SOLUZIONI COMPITO 26.04.06

Esercizio 1

a) Utilizzando il criterio di Hadamard, si ottiene

$$l = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{1+5^n}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{5^n}} = \frac{2}{5} \qquad \Longrightarrow \qquad R = \frac{5}{2}\,;$$

pertanto la serie converge assolutamente nell'intervallo determinato dalla condizione $|x+1| < 5/2$, ovvero per $x \in (-7/2, 3/2)$ e non converge in $(-\infty, -7/2) \cup (3/2, +\infty)$.

b) Studiando il comportamento della serie sul bordo dell'intervallo di convergenza, cioè per $x = -7/2$ e $x = 3/2$, si ottengono, rispettivamente, le due serie numeriche

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{1+5^n}(-7/2+1)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{1+5^n}(-5/2)^n \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{1+5^n}(3/2+1)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{1+5^n}(5/2)^n$$

che sono entrambe non convergenti, in quanto i rispettivi termini generali non sono infinitesimi. Quindi l'insieme massimale di convergenza semplice ed assoluta è l'intervallo aperto $(-7/2, 3/2)$.

Esercizio 2

Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione di Bernoulli che, tramite la sostituzione $z(x) = 1/y(x)$ (cioè $y(x) = 1/z(x)$, da cui $y'(x) = -z'(x)/z^2(x)$), si può riscrivere nella forma $z'(x) + xz(x) = -x^3$. In corrispondenza, la condizione iniziale si trasforma in $z(0) = 4$ e quindi il nuovo problema di Cauchy che si ottiene è

$$\begin{cases} z'(x) + xz(x) = -x^3 \\ z(0) = 4 \end{cases}$$

che è relativo ad un'equazione lineare del primo ordine non omogenea. Utilizzando la formula risolutiva, si ricava che l'integrale generale è dato da

$$z(x) = C\mathrm{e}^{-x^2/2} - x^2 + 2\,.$$

Imponendo la condizione iniziale, si ottiene $z(x) = 2\mathrm{e}^{-x^2/2} - x^2 + 2$, da cui

$$y(x) = \frac{1}{2\mathrm{e}^{-x^2/2} - x^2 + 2}\,.$$

Esercizio 3

Osserviamo innanzitutto che l'insieme T non è altro che la porzione della corona circolare compresa tra il cerchio di centro l'origine e raggio 1 ed il cerchio di centro l'origine e raggio $\sqrt{3}$, posta nel terzo e quarto quadrante. Effettuando un cambiamento in coordinate polari, si ottiene

$$\begin{aligned}
&\iint_T \frac{y}{1+x^2+y^2} \cdot \frac{1}{x^2+y^2}\, dx\, dy = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{r}{1+r^2} \cdot \frac{1}{r^2} \left(\int_\pi^{2\pi} \sin\theta\, d\theta \right) r\, dr \\
&= \left(\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+r^2}\, dr \right) \left(\int_\pi^{2\pi} \sin\theta\, d\theta \right) = \left(\arctan r \Big|_1^{\sqrt{3}} \right) \left(-\cos\theta \Big|_\pi^{2\pi} \right) \\
&= -2(\arctan\sqrt{3} - \arctan 1) = -2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = -2\,\frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{6}\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 4

a) La funzione proposta è definita nell'insieme $I_{def} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ z \neq 3i\}$. Poiché essa è ottenuta mediante composizione di funzioni olomorfe nel proprio insieme di definizione, è essa stessa una funzione olomorfa in I_{def}.

b) Osserviamo che f ha una singolarità polare in $z = 3i$ e ricordiamo che

$$\mathrm{Res}(f, z_0 = 3i) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to 3i} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z-3i)^n f(z)\right] ,$$

dove n è l'ordine del polo. Poiché si ottiene facilmente che $z = 3i$ è un polo del secondo ordine per f, dalla formula precedente si ricava

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f, z_0 = 3i) &= \lim_{z \to 3i} \frac{d}{dz} \left[(z-3i)^2 f(z)\right] = \lim_{z \to 3i} \frac{d}{dz} \left[(z-3i)^2 \frac{\cos z}{(z-3i)^2}\right] \\
&= \lim_{z \to 3i} \frac{d}{dz} [\cos z] = \lim_{z \to 3i} [-\sin z] = -\sin(3i) \,.
\end{aligned}$$