SOLUZIONI APPELLO STRAORDINARIO del 26/10/2018
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA + ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1

Ponendo $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$, possiamo riscrivere l'equazione nella forma $r^8\mathrm{e}^{8i\theta} = 128r$, ovvero otteniamo il sistema

$$\begin{cases} r^8 = 128r\,, \\ 8\theta = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\,, \end{cases} \implies \quad r = 0\,,\ \text{ovvero } z = 0, \text{ oppure } \begin{cases} r^7 = 128\,, \\ \theta = k\pi/4\,,\ k = 0, \dots, 7\,. \end{cases}$$

L'ultimo sistema fornisce le soluzioni

$$z = \begin{cases} 2\mathrm{e}^{i0} = 2[\cos 0 + i\sin 0] = 2\,, \\ 2\mathrm{e}^{i\pi/4} = 2[\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)] = \sqrt{2} + i\sqrt{2}\,, \\ 2\mathrm{e}^{i\pi/2} = 2[\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)] = 2i\,, \\ 2\mathrm{e}^{3i\pi/4} = 2[\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)] = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}\,, \\ 2\mathrm{e}^{i\pi} = 2[\cos(\pi) + i\sin(\pi)] = -2\,, \\ 2\mathrm{e}^{5i\pi/4} = 2[\cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4)] = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}\,, \\ 2\mathrm{e}^{3i\pi/2} = 2[\cos(3\pi/2) + i\sin(3\pi/2)] = -2i\,, \\ 2\mathrm{e}^{7i\pi/4} = 2[\cos(7\pi/4) + i\sin(7\pi/4)] = \sqrt{2} - i\sqrt{2}\,. \end{cases}$$

Esercizio 2

Osserviamo, innanzitutto, che per $\alpha = 0$ la funzione proposta si riduce alla funzione costantemente pari a $1/2$ e quindi l'integrale improprio non converge. Consideriamo, quindi, il caso $\alpha > 0$, dove

per $x \to 0^+$ si ha $f(x) = \frac{1}{x^\alpha(1+x^{3\alpha})} \sim \frac{1}{x^\alpha}$, che risulta impropriamente integrabile per $\alpha < 1$;

per $x \to +\infty$ si ha $f(x) = \frac{1}{x^{4\alpha}(x^{-3\alpha}+1)} \sim \frac{1}{x^{4\alpha}}$, che risulta impropriamente integrabile per $4\alpha > 1$.

Pertanto, l'integrale proposto converge per $1/4 < \alpha < 1$.

Esercizio 3

Osserviamo che l'equazione proposta è un'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea, la cui equazione caratteristica associata è data da $(\lambda - 1)^2 = 0$. Quest'ultima ha per soluzione $\lambda = 1$ con molteplicità 2; pertanto, l'integrale generale dell'omogenea associata è dato da $y_0(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2x\mathrm{e}^x$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, si ricava che una soluzione particolare è della forma $y_p(x) = Ax^2\mathrm{e}^x$, da cui $y_p'(x) = A\mathrm{e}^x(2x + x^2)$ e $y_p''(x) = A\mathrm{e}^x(x^2 + 4x + 2)$. Inserendo nell'equazione completa, otteniamo

$$A\mathrm{e}^x(x^2 + 4x + 2) - 2A\mathrm{e}^x(2x + x^2) + A\mathrm{e}^x(x^2) = 2\mathrm{e}^x \quad \implies \quad 2A = 2 \quad \implies \quad A = 1\,.$$

Quindi l'integrale generale dell'equazione proposta è $y(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x$.

Esercizio 4

Osserviamo che possiamo riscrivere

$$f(x) = \sin(2x) = \sin[2(x - \pi/4) + \pi/2] = \cos[2(x - \pi/4)]\,.$$

A questo punto, ponendo $t = 2x - \pi/2$ ed utilizzando lo sviluppo all'ordine 9 della funzione $t \mapsto \cos t$, otteniamo

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \frac{(2x - \pi/2)^2}{2} + \frac{(2x - \pi/2)^4}{4!} - \frac{(2x - \pi/2)^6}{6!} + \frac{(2x - \pi/2)^8}{8!} + o\big((2x - \pi/2)^9\big) \\ &= 1 - 2(x - \pi/4)^2 + \frac{2(x - \pi/4)^4}{3} - \frac{4(x - \pi/4)^6}{45} + \frac{2(x - \pi/4)^8}{315} + o\big((x - \pi/4)^9\big)\,. \end{aligned}$$

Esercizio 5

1) La derivabilità è una proprietà di regolarità più forte della continuità; infatti, ogni funzione derivabile in un punto è ivi continua, mentre non vale il viceversa. Ad esempio, $f(x) = |x|$ è una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$, ma non è derivabile nell'origine, dove presenta un punto angoloso. Invece, la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 0$ per $x \leq 0$ e $f(x) = 1$ per $x > 1$, avendo un salto in $x = 0$, non è ivi continua e, pertanto, neppure derivabile.
2) Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.
3) L'affermazione a) è falsa; infatti basta considerare la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 0$, per $x \neq 1$ e $f(1) = 1$. Allora, tenendo conto che, per $x \to 0$, $x \neq 0$, $\cos x < 1$, si ricava $\lim_{x\to 0} f(\cos x) = 0 \neq 1 = f(1)$.
   L'affermazione b) è vera, poiché $\sin x \to 0$, per $x \to 0$, ed inoltre, se f è derivabile in $x = 0$, è ivi continua.
   L'affermazione c) è falsa; infatti, come in a), basta considerare la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 0$, per $x \neq 2$ e $f(2) = 1$. Allora, prendendo $a_n \to 2$, per $n \to +\infty$, con $a_n \neq 2$, si ricava $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = 0 \neq 1 = f(2)$.

TEMA B

Esercizio 1

Ponendo $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$, possiamo riscrivere l'equazione nella forma $r^6\mathrm{e}^{6i\theta} = \frac{1}{32}r$, ovvero otteniamo il sistema

$$\begin{cases} r^6 = \dfrac{1}{32}r\,, \\ 6\theta = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad r = 0\,,\ \text{ovvero } z = 0,\ \text{oppure } \begin{cases} r^5 = \dfrac{1}{32}\,, \\ \theta = k\pi/3\,,\ k = 0, \dots, 5\,. \end{cases}$$

L'ultimo sistema fornisce le soluzioni

$$z = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{i0} = \dfrac{1}{2}[\cos 0 + i \sin 0] = \dfrac{1}{2}\,, \\ \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{i\pi/3} = \dfrac{1}{2}[\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)] = \dfrac{1}{4} + i\dfrac{\sqrt{3}}{4}\,, \\ \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2i\pi/3} = \dfrac{1}{2}[\cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)] = -\dfrac{1}{4} + i\dfrac{\sqrt{3}}{4}\,, \\ \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{i\pi} = \dfrac{1}{2}[\cos(\pi) + i\sin(\pi)] = -\dfrac{1}{2}\,, \\ 2\mathrm{e}^{4i\pi/3} = 2[\cos(4\pi/3) + i\sin(4\pi/3)] = -\dfrac{1}{4} - i\dfrac{\sqrt{3}}{4}\,, \\ 2\mathrm{e}^{5i\pi/3} = 2[\cos(5\pi/3) + i\sin(5\pi/3)] = \dfrac{1}{4} - i\dfrac{\sqrt{3}}{4}\,. \end{cases}$$

Esercizio 2

Osserviamo, innanzitutto, che per $\alpha = 0$ la funzione proposta si riduce alla funzione costantemente pari a $1/2$ e quindi l'integrale improprio non converge. Consideriamo, quindi, il caso $\alpha > 0$, dove

per $x \to 0^+$ si ha $f(x) = \frac{1}{x^{2\alpha}(1+x^\alpha)} \sim \frac{1}{x^{2\alpha}}$, che risulta impropriamente integrabile per $2\alpha < 1$;

per $x \to +\infty$ si ha $f(x) = \frac{1}{x^{3\alpha}(x^{-\alpha}+1)} \sim \frac{1}{x^{3\alpha}}$, che risulta impropriamente integrabile per $3\alpha > 1$.

Pertanto, l'integrale proposto converge per $1/3 < \alpha < 1/2$.

Esercizio 3

Osserviamo che l'equazione proposta è un'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea, la cui equazione caratteristica associata è data da $(\lambda+1)^2 = 0$. Quest'ultima ha per soluzione $\lambda = -1$ con molteplicità 2; pertanto, l'integrale generale dell'omogenea associata è dato da $y_0(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2x\mathrm{e}^{-x}$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, si ricava che una soluzione particolare è della forma $y_p(x) = Ax^2\mathrm{e}^{-x}$, da cui $y_p'(x) = A\mathrm{e}^{-x}(2x - x^2)$ e $y_p''(x) = A\mathrm{e}^{-x}(x^2 - 4x + 2)$. Inserendo nell'equazione completa, otteniamo

$$A\mathrm{e}^{-x}(x^2 - 4x + 2) + 2A\mathrm{e}^{-x}(2x - x^2) + A\mathrm{e}^{-x}(x^2) = 4\mathrm{e}^{-x} \qquad \Longrightarrow \qquad 2A = 4 \qquad \Longrightarrow \qquad A = 2\,.$$

Quindi l'integrale generale dell'equazione proposta è $y(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2x\mathrm{e}^{-x} + 2x^2\mathrm{e}^{-x}$.

Esercizio 4

Osserviamo che possiamo riscrivere

$$f(x) = \cos(2x) = \cos[2(x - \pi/2) + \pi] = -\cos[2(x - \pi/2)]\,.$$

A questo punto, ponendo $t = 2x - \pi$ ed utilizzando lo sviluppo all'ordine 9 della funzione $t \mapsto \cos t$, otteniamo

$$\begin{aligned} f(x) &= -1 + \frac{(2x-\pi)^2}{2} - \frac{(2x-\pi)^4}{4!} + \frac{(2x-\pi)^6}{6!} - \frac{(2x-\pi)^8}{8!} + o\big((2x-\pi)^9\big) \\ &= -1 + 2(x-\pi/2)^2 - \frac{2(x-\pi/2)^4}{3} + \frac{4(x-\pi/2)^6}{45} - \frac{2(x-\pi/2)^8}{315} + o\big((x-\pi/2)^9\big)\,. \end{aligned}$$

Esercizio 5

1) La derivabilità è una proprietà di regolarità più forte della continuità; infatti, ogni funzione derivabile in un punto è ivi continua, mentre non vale il viceversa. Ad esempio, $f(x) = |x|$ è una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$, ma non è derivabile nell'origine, dove presenta un punto angoloso. Invece, la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 0$ per $x \leq 0$ e $f(x) = 1$ per $x > 1$, avendo un salto in $x = 0$, non è ivi continua e, pertanto, neppure derivabile.
2) Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.
3) L'affermazione a) è falsa; infatti basta considerare la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 0$, per $x \neq 1$ e $f(1) = 1$. Allora, tenendo conto che, per $x \to 0$, $x \neq 0$, $\cos x < 1$, si ricava $\lim_{x\to 0} f(\cos x) = 0 \neq 1 = f(1)$.
   L'affermazione b) è vera, poiché $\sin x \to 0$, per $x \to 0$, ed inoltre, se f è derivabile in $x = 0$, è ivi continua.
   L'affermazione c) è falsa; infatti, come in a), basta considerare la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 0$, per $x \neq 2$ e $f(2) = 1$. Allora, prendendo $a_n \to 2$, per $n \to +\infty$, con $a_n \neq 2$, si ricava $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = 0 \neq 1 = f(2)$.