SOLUZIONI APPELLO STRAORDINARIO del 27/03/2015
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA - ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1

Ponendo $z = a + ib$ l'equazione si può riscrivere nella forma $e^{3a} = 2e^a(\cos b + i\sin b) = 2e^a\, e^{ib}$, da cui si ricava

$$\begin{cases} e^{3a} = 2e^a\,, \\ b = 0 + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} e^{2a} = 2\,, \\ b = 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

Pertanto, l'equazione proposta ha infinite soluzioni della forma $z_k = \log\sqrt{2} + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 2

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine per la funzione $x \mapsto \sin x$, con $x = 3/(n^2+1)$, e quello al primo ordine per la funzione $x \mapsto \log(1+x)$, con $x = 3/(n^2+2n-3)$, otteniamo

$$\frac{\sin\left(\frac{3}{n^2+1}\right) - \frac{\alpha^2-1}{n^2+1}}{\log\left(1+\frac{3}{n^2+2n-3}\right)} \sim \frac{\frac{3}{n^2+1} - \frac{1}{3!}\left(\frac{3}{n^2+1}\right)^3 - \frac{\alpha^2-1}{n^2+1}}{\frac{3}{n^2+2n-3}} \sim \begin{cases} \frac{4-\alpha^2}{n^2}\,\frac{n^2}{3} = \frac{4-\alpha^2}{3} & \text{se } \alpha^2 - 1 \neq 3 \iff \alpha \neq \pm 2, \\ -\frac{9}{2n^6}\,\frac{n^2}{3} = -\frac{3}{2n^4} & \text{se } \alpha^2 - 1 = 3 \iff \alpha = \pm 2. \end{cases}$$

Pertanto, da quanto scritto sopra otteniamo innanzitutto che la serie è a termini di segno fissato, in dipendenza da α; inoltre, per $\alpha \neq \pm 2$ la serie diverge in quanto il termine generale non è infinitesimo (cioè non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza), mentre per $\alpha = \pm 2$ la serie converge per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente $4 > 1$.

Esercizio 3

Effettuando la sostituzione $t = x^2$, da cui $\frac{1}{2}\,dt = x\,dx$, $t(0) = 0$, $t(1) = 1$, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{4+5x^2}}\,dx &= \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4+5x^2}}\,x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{4+5t}}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{2t\sqrt{4+5t}}{5}\Big|_0^1 - \frac{2}{5}\int_0^1 \sqrt{4+5t}\,dt\right] = \frac{3}{5} - \frac{2}{75}\sqrt{(4+5t)^3}\Big|_0^1 \\ &= \frac{3}{5} - \frac{2}{75}(27-8) = \frac{7}{75}\,, \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato anche l'integrazione per parti.

Esercizio 4

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica associata è $3\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = 1; 2/3$. Quindi, l'integrale generale dell'equazione omogenea è $y_0(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x/3}$. Inoltre, dal metodo di somiglianza e dal metodo di sovrapposizione, otteniamo che una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = y_p^1(x) + y_p^2(x)$, dove $y_p^1(x) = Axe^x$, da cui $(y_p^1)'(x) = Ae^x(x+1)$ e $(y_p^1)''(x) = Ae^x(x+2)$, mentre $y_p^2(x) = e^x(B\cos x + D\sin x)$, da cui $(y_p^2)'(x) = e^x[(D+B)\cos x + (D-B)\sin x]$ e $(y_p^2)''(x) = e^x(2D\cos x - 2B\sin x)$. Inserendo nell'equazione completa, si ricava

$$\begin{cases} 3Ae^x(x+2) - 5Ae^x(x+1) + 2Axe^x = e^x\,, \\ 3e^x(2D\cos x - 2B\sin x) - 5e^x[(D+B)\cos x + (D-B)\sin x +] + 2e^x(B\cos x + D\sin x) = -10e^x\sin x\,, \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \qquad \begin{cases} A = 1\,, \\ B = 1\,,\ D = 3\,. \end{cases}$$

Quindi, l'integrale generale dell'equazione proposta sarà $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x/3} + xe^x + e^x(\cos x + 3\sin x)$. Imponendo ora le condizioni iniziali, otteniamo

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 + 1\,, \\ 3 = C_1 + \dfrac{2}{3}C_2 + 1 + 1 + 3\,, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C_1 = -C_2\,, \\ \dfrac{1}{3}C_2 = 2\,, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C_1 = -6\,, \\ C_2 = 6\,. \end{cases}$$

Pertanto la soluzione del problema di Cauchy sarà $y(x) = -6e^x + 6e^{2x/3} + xe^x + e^x(\cos x + 3\sin x)$.

Esercizio 5

L'affermazione A) è falsa, basta prendere una funzione discontinua in $x = 2$, ad esempio $f(x) = 0$ per $x \leq 2$ e $f(x) = 1$ per $x > 2$ e scegliere $a_n = 2 + 1/n \to 2^+$. In tal caso si ottiene $f(a_n) = f(2 + 1/n) = 1 \not\to 0 = f(2)$.
L'affermazione B) è vera, infatti se f è derivabile in $x = 0$, in particolare essa sarà anche continua in $x = 0$ e, quindi, per definizione per ogni successione $a_n \to 0$ si avrà $f(a_n) \to f(0)$.
L'affermazione C) è falsa, infatti se f è continua in $x = 0$ non è detto che lo debba essere anche in $x = 2$. Per esempio, prendendo la funzione del punto A) e scegliendo $a_n = 1/n \to 0$, otteniamo, come nel punto A), che $f(2 + a_n) = f(2 + 1/n) = 1 \not\to 0 = f(2)$. Tuttavia è evidente che f, essendo costante in un intorno di $x = 0$, è ivi anche continua.
L'affermazione D) è vera, infatti se esiste $f'(2) = 0$, avremo che, per definizione,

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = o(1) \quad \text{per } x \to 2.$$

L'affermazione si ottiene, quindi, scegliendo $x = a_n \to 2$.

TEMA B

Ponendo $z = a + ib$ l'equazione si può riscrivere nella forma $e^{3b} = 2e^{-b}(\cos a + i \sin a) = 2e^{-b} e^{ia}$, da cui si ricava

$$\begin{cases} e^{3b} = 2e^{-b}\,, \\ a = 0 + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} e^{4b} = 2\,, \\ a = 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

Pertanto, l'equazione proposta ha infinite soluzioni della forma $z_k = 2k\pi + i \log \sqrt[4]{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 2

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine per la funzione $x \mapsto \sin x$, con $x = 5/(n^2-1)$, e quello al primo ordine per la funzione $x \mapsto \log(1+x)$, con $x = -25/(n^2-2n+5)$, otteniamo

$$\frac{\sin\left(\frac{5}{n^2-1}\right) - \frac{\alpha^2-4}{n^2-1}}{\log\left(1 - \frac{25}{n^2-2n+5}\right)} \sim \frac{\frac{5}{n^2-1} - \frac{1}{3!}\left(\frac{5}{n^2-1}\right)^3 - \frac{\alpha^2-4}{n^2-1}}{-\frac{25}{n^2-2n+5}} \sim \begin{cases} -\frac{9-\alpha^2}{n^2}\,\frac{n^2}{25} = \frac{\alpha^2-9}{25} & \text{se } \alpha^2 - 4 \neq 5 \iff \alpha \neq \pm 3, \\ \frac{125}{6n^6}\,\frac{n^2}{25} = \frac{5}{6n^4} & \text{se } \alpha^2 - 4 = 5 \iff \alpha = \pm 3. \end{cases}$$

Pertanto, da quanto scritto sopra otteniamo innanzitutto che la serie è a termini di segno fissato, in dipendenza da α; inoltre, per $\alpha \neq \pm 3$ la serie diverge in quanto il termine generale non è infinitesimo (cioè non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza), mentre per $\alpha = \pm 3$ la serie converge per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente $4 > 1$.

Esercizio 3

Effettuando la sostituzione $t = x^3$, da cui $\frac{1}{3}\,dt = x^2\,dx$, $t(0) = 0$, $t(1) = 1$, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^5}{\sqrt{1+3x^3}}\,dx &= \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+3x^3}}\,x^2\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+3t}}\,dt \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{2t\sqrt{1+3t}}{3}\Big|_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 \sqrt{1+3t}\,dt\right] = \frac{4}{9} - \frac{4}{81}\sqrt{(1+3t)^3}\Big|_0^1 \\ &= \frac{4}{9} - \frac{4}{81}(8-1) = \frac{8}{81}\,, \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato anche l'integrazione per parti.

Esercizio 4

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica associata è $3\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = 2; 2/3$. Quindi, l'integrale generale dell'equazione omogenea è $y_0(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{2x/3}$. Inoltre, dal metodo di somiglianza e dal metodo di sovrapposizione, otteniamo che una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = y_p^1(x) + y_p^2(x)$, dove $y_p^1(x) = Axe^{2x}$, da cui $(y_p^1)'(x) = Ae^{2x}(2x+1)$ e $(y_p^1)''(x) = Ae^{2x}(4x+4)$, mentre $y_p^2(x) = e^{2x}(B\cos x + D\sin x)$, da cui $(y_p^2)'(x) = e^{2x}[(D+2B)\cos x + (2D-B)\sin x]$ e $(y_p^2)''(x) = e^{2x}[(3B+4D)\cos x + (3D-4B)\sin x]$. Inserendo nell'equazione completa, si ricava

$$\begin{cases} 3Ae^{2x}(4x+4) - 8Ae^{2x}(2x+1) + 4Axe^{2x} = 4e^{2x}\,, \\ 3e^{2x}[(3B+4D)\cos x + (3D-4B)\sin x] - 8e^{2x}[(D+2B)\cos x + (2D-B)\sin x] \\ \qquad + 4e^{2x}(B\cos x + D\sin x) = -25e^{2x}\sin x\,, \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \qquad \begin{cases} A = 1\,, \\ B = 4\,,\ D = 3\,. \end{cases}$$

Quindi, l'integrale generale dell'equazione proposta sarà $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{2x/3} + xe^{2x} + e^{2x}(4\cos x + 3\sin x)$. Imponendo ora le condizioni iniziali, otteniamo

$$\begin{cases} 4 = C_1 + C_2 + 4\,, \\ 0 = 2C_1 + \frac{2}{3}C_2 + 1 + 8 + 3\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} C_1 = -C_2\,, \\ \frac{4}{3}C_2 = 12\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} C_1 = -9\,, \\ C_2 = 9\,. \end{cases}$$

Pertanto la soluzione del problema di Cauchy sarà $y(x) = -9e^{2x} + 9e^{2x/3} + xe^{2x} + e^{2x}(4\cos x + 3\sin x)$.

Esercizio 5

L'affermazione A) è falsa, basta prendere una funzione discontinua in $x = 0$, ad esempio $f(x) = 0$ per $x \leq 0$ e $f(x) = 1$ per $x > 0$ e scegliere $a_n = 1/n \to 0^+$. In tal caso si ottiene $f(a_n) = f(1/n) = 1 \not\to 0 = f(0)$.
L'affermazione B) è vera, infatti se f è derivabile in $x = 3$, in particolare essa sarà anche continua in $x = 3$ e, quindi, per definizione per ogni successione $a_n \to 3$ si avrà $f(a_n) \to f(3)$.
L'affermazione C) è falsa, infatti se f è continua in $x = 3$ non è detto che lo debba essere anche in $x = 0$. Per esempio, prendendo la funzione del punto A) e scegliendo $a_n = 3 - 1/n \to 3^-$ (ovvero $3 - a_n = 3 - (3 - 1/n) = 1/n \to 0^+$), otteniamo, come nel punto A), che $f(3 - a_n) = f(1/n) = 1 \not\to 0 = f(0)$. Tuttavia è evidente che f, essendo costante in un intorno di $x = 3$, è ivi anche continua.
L'affermazione D) è vera, infatti se esiste $f'(3) = 0$, avremo che, per definizione,

$$\lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = f'(3) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = o(1) \quad \text{per } x \to 3.$$

L'affermazione si ottiene, quindi, scegliendo $x = a_n \to 3$.