SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(-\frac{2x}{\sqrt{4x^2+2}}\right) & \text{se } x \geq 0; \\ x\sqrt{2-x} & \text{se } x < 0; \end{cases} \quad f(x) < 0 \quad \forall x \in I\!R \setminus \{0\};$$

$f(0) = 0; \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0; \quad f$ è continua in $x = 0$;

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\pi/4; \quad y = -\pi/4$ è asintoto orizzontale a $+\infty$;

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty;$ non ci sono asintoti a $-\infty$;

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{4}{(8x^2+2)\sqrt{4x^2+2}} & \text{se } x > 0; \\ \frac{4-3x}{2\sqrt{2-x}} & \text{se } x < 0; \end{cases}$$

$f'(x) < 0 \quad \forall x > 0; \quad f'(x) > 0 \quad \forall x < 0;$

$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \sqrt{2}; \quad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\sqrt{2}; \quad x = 0$ è punto angoloso;

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{32x(12x^2+5)}{(8x^2+2)^2(4x^2+2)^{3/2}} & \text{se } x > 0; \\ \frac{3x-8}{4(2-x)^{3/2}} & \text{se } x < 0; \end{cases}$$

$f''(x) < 0 \quad \forall x < 0; \quad f''(x) > 0 \quad \forall x > 0.$

Esercizio 2

Ricordando che

$$\log(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6)$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

si ottiene

$$[x^2 - \log(1+x^2)]\sin^2 x = \left[+\frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} + o(x^6)\right]\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) = \frac{1}{2}x^6 - \frac{1}{3}x^8 - \frac{1}{6}x^8 + o(x^8)\ .$$

Quindi il polinomio cercato sarà $P_8(x) = \frac{1}{2}(x^6 - x^8)$.

Esercizio 3

Osserviamo che $f(x)$ va studiata in un intorno di $x = 0$ e in un intorno di $x = 1$. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per Shx, si ottiene che in un intorno di $x = 0$

$$f(x) \sim \frac{x}{|\log x|} = \frac{1}{x^{-1}|\log x|}$$

che è impropriamente integrabile (osserviamo anche che $f(x) \to 0$ per $x \to 0^+$).

Utilizzando, invece, lo svipluppo di Mc Laurin al primo ordine per $\log(1+t)$ con $t = x-1$, si ottiene che in un intorno di $x = 1$

$$f(x) \sim 2^\alpha \mathrm{Sh}1 \frac{|x-1|^\alpha}{|x-1|} = \frac{2^\alpha \mathrm{Sh}1}{|x-1|^{1-\alpha}}$$

che è impropriamente integrabile per $\alpha > 0$. Quindi l'integrale proposto esiste finito per $\alpha > 0$.

Esercizio 4

Osservando che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, f_α è differenziabile in P_0 e ricordando che vale la formula

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial v}(P_0) = \frac{\partial f_\alpha}{\partial x}(P_0)v_1 + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y}(P_0)v_2$$

ove $v = (v_1, v_2)$, si ottiene

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial v}(0,0) = \frac{\alpha^2 - 1}{\sqrt{2}} = 0$$

che ha come soluzioni $\alpha = \pm 1$.

SOLUZIONI COMPITO B

Esercizio 1

$$f(x) = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) & \text{se } x < 0; \\ x\sqrt{2+x} & \text{se } x \geq 0; \end{cases} \qquad f(x) > 0 \quad \forall x \in I\!R \setminus \{0\};$$

$f(0) = 0;\quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0;\quad f$ è continua in $x = 0$;

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \pi/4;\quad y = \pi/4$ è asintoto orizzontale a $-\infty$;

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty;$ non ci sono asintoti a $+\infty$;

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}} & \text{se } x < 0; \\ \frac{4+3x}{2\sqrt{2+x}} & \text{se } x > 0; \end{cases}$$

$f'(x) < 0 \quad \forall x < 0;\quad f'(x) > 0 \quad \forall x > 0;$

$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -1;\quad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \sqrt{2};\quad x = 0$ è punto angoloso;

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{x(6x^2+5)}{(2x^2+1)^2(x^2+1)^{3/2}} & \text{se } x < 0; \\ \frac{3x+8}{4(2+x)^{3/2}} & \text{se } x > 0; \end{cases}$$

$f''(x) < 0 \quad \forall x < 0;\quad f''(x) > 0 \quad \forall x > 0.$

Esercizio 2

Ricordando che

$$\sin x^3 = x^3 - \frac{x^9}{3!} + \frac{x^{15}}{5!} + o(x^{15})$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$$

si ottiene

$$(\sin x^3 - x^3)\cos^2 x = \left[-\frac{x^9}{3!} + \frac{x^{15}}{5!} + o(x^{15})\right]\left(1 - x^2 + o(x^2)\right) = -\frac{1}{3!}x^9 + \frac{1}{3!}x^{11} + o(x^{11}) \ .$$

Quindi il polinomio cercato sarà $P_{11}(x) = -\frac{1}{6}(x^9 - x^{11})$.

Esercizio 3

Osserviamo che $f(x)$ va studiata in un intorno di $x = 0$ e in un intorno di $x = 1$. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per $\sin x$, si ottiene che in un intorno di $x = 0$

$$f(x) \sim |x \log x| = \frac{1}{|x^{-1}\log^{-1} x|}$$

che è impropriamente integrabile (osserviamo anche che $f(x) \to 0$ per $x \to 0^+$).

Utilizzando, invece, lo svipluppo di Mc Laurin al primo ordine per $\log(1+t)$ con $t = x - 1$, si ottiene che in un intorno di $x = 1$

$$f(x) \sim \frac{(\sin 1)|x-1|}{2^\alpha |x-1|^\alpha} = \frac{\sin 1}{2^\alpha} \frac{1}{|x-1|^{\alpha-1}}$$

che è impropriamente integrabile per $\alpha < 2$. Quindi l'integrale proposto esiste finito per $\alpha < 2$.

Esercizio 4

Osservando che, per ogni $\alpha \in I\!R$, f_α è differenziabile in P_0 e ricordando che vale la formula

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial v}(P_0) = \frac{\partial f_\alpha}{\partial x}(P_0) v_1 + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y}(P_0) v_2$$

ove $v = (v_1, v_2)$, si ottiene

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial v}(0,0) = \frac{\sqrt{3}}{2}(-\alpha^2 + \alpha) = -\sqrt{3}$$

che ha come soluzioni $\alpha = -1,\ 2$.

SOLUZIONI COMPITO C

Esercizio 1

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) & \text{se } x < 0; \\ -x\sqrt{2+x} & \text{se } x \geq 0; \end{cases} \quad f(x) < 0 \quad \forall x \in I\!R \setminus \{0\};$$

$f(0) = 0;\quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0;\quad f$ è continua in $x = 0$;

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\pi/4;\quad y = -\pi/4$ è asintoto orizzontale a $-\infty$;

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty;$ non ci sono asintoti a $+\infty$;

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}} & \text{se } x < 0; \\ -\frac{4+3x}{2\sqrt{2+x}} & \text{se } x > 0; \end{cases}$$

$f'(x) > 0 \quad \forall x < 0;\quad f'(x) < 0 \quad \forall x > 0;$

$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = 1;\quad \lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\sqrt{2};\quad x = 0$ è punto angoloso;

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{x(6x^2+5)}{(2x^2+1)^2(x^2+1)^{3/2}} & \text{se } x < 0; \\ -\frac{3x+8}{4(2+x)^{3/2}} & \text{se } x > 0; \end{cases}$$

$f''(x) > 0 \quad \forall x < 0;\quad f''(x) < 0 \quad \forall x > 0.$

Esercizio 2

Ricordando che

$$\log(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$$

si ottiene

$$[x^2 - \log(1+x^2)]\cos^2 x = \left[+\frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} + o(x^6)\right]\left(1 - x^2 + o(x^2)\right) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{2}x^6 + o(x^6)\ .$$

Quindi il polinomio cercato sarà $P_6(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{6}x^6$.

Esercizio 3

Osserviamo che $f(x)$ va studiata in un intorno di $x = 0$ e in un intorno di $x = 1$. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per $\sin x$, si ottiene che in un intorno di $x = 0$

$$f(x) \sim \frac{1}{x^\alpha |\log x|}$$

che è impropriamente integrabile per $\alpha < 1$.

Utilizzando, invece, lo svipluppo di Mc Laurin al primo ordine per $\log(1+t)$ con $t = x-1$, si ottiene che in un intorno di $x = 1$

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{2}}{(\sin 1)^\alpha} \frac{\sqrt{1-x}}{|x-1|} = \frac{\sqrt{2}}{(\sin 1)^\alpha} \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

che è impropriamente integrabile. Quindi l'integrale proposto esiste finito per $\alpha < 1$.

Esercizio 4

Osservando che, per ogni $\alpha \in I\!R$, f_α è differenziabile in P_0 e ricordando che vale la formula

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial v}(P_0) = \frac{\partial f_\alpha}{\partial x}(P_0) v_1 + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y}(P_0) v_2$$

ove $v = (v_1, v_2)$, si ottiene

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial v}(\sqrt{\pi}, 0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha^2 - \alpha) = -6\sqrt{3}$$

che ha come soluzioni $\alpha = -3,\ 4$.

SOLUZIONI COMPITO D

Esercizio 1

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{2x}{\sqrt{4x^2+2}}\right) & \text{se } x \geq 0; \\ -x\sqrt{2-x} & \text{se } x < 0; \end{cases} \quad f(x) > 0 \quad \forall x \in I\!R \setminus \{0\};$$

$f(0) = 0; \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0; \quad f$ è continua in $x = 0$;

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pi/4; \quad y = \pi/4$ è asintoto orizzontale a $+\infty$;

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty;$ non ci sono asintoti a $-\infty$;

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{4}{(8x^2+2)\sqrt{4x^2+2}} & \text{se } x > 0; \\ \frac{3x-4}{2\sqrt{2-x}} & \text{se } x < 0; \end{cases}$$

$f'(x) > 0 \quad \forall x > 0; \quad f'(x) < 0 \quad \forall x < 0;$

$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\sqrt{2}; \quad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \sqrt{2}; \quad x = 0$ è punto angoloso;

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{32x(12x^2+5)}{(8x^2+2)^2(4x^2+2)^{3/2}} & \text{se } x > 0; \\ \frac{8-3x}{4(2-x)^{3/2}} & \text{se } x < 0; \end{cases}$$

$f''(x) > 0 \quad \forall x < 0; \quad f''(x) < 0 \quad \forall x > 0.$

Esercizio 2

Ricordando che

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + o(x^{10})$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

si ottiene

$$(x^2 - \sin x^2)\log^2(1+x) = \left[\frac{x^6}{3!} - \frac{x^{10}}{5!} + o(x^{10})\right]\left(x^2 - x^3 + o(x^3)\right) = \frac{1}{3!}x^8 - \frac{1}{3!}x^9 + o(x^9)\ .$$

Quindi il polinomio cercato sarà $P_9(x) = \frac{1}{6}(x^8 - x^9)$.

Esercizio 3

Osserviamo che $f(x)$ va studiata in un intorno di $x = 0$ e in un intorno di $x = 1$. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per Sh x, si ottiene che in un intorno di $x = 0$

$$f(x) \sim \frac{x^\alpha}{|\log x|} = \frac{1}{x^{-\alpha}|\log x|}$$

che è impropriamente integrabile per $\alpha > -1$.

Utilizzando, invece, lo svipluppo di Mc Laurin al primo ordine per $\log(1+t)$ con $t = x - 1$, si ottiene che in un intorno di $x = 1$

$$f(x) \sim (\mathrm{Sh}\ 1)^{\alpha} \sqrt[3]{2} \frac{\sqrt[3]{1-x}}{|x-1|} = (\mathrm{Sh}\ 1)^{\alpha} \sqrt[3]{2} \frac{1}{(1-x)^{2/3}}$$

che è impropriamente integrabile. Quindi l'integrale proposto esiste finito per $\alpha > -1$.

Esercizio 4

Osservando che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, f_α è differenziabile in P_0 e ricordando che vale la formula

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial v}(P_0) = \frac{\partial f_\alpha}{\partial x}(P_0) v_1 + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y}(P_0) v_2$$

ove $v = (v_1, v_2)$, si ottiene

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial v}(\sqrt{\pi}, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha^2 - 1) = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

che ha come soluzioni $\alpha = \pm 2$.