SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1

Osservando che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, la serie proposta è a termini positivi e ricordando lo sviluppo di McLaurin al primo ordine per le funzioni $t \mapsto \sin t$, con $t = 1/n$, e $t \mapsto \tan t$, con $t = 1/\log n$, si ottiene

$$a_n := \left(\sin\frac{1}{n}\right)^{\alpha}\left(\tan\frac{1}{\log n}\right)^{\alpha+1} \sim \frac{1}{n^{\alpha}(\log n)^{\alpha+1}}\,.$$

Per confronto con la serie di Abel ne consegue che la serie proposta converge per $\alpha \geq 1$.

Esercizio 2

La funzione proposta è ovviamente definita in $D = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$, in quanto dobbiamo imporre le condizioni:

$$1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} > 0\,, \qquad x \neq 0\,.$$

I limiti alla frontiera sono dati da

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1}{x} + \frac{3x^2}{2x}\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-}\left[\log\left(\frac{x+1}{x}\right) - 2\right] = -\infty\,;$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\left(-\log x + \frac{1}{2x}\right) = +\infty\,;$$

dove, per il calcolo del primo limite, si è usato lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = 1/x$, e per il calcolo del terzo limite si è usato il fatto che $\log(1 + \frac{1}{x}) \sim -\log x$, per $x \to 0^+$. Pertanto abbiamo che $x = -1$ è asintoto verticale per $x \to -1^-$ e $x = 0$ è asintoto verticale per $x \to 0^+$. Inoltre, poiché per $x \to \pm\infty$ si ha che $f(x) \sim 3x/2$, dobbiamo controllare se sono presenti degli asintoti obliqui. A tale fine, osserviamo che

$$m := \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x/2}{x} = \frac{3}{2}$$

$$q := \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - \frac{3}{2}x\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\log\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{3x^2+1-3x^2}{2x}\right] = 0\,.$$

Pertanto $y = \frac{3}{2}x$ è asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$.

Esercizio 3

Osserviamo, innanzitutto, che

$$\frac{5+i}{4+6i} = \frac{(5+i)(4-6i)}{(4+6i)(4-6i)} = \frac{26-26i}{52} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{-i\pi/4}\,.$$

Pertanto, l'esercizio proposto consiste nel calcolare le 3 radici cubiche complesse del numero $\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\pi/4}$, ovvero

$$\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{-i\pi/4}} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}\,\mathrm{e}^{i\frac{-\pi/4+2k\pi}{3}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[6]{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right) \\ \frac{1}{\sqrt[6]{2}}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right) \\ \frac{1}{\sqrt[6]{2}}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) \end{cases}\,.$$

Domanda 1

La risposta *a*) è falsa, poiché ad esempio la funzione $f(x) = \mathrm{e}^x$ soddisfa le ipotesi, ma è strettamente crescente.

La risposta *b*) è corretta, poiché ad esempio la funzione $f(x) = \mathrm{e}^x$ soddisfa le ipotesi ed è strettamente crescente, quindi non ha estremanti.

La risposta *c*) è corretta, in quanto l'ipotesi $f'' > 0$ su $\mathbb{R}$ implica che f' sia strettamente crescente. Pertanto, o f' non si annulla mai oppure, se essa si annulla in un punto x_0, per la sua monotonia, x_0 sarà necessariamente un punto di minimo.

La risposta *d*) è falsa, poiché ad esempio la funzione $f(x) = \mathrm{e}^x$ soddisfa le ipotesi, ma diverge all'infinito per $x \to +\infty$.

SOLUZIONI COMPITO B

Esercizio 1

Osservando che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, la serie proposta è a termini positivi e ricordando lo sviluppo di McLaurin al primo ordine per le funzioni $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = (1/\log n)$, e $t \mapsto \arctan t$, con $t = 1/n$, si ottiene

$$a_n := \left[\log\left(1 + \frac{1}{\log n}\right)\right]^\alpha \left(\arctan \frac{1}{n}\right)^{\alpha-1} \sim \frac{1}{(\log n)^\alpha\, n^{\alpha-1}}\,.$$

Per confronto con la serie di Abel ne consegue che la serie proposta converge per $\alpha \geq 2$.

Esercizio 2

La funzione proposta è ovviamente definita in $D = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, in quanto dobbiamo imporre le condizioni:

$$1 + \frac{1}{x-1} = \frac{x}{x-1} > 0\,, \qquad x \neq 1\,.$$

I limiti alla frontiera sono dati da

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1}{x-1} + \frac{x^2}{x}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty\\
\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-}\left[\log\left(\frac{x}{x-1}\right) + 0\right] = -\infty\,;\\
\lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+}\left(-\log(x-1) + \frac{2}{x-1}\right) = +\infty\,;
\end{aligned}$$

dove, per il calcolo del primo limite, si è usato lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = 1/(x-1)$, e per il calcolo del terzo limite si è usato il fatto che $\log(1+\frac{1}{x-1}) \sim -\log(x-1)$, per $x \to 1^+$. Pertanto abbiamo che $x = 0$ è asintoto verticale per $x \to 0^-$ e $x = 1$ è asintoto verticale per $x \to 1^+$. Inoltre, poiché per $x \to \pm\infty$ si ha che $f(x) \sim x$, dobbiamo contrallare se sono presenti degli asintoti obliqui. A tale fine, osserviamo che

$$\begin{aligned}
m &:= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x} = 1\\
q &:= \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\log\left(1 + \frac{1}{x-1}\right) + \frac{x^2 + x - x^2 + x}{x}\right] = 2\,.
\end{aligned}$$

Pertanto $y = x + 2$ è asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$.

Esercizio 3

Osserviamo, innanzitutto, che

$$\frac{4+2i}{3-i} = \frac{(4+2i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{10+10i}{10} = 1 + i = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/4}\,.$$

Pertanto, l'esercizio proposto consiste nel calcolare le 4 radici quarte complesse del numero $\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\pi/4}$, ovvero

$$\sqrt[4]{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/4}} = \sqrt[8]{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi/4+2k\pi}{4}} = \begin{cases}
\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}\right)\\
\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16} + i\sin\frac{9\pi}{16}\right)\\
\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16} + i\sin\frac{17\pi}{16}\right)\\
\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16} + i\sin\frac{25\pi}{16}\right)
\end{cases}.$$

Domanda 1

La risposta $a)$ è corretta, poiché ad esempio la funzione $f(x) = -\mathrm{e}^x$ soddisfa le ipotesi ed è strettamente decrescente, quindi non ha estremanti.

La risposta $b)$ è falsa, poiché ad esempio la funzione $f(x) = -x^2$ soddisfa le ipotesi, ma non è monotona.

La risposta $c)$ è corretta, in quanto l'ipotesi $f'' < 0$ su $\mathbb{R}$ implica che f' abbia la sua derivata prima strettamente negativa e quindi sia strettamente decrescente.

La risposta $d)$ è falsa, poiché ad esempio la funzione $f(x) = -\mathrm{e}^x$ soddisfa le ipotesi, ma è strettamente decrescente, quindi non ha estremanti.