SOLUZIONI APPELLO STRAORDINARIO del 27/10/2014
ANALISI MATEMATICA I - 10 CFU
ENERGETICA

Esercizio 1
Innanzitutto, osserviamo che

$$\lim_{x\to+\infty} e^{2x}(x^2-2) = \lim_{x\to+\infty} e^{2x}x^2 = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty} e^{2x}(x^2-2) = \lim_{x\to-\infty} e^{2x}x^2 = 0^+ .$$

Derivando la funzione assegnata, otteniamo $f'(x) = e^{2x}(2x^2 - 4 + 2x)$, che risulta essere positiva per $x < -2$ e $x > 1$, negativa per $-2 < x < 1$ e nulla in $x = -2; 1$. Pertanto, $x = -2$ è punto di massimo relativo e $x = 1$ è punto di minimo relativo. Poiché f è superiormente illimitata per $x \to +\infty$, essa non ammette punti di massimo assoluto mentre, poiché $f(1) = -e^2$ e la funzione ha asintoto orizzontale $y = 0$ per $x \to -\infty$, $x = 1$ è punto di minimo assoluto.

Esercizio 2
Ponendo $a_n := \left[\cos\frac{2}{n} - 1 + \frac{2}{n^2}\right] n^{3/2}$ ed utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al quarto ordine per la funzione $x \mapsto \cos x$, con $x = 2/n$, otteniamo

$$a_n \sim \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{2}{n}\right)^4 - 1 + \frac{2}{n^2}\right] n^{3/2} \sim \frac{2}{3n^4} n^{3/2} = \frac{2}{3n^{5/2}} .$$

Pertanto, essendo $5/2 > 1$, la serie converge, per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente > 1.

Esercizio 3
Effettuando la sostituzione $\cos x = t$, da cui $\sin x\, dx = -dt$, $t(0) = 1$ e $t(\pi) = -1$, otteniamo

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{(\cos x)(\sin x)}{2+\cos x}\, dx &= -\int_1^{-1} \frac{t}{2+t}\, dt = \int_{-1}^{1} \frac{t+2-2}{2+t}\, dt \\ &= \int_{-1}^{1} \left[1 - \frac{2}{2+t}\right] dt = \left[t - 2\log(2+t)\right]\Big|_{-1}^{1} = 2 - 2\log 3 .\end{aligned}$$

Esercizio 4
Osserviamo che l'equazione proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica è $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, cha ha per soluzioni $\lambda = 1; -2$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y_o(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$. Inoltre, per il metodo di somiglianza, la soluzione particolare $y_p(x)$ sarà della forma $y_p(x) = Axe^x$. Derivando due volte ed inserendo nell'equazione completa, otteniamo

$$2Ae^x + Axe^x + Ae^x + Axe^x - 2Axe^x = 3e^x \qquad \Longrightarrow \qquad A = 1 .$$

Pertanto, la soluzione dell'equazione completa sarà $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + xe^x$.

Esercizio 5
L'unica affermazione corretta è la B), in quanto $a_n/b_n \to +\infty$, cioè non soddisfa la condizione necessaria per la convergenza e quindi la serie, essendo a termini positivi, diverge.
Prendendo $a_n = n$ e $b_n = 1/n$, si ottiene che $a_n b_n = 1$, per cui la A) e la C) risultano false in quanto non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza. Infine, prendendo $a_n = n^3$ e $b_n = 1/n$, si ottiene che $a_n b_n = n^2$ e quindi la serie in D) converge, per confronto con la serie armonica generalizzata di esponente $2 > 1$.