

SOLUZIONI APPELLO STRAORDINARIO del 31/03/2014
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA - ENERGETICA

Esercizio 1

Poiché la funzione proposta è di classe $C^\infty([0, \pi/3])$, per studiarne la monotonia e gli estremanti relativi procediamo calcolandone la derivata prima. Otteniamo in tal modo

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}(1 + \tan^2 x) - 2 \tan x(1 + \tan^2 x) = 2(1 + \tan^2 x) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \tan x \right)$$

$$\implies \begin{cases} f'(x) > 0 & \text{se } \tan x < 1/\sqrt{3} \iff 0 \leq x < \pi/6, \\ f'(x) < 0 & \text{se } \tan x > 1/\sqrt{3} \iff \pi/6 < x \leq \pi/3, \\ f'(x) = 0 & \text{se } \tan x = 1/\sqrt{3} \iff x = \pi/6. \end{cases}$$

Pertanto, $x_{1,2} = 0; \pi/3$ sono punti di minimo relativo, mentre $x_3 = \pi/6$ è l'unico punto di massimo relativo. Poiché la funzione proposta è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[0, \pi/3]$, per il Teorema di Weierstrass, essa assume anche massimo e minimo assoluto; pertanto, $x_3 = \pi/6$ è il punto di massimo assoluto, mentre, valutando $f(x_1) = 0$ ed $f(x_2) = \frac{2}{\sqrt{3}} \tan(\pi/3) - \tan^2(\pi/3) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{3} - (\sqrt{3})^2 = -1$, ricaviamo che $x_2 = \pi/3$ è il punto di minimo assoluto.

Esercizio 2

Innanzitutto, osserviamo che $\log(1 + x^2 + |x|) \geq 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi si tratta di una serie a termini non negativi. Applicando il criterio della radice e ricordando che $\sqrt[n]{n^{3/2}} = (\sqrt[n]{n})^{3/2} \rightarrow 1$, otteniamo

$$\sqrt[n]{\frac{[\log(1 + x^2 + |x|)]^n}{n^{3/2}}} \sim \sqrt[n]{[\log(1 + x^2 + |x|)]^n} = \log(1 + x^2 + |x|).$$

Pertanto, per $\log(1 + x^2 + |x|) < 1$ la serie converge, per $\log(1 + x^2 + |x|) > 1$ la serie diverge, mentre per $\log(1 + x^2 + |x|) = 1$, il termine generale si riduce a $1/(n^{3/2})$, che fornisce una serie convergente.

Risolviendo, infine, rispetto ad x , otteniamo $\log(1 + x^2 + |x|) \leq 1$ se e solo se $1 + x^2 + |x| \leq e$; quindi risolvendo l'equazione associata e tenendo conto che $x^2 = |x|^2$, otteniamo

$$|x|^2 + |x| - (e - 1) = 0 \iff |x| = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4e - 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4e - 3}}{2}.$$

Poiché $|x| \geq 0$, ricaviamo

$$|x| \leq \frac{-1 + \sqrt{4e - 3}}{2} \iff \frac{1 - \sqrt{4e - 3}}{2} \leq x \leq \frac{-1 + \sqrt{4e - 3}}{2}.$$

Pertanto, la serie risulterà convergente per $\frac{1 - \sqrt{4e - 3}}{2} \leq x \leq \frac{-1 + \sqrt{4e - 3}}{2}$, mentre sarà divergente per $x < \frac{1 - \sqrt{4e - 3}}{2}$ e $x > \frac{-1 + \sqrt{4e - 3}}{2}$.

Esercizio 3

Innanzitutto, osserviamo che nell'intervallo di integrazione $x \geq 0$, quindi possiamo riscrivere l'integrale proposto nella forma

$$\int_0^{e^{\pi/2} - 1} \frac{\sin[\log(1 + x^2 + 2x)]}{1 + x} dx = \int_0^{e^{\pi/2} - 1} \frac{\sin[\log(1 + x)^2]}{1 + x} dx = \int_0^{e^{\pi/2} - 1} \frac{\sin[2 \log(1 + x)]}{1 + x} dx.$$

Effettuando, quindi, la sostituzione di variabile $t = \log(1 + x)$, da cui $dt = \frac{1}{1+x} dx$, $t(0) = \log 1 = 0$ e $t(e^{\pi/2} - 1) = \log(1 + e^{\pi/2} - 1) = \log(e^{\pi/2}) = \pi/2$, otteniamo

$$\int_0^{e^{\pi/2} - 1} \frac{\sin[2 \log(1 + x)]}{1 + x} dx = \int_0^{\pi/2} \sin(2t) dt = -\frac{\cos(2t)}{2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Esercizio 4

Osserviamo che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, l'equazione proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica è $\lambda^2 - 2\alpha\lambda = 0$, che ha per soluzioni $\lambda = 0; 2\alpha$. Pertanto, per $\alpha \neq 0$, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y_o(x) = C_1 + C_2e^{2\alpha x}$. Inoltre, per il metodo di somiglianza, la soluzione particolare $y_p(x)$ sarà della forma

$$\begin{aligned} y_p(x) &= Ae^{2x} && \text{se } \alpha \neq 1; \\ y_p(x) &= Axe^{2x} && \text{se } \alpha = 1. \end{aligned}$$

Derivando due volte ed inserendo nell'equazione completa, otteniamo, nel primo caso,

$$4Ae^{2x} - 4\alpha Ae^{2x} = 2e^{2x} \quad \implies \quad A = \frac{1}{2(1-\alpha)},$$

mentre nel secondo caso

$$4Ae^{2x} + 4Axe^{2x} - 2Ae^{2x} - 4Axe^{2x} = 2e^{2x} \quad \implies \quad A = 1.$$

Infine, per $\alpha = 0$ l'equazione si riduce a $y''(x) = 2e^{2x}$, da cui $y'(x) = e^{2x} + C_1$ e $y(x) = e^{2x}/2 + C_1x + C_2$. Pertanto, per $\alpha \in \mathbb{R}$, la soluzione dell'equazione completa sarà

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{e^{2x}}{2} + C_1x + C_2 && \text{se } \alpha = 0, \\ y(x) &= C_1 + C_2e^{2x} + xe^{2x} && \text{se } \alpha = 1, \\ y(x) &= C_1 + C_2e^{2\alpha x} + \frac{1}{2(1-\alpha)}e^{2x} && \text{se } \alpha \neq 0; 1. \end{aligned}$$

Imponendo, infine, le condizioni iniziali, ricaviamo

$$\begin{cases} 1/2 + C_2 = 0, \\ 1 + C_1 = 0, \end{cases} \quad \text{se } \alpha = 0; \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ 2C_2 + 1 = 0, \end{cases} \quad \text{se } \alpha = 1; \quad \begin{cases} C_1 + C_2 + \frac{1}{2(1-\alpha)} = 0, \\ 2\alpha C_2 + \frac{1}{(1-\alpha)} = 0, \end{cases} \quad \text{se } \alpha \neq 0; 1.$$

Da ciò ricaviamo

$$\begin{cases} C_1 = -1, \\ C_2 = -1/2, \end{cases} \quad \text{se } \alpha = 0; \quad \begin{cases} C_1 = 1/2, \\ C_2 = -1/2, \end{cases} \quad \text{se } \alpha = 1; \quad \begin{cases} C_1 = \frac{1}{2\alpha}, \\ C_2 = -\frac{1}{2\alpha(1-\alpha)}, \end{cases} \quad \text{se } \alpha \neq 0; 1.$$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy sarà

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{e^{2x}}{2} - x - 1/2 && \text{se } \alpha = 0, \\ y(x) &= 1/2 - e^{2x}/2 + xe^{2x} && \text{se } \alpha = 1, \\ y(x) &= \frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2\alpha(1-\alpha)}e^{2\alpha x} + \frac{1}{2(1-\alpha)}e^{2x} && \text{se } \alpha \neq 0; 1. \end{aligned}$$

Esercizio 5

Prendendo, ad esempio, $a_n = \frac{1}{n \log^2 n} > 0$, per $n \geq 4$, si ricava subito che

$$\begin{aligned} na_n &= \frac{n}{n \log^2 n} = \frac{1}{\log^2 n} \rightarrow 0, && n^2 a_n = \frac{n^2}{n \log^2 n} = \frac{n}{\log^2 n} \rightarrow +\infty, \\ \sum_{n=4}^{+\infty} a_n &= \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{n \log^2 n} \text{ che converge,} && \sum_{n=4}^{+\infty} (\log n) a_n = \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{\log n}{n \log^2 n} = \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{n \log n} \text{ che diverge.} \end{aligned}$$