SOLUZIONI APPELLO STRAORDINARIO del 26/06/2018
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA + ENERGETICA
TEMA A

Esercizio 1

Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è a termini di segno qualsiasi; pertanto, cominciamo a studiarne la convergenza assoluta utilizzando, ad esempio, il criterio della radice. In tal caso otteniamo

$$\sqrt[n]{\frac{(4x^2)^n}{9^n \sqrt[3]{n+1}}} \sim \sqrt[n]{\frac{(4x^2)^n}{9^n}} = \frac{4x^2}{9}\,,$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $\sqrt[n]{\sqrt[3]{n+1}} \to 1$. Pertanto, la serie è assolutamente (e quindi anche semplicemente) convergente se $\frac{4x^2}{9} < 1$, ovvero per $-3/2 < x < 3/2$. La serie è, invece, assolutamente divergente per $x < -3/2$ e $x > 3/2$ e, come conseguenza del criterio della radice, si ottiene anche che il termine generale non è infinitesimo, per cui la serie non è neppure semplicemente convergente. Infine, per $x = \pm 3/2$, il criterio non fornisce alcuna informazione, ma sostituendo nel termine generale della serie otteniamo $a_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$, che non converge assolutamente per il confronto con la serie armonica generalizzata di esponente $p = 1/3 < 1$, ma converge semplicemente per il criterio di Leibniz, poiché è una serie a segno alterno, in cui la successione $\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$ è monotona decrescente, come si ottiene con semplici calcoli.

Esercizio 2

L'integrale proposto si può risolvere effettuando mediante un'integrazione per parti e il conseguente utilizzo delle formule parametriche $\cos x = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}$ a $\sin x = \frac{2\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}$. Infatti,

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x)\log(\sin x)\,dx &= -\cos x \log(\sin x)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{\sin x}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1-\sin^2 x}{\sin x}\,dx \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin x}\,dx - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\sin x}\,dx \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \int_{\tan(\pi/8)}^{1} \frac{1+t^2}{2t}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt + \cos x\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \log t\Big|_{\tan(\pi/8)}^{1} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \log(\tan(\pi/8)) - \frac{\sqrt{2}}{2}\,,
\end{aligned}$$

dove, nella quinta uguaglianza, abbiamo effettuato la sostituzione $t = \tan(x/2)$, da cui $t(\pi/2) = \tan(\pi/4) = 1$, $t(\pi/4) = \tan(\pi/8)$ e $dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$.

Esercizio 3

Osserviamo che il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea, la cui equazione caratteristica associata è data da $\lambda^2 - n^2 = 0$. Quest'ultima ha per soluzione $\lambda = \pm n$; pertanto, l'integrale generale dell'omogenea associata è dato da $y_{0n}(x) = C_1 e^{nx} + C_2 e^{-nx}$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, si ricava che una soluzione particolare è della forma $y_p(x) = Ax + B$, da cui $y_p'(x) = A$ e $y_p''(x) = 0$. Inserendo nell'equazione completa, otteniamo $-n^2 Ax - n^2 B = n^4 x$, da cui $A = -n^2$ e $B = 0$. Quindi, l'integrale generale dell'equazione proposta è $y_n(x) = C_1 e^{nx} + C_2 e^{-nx} - n^2 x$. Imponendo ora le condizioni iniziali, otteniamo

$$\begin{cases} 2n = y(0) = C_1 + C_2\,, \\ -n^2 = y'(0) = nC_1 - nC_2 - n^2\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad C_1 = C_2 = n\,.$$

Pertanto, la soluzione del problema di Cauchy proposto è $y_n(x) = n[e^{nx} + e^{-nx}] - n^2 x$. Conseguentemente, si ricava

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\, y_n(2/n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n[e^2 + e^{-2}] - 2n}{n} = e^2 + e^{-2} - 2\,.$$

Esercizio 4

Osserviamo che l'equazione proposta si può riscrivere nella forma $z^6 = 1/2 - \sqrt{3}i/2$ e, quindi, la sua risoluzione si riduce alla determinazione delle 6 radici seste di $1/2 - \sqrt{3}i/2 = \mathrm{e}^{-i\pi/3}$. Pertanto, otteniamo

$$z = \sqrt[6]{\mathrm{e}^{-i\pi/3}} = \{\mathrm{e}^{-\frac{i\pi}{18}}, \quad \mathrm{e}^{\frac{5\pi i}{18}}, \quad \mathrm{e}^{\frac{11\pi i}{18}}, \quad \mathrm{e}^{\frac{17\pi i}{18}}, \quad \mathrm{e}^{\frac{23\pi i}{18}}, \quad \mathrm{e}^{\frac{29\pi i}{18}}\}.$$

Esercizio 5

1) Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.
2) Ponendo $f(x) = \mathrm{e}^x$, dal Teorema di Lagrange si ricava subito che, per ogni $x \in (0, 2)$, esiste un punto $\xi \in (0, x)$ tale che

$$f(x) - f(0) = f'(\xi)(x - 0)\,, \quad \text{ovvero} \quad \mathrm{e}^x - 1 = \mathrm{e}^\xi x \leq \mathrm{e}^2 x < 9x\,,$$

dove abbiamo tenuto conto che l'esponenziale naturale è crescente (quindi $\mathrm{e}^\xi \leq \mathrm{e}^2$, dato che $\xi < x < 2$), che $\mathrm{e}^2 < 9$ e che $x \in (0, 2]$, quindi è positivo.

TEMA B

Esercizio 1

Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è a termini di segno qualsiasi; pertanto, cominciamo a studiarne la convergenza assoluta utilizzando, ad esempio, il criterio della radice. In tal caso otteniamo

$$\sqrt[n]{\frac{4^n}{(9x^2)^n \sqrt[4]{n+2}}} \sim \sqrt[n]{\frac{4^n}{(9x^2)^n}} = \frac{4}{9x^2},$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $\sqrt[n]{\sqrt[4]{n+2}} \to 1$. Pertanto, la serie è assolutamente (e quindi anche semplicemente) convergente se $\frac{4}{9x^2} < 1$, ovvero per $x < -2/3$ oppure $x > 2/3$. La serie è, invece, assolutamente divergente per $-2/3 < x < 2/3$, $x \neq 0$, e, come conseguenza del criterio della radice, si ottiene anche che il termine generale non è infinitesimo, per cui la serie non è neppure semplicemente convergente. Infine, per $x = \pm 2/3$, il criterio non fornisce alcuna informazione, ma sostituendo nel termine generale della serie otteniamo $a_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt[4]{n+2}}$, che non converge assolutamente per il confronto con la serie armonica generalizzata di esponente $p = 1/4 < 1$, ma converge semplicemente per il criterio di Leibniz, poiché è una serie a segno alterno, in cui la successione $\frac{1}{\sqrt[4]{n+2}}$ è monotona decrescente, come si ottiene con semplici calcoli.

Esercizio 2

L'integrale proposto si può risolvere effettuando mediante un'integrazione per parti e il conseguente utilizzo delle formule parametriche $\cos x = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}$ a $\sin x = \frac{2\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}$.. Infatti,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} (\cos x)\log(\cos x)\,dx &= \sin x \log(\cos x)\Big|_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 x}{\cos x}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos^2 x}{\cos x}\,dx \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos x}\,dx - \int_0^{\pi/4} \frac{\cos^2 x}{\cos x}\,dx \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \int_0^{\tan(\pi/8)} \frac{1+t^2}{1-t^2}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt - \sin x\Big|_0^{\pi/4} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + [\log(1+t) - \log(1-t)]\Big|_0^{\tan(\pi/8)} - \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \log[1+\tan(\pi/8)] - \log[1-\tan(\pi/8)] - \frac{\sqrt{2}}{2},
\end{aligned}$$

dove, nella quinta uguaglianza, abbiamo effettuato la sostituzione $t = \tan(x/2)$, da cui $t(0) = \tan(0) = 0$, $t(\pi/4) = \tan(\pi/8)$ e $dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$.

Esercizio 3

Osserviamo che il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea, la cui equazione caratteristica associata è data da $\lambda^2 - 1/n^2 = 0$. Quest'ultima ha per soluzione $\lambda = \pm 1/n$; pertanto, l'integrale generale dell'omogenea associata è dato da $y_{0n}(x) = C_1 e^{x/n} + C_2 e^{-x/n}$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, si ricava che una soluzione particolare è della forma $y_p(x) = Ax + B$, da cui $y_p'(x) = A$ e $y_p''(x) = 0$. Inserendo nell'equazione completa, otteniamo $-(1/n^2)Ax - (1/n^2)B = x/n$, da cui $A = -n$ e $B = 0$. Quindi, l'integrale generale dell'equazione proposta è $y_n(x) = C_1 e^{x/n} + C_2 e^{-x/n} - nx$. Imponendo ora le condizioni iniziali, otteniamo

$$\begin{cases} 2n^2 = y(0) = C_1 + C_2, \\ -n = y'(0) = (1/n)C_1 - (1/n)C_2 - n, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad C_1 = C_2 = n^2.$$

Pertanto, la soluzione del problema di Cauchy proposto è $y_n(x) = n^2[e^{x/n} + e^{-x/n}] - nx$. Conseguentemente, si ricava

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\, y_n(3n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2[e^3 + e^{-3}] - 3n^2}{n^2} = e^3 + e^{-3} - 3.$$

Esercizio 4

Osserviamo che l'equazione proposta si può riscrivere nella forma $z^4 = \sqrt{3}/2+i/2$ e, quindi, la sua risoluzione si riduce alla determinazione delle 4 radici quarte di $\sqrt{3}/2 + i/2 = \mathrm{e}^{i\pi/6}$. Pertanto, otteniamo

$$z = \sqrt[4]{\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{6}}} = \{\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{24}}, \quad \mathrm{e}^{\frac{13\pi i}{24}}, \quad \mathrm{e}^{\frac{25\pi i}{24}}, \quad \mathrm{e}^{\frac{37\pi i}{24}}\}.$$

Esercizio 5

1) Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.
2) Ponendo $f(x) = \mathrm{e}^x$, dal Teorema di Lagrange si ricava subito che, per ogni $x \in (0, 2)$, esiste un punto $\xi \in (0, x)$ tale che

$$f(x) - f(0) = f'(\xi)(x - 0)\,, \quad \text{ovvero} \quad \mathrm{e}^x - 1 = \mathrm{e}^\xi x \leq \mathrm{e}^2 x < 9x\,,$$

dove abbiamo tenuto conto che l'esponenziale naturale è crescente (quindi $\mathrm{e}^\xi \leq \mathrm{e}^2$, dato che $\xi < x < 2$), che $\mathrm{e}^2 < 9$ e che $x \in (0, 2]$, quindi è positivo.