)=C_1\mathrm{e}^{4x}+C_2\mathrm{e}^{-x/2}$. Per determinare una soluzione particolare dell'equazione completa utilizziamo il metodo di somiglianza e quello di sovrapposizione che forniscono $y_p(x)=y_{1p}(x)+y_{2p}(x)$ con $y_{1p}(x)=A\mathrm{e}^{-x}$ e $y_{2p}(x)=B$. Derivando due volte ed inserendo nell'equazione completa ricaviamo $2A+7A-4A=2$, da cui $A=2/5$, e $-4B=2$, da cui $B=-1/2$. Pertanto l'integrale generale dell'equazione completa è $y(x)=C_1\mathrm{e}^{4x}+C_2\mathrm{e}^{-x/2}+\frac{2}{5}\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}$.

Infine, passando al limite per $x\to+\infty$, otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty}\left[C_1\mathrm{e}^{4x}+C_2\mathrm{e}^{-x/2}+\frac{2}{5}\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[C_1\mathrm{e}^{4x}-\frac{1}{2}\right] = \begin{cases} +\infty & \text{se } C_1>0; \\ -\infty & \text{se } C_1<0; \\ -1/2 & \text{se } C_1=0. \end{cases}$$

Quindi, per $C_1=0$, esistono infinite soluzioni limitate per $x\to+\infty$ date da $y(x)=C_2\mathrm{e}^{-x/2}+\frac{2}{5}\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}$, al variare di $C_2\in\mathbb{R}$.

Esercizio 5

Osserviamo che, per le ipotesi fatte, $f(t)<0$ per $t>0$, $f'(t)\le 0$ su tutto $\mathbb{R}$, ed $F\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Inoltre, dal Teorema di Torricelli e dal Teorema di derivazione della funzione composta, si ricava

$$F'(x)=f^3(x^2)<0 \quad \forall x\neq 0\,; \qquad F''(x)=3f^2(x^2)f'(x^2)2x \begin{cases} \ge 0 & \text{se } x<0; \\ =0 & \text{se } x=0; \\ \le 0 & \text{se } x>0. \end{cases}$$

Pertanto, avendo la derivata prima strettamente negativa per $x\neq 0$, F è strettamente decrescente su $\mathbb{R}$; inoltre, poiché la derivata seconda si annulla nell'origine e cambia segno in un intorno di essa, $x=0$ è un punto di flesso.