

1. Sia data

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(-\frac{2x}{\sqrt{4x^2+2}}\right) & \text{se } x \geq 0; \\ x\sqrt{|x-5|-3} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Determinare segno, monotonia, concavità e convessità di f e tracciarne il grafico qualitativo. Stabilire, inoltre, la natura del punto $x = 0$.

Fino a punti 10

2. Calcolare il polinomio di Mc Laurin di grado 8 della funzione

$$[x^2 - \log(1 + x^2)] \sin^2 x .$$

Fino a punti 8

3. Stabilire per quali valori del parametro reale α l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{|x^2 - 1|^\alpha}{|\log x|} \text{Sh } x \, dx$$

esiste finito.

Fino a punti 8

4. Stabilire per quali valori del parametro reale α la funzione

$$f_\alpha(x, y) = e^{\alpha x} \sin[(\alpha^2 - 1)y] \cos x^2$$

ha la derivata direzionale lungo la direzione $v = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ nel punto $P_0 = (0, 0)$ pari a 0.

Fino a punti 7

Tempo:
3 ore

spazio riservato
alla commissione

1.

2.

3.

4.

totale

1. Sia data

$$f(x) = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) & \text{se } x < 0; \\ x\sqrt{|x+3|-1} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Determinare segno, monotonia, concavità e convessità di f e tracciarne il grafico qualitativo. Stabilire, inoltre, la natura del punto $x = 0$.

Fino a punti 10

2. Calcolare il polinomio di Mc Laurin di grado 11 della funzione

$$(\sin x^3 - x^3) \cos^2 x.$$

Fino a punti 8

3. Stabilire per quali valori del parametro reale α l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{|\log x|}{|x^2 - 1|^\alpha} \sin x \, dx$$

esiste finito.

Fino a punti 8

4. Stabilire per quali valori del parametro reale α la funzione

$$f_\alpha(x, y) = \cos(\pi/2 + \alpha y) \sin(x^2 + \pi/2) \log(e + y)^{\alpha-1}$$

ha la derivata direzionale lungo la direzione $v = (1/2, \sqrt{3}/2)$ nel punto $P_0 = (0, 0)$ pari a $-\sqrt{3}$.

Fino a punti 7

Tempo:
3 ore

spazio riservato
alla commissione

1.

2.

3.

4.

totale

1. Sia data

$$f(x) = \begin{cases} -x\sqrt{|x+3|-1} & \text{se } x \geq 0; \\ \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Determinare segno, monotonia, concavità e convessità di f e tracciarne il grafico qualitativo. Stabilire, inoltre, la natura del punto $x = 0$.

Fino a punti 10

2. Calcolare il polinomio di Mc Laurin di grado 6 della funzione

$$[x^2 - \log(1 + x^2)] \cos^2 x.$$

Fino a punti 8

3. Stabilire per quali valori del parametro reale α l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{|\log x|(\sin x)^\alpha} dx$$

esiste finito.

Fino a punti 8

4. Stabilire per quali valori del parametro reale α la funzione

$$f_\alpha(x, y) = -\log(e + y)^{\alpha-1} \cos(\pi/2 + \alpha y) \sin(x^2 + \pi/2)$$

ha la derivata direzionale lungo la direzione $v = (1/2, \sqrt{3}/2)$ nel punto $P_0 = (\sqrt{\pi}, 0)$ pari a $-6\sqrt{3}$.

Fino a punti 7

Tempo:
3 ore

spazio riservato
alla commissione

1.

2.

3.

4.

totale

1. Sia data

$$f(x) = \begin{cases} -x\sqrt{|x-5|} - 3 & \text{se } x < 0; \\ \arctan\left(\frac{2x}{\sqrt{4x^2+2}}\right) & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Determinare segno, monotonia, concavità e convessità di f e tracciarne il grafico qualitativo. Stabilire, inoltre, la natura del punto $x = 0$.

Fino a punti 10

2. Calcolare il polinomio di Mc Laurin di grado 9 della funzione

$$(x^2 - \sin x^2) \log^2(1+x).$$

Fino a punti 8

3. Stabilire per quali valori del parametro reale α l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{1-x^2}}{|\log x|} (\text{Sh } x)^\alpha dx$$

esiste finito.

Fino a punti 8

4. Stabilire per quali valori del parametro reale α la funzione

$$f_\alpha(x, y) = -e^{\alpha(x-\sqrt{\pi})} \sin[(\alpha^2 - 1)y] \cos x^2$$

ha la derivata direzionale lungo la direzione $v = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ nel punto $P_0 = (\sqrt{\pi}, 0)$ pari a $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Fino a punti 7

Tempo:
3 ore

spazio riservato
alla commissione

1.

2.

3.

4.

totale