ANALISI I (h. 2.30) Appello del **27 aprile 2020**	**TEMA** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea in Ingegneria Meccanica ☐ Corso di laurea in Ingegneria Energetica ☐

VALUTAZIONE

1. Determinare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$|\overline{z}| - 2Im(z+2) + 3i\, Im(z-3) Re(\overline{z}+2i) = 4\,.$$

Calcolare la somma delle parti reali di tutte le soluzioni trovate.

---

2. Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il seguente

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\sqrt{1+\frac{4}{n}} - \frac{\alpha^2-1}{n} - \cos\frac{1}{n} \right] (n^2-2n)\,.$$

---

3. Determinare, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + 3y(x) = 4x^2 + 3x\,, \\ y(0) = 1/9\,, \\ y'(0) = 11/3\,. \end{cases}$$

Calcolare, inoltre, il seguente

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x) + xr(x)}{x}\,,$$

dove $r(x)$ è l'equazione della retta tangente nell'origine alla funzione $f(x) = 2x^2 - e^{4x/3} + 1$.

---

4. Calcolare

$$\int_{-1}^{e^2-2} \sqrt{x+2}\, \log(\sqrt{x+2})\, dx\,.$$

5.

1. Enunciare e dimostrare il Teorema di Torricelli (detto anche Secondo Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale, come in Bramanti-Pagani-Salsa).
2. **Facoltativo.** Sia $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ tale che $x^3 f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Determinare il segno della funzione f e della funzione $x \mapsto \int_0^x (2-\sin t) f(t)\, dt$. Dimostrare, infine, che la funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) = x^2 \int_0^x (2-\sin t) f(t)\, dt$$

ha un unico punto di minimo assoluto in $x = 0$.