CURVE IN $I\!R^N$

1. <u>*Definizione e prime proprietà.*</u>

Sia I un intervallo contenuto in $I\!R$. Data una N-pla di funzioni $\phi_i : I \to I\!R$, $i = 1, \ldots, N$, indicheremo con $\phi : I \to I\!R^N$ la funzione che ad ogni punto $x \in I$ associa la N-pla $\phi(x) = (\phi_1(x), \ldots, \phi_N(x)) \in I\!R^N$. Diremo che la funzione a valori vettoriali ϕ è continua, derivabile etc... se tali sono tutte le sue componenti ϕ_i, $\;i = 1, \ldots, N$.

Definizione 1.1. Sia I un intervallo contenuto in $I\!R$. Chiameremo *parametrizzazione di una curva* ogni applicazione $\phi : I \to I\!R^N$ continua. Il codominio $\phi(I) \subset I\!R^N$ dell'applicazione ϕ si dirà *sostegno* o *traccia* della curva.

Definizione 1.2. Siano $I, J \subseteq I\!R$ due intervalli e siano $\phi : I \to I\!R^N$ e $\psi : J \to I\!R^N$ due parametrizzazioni di curve. Esse si dicono *equivalenti* se esiste un *cambiamento di parametro ammissibile*, cioè una funzione $h : I \to J$ di classe $\mathcal{C}^1(I)$, invertibile e con inversa di classe $\mathcal{C}^1(J)$ (*diffeomorfismo* di classe $\mathcal{C}^1$), tale che $\phi = \psi \circ h$.

Se ϕ e ψ sono equivalenti nel senso appena definito, scriveremo $\phi \sim \psi$. Non è difficile verificare che la relazione $\sim$ è una relazione di equivalenza nel senso usuale, cioè soddisfa le proprietà

$$\begin{array}{ll} \text{riflessiva}: & \phi \sim \phi \;; \\ \text{simmetrica}: & \phi \sim \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \psi \sim \phi \;; \\ \text{transitiva}: & \phi \sim \psi \quad \text{e} \quad \psi \sim \varphi \quad \Longrightarrow \quad \phi \sim \varphi \;. \end{array}$$

Una volta introdotta la relazione d'equivalenza $\sim$, è possibile suddividere l'insieme delle parametrizzazioni di curve in classi d'equivalenza.

Definizione 1.3. Chiameremo *curva* (o *cammino*) la classe d'equivalenza $\gamma = [\phi]$ costituita da tutte le parametrizzazioni fra loro equivalenti.

Pertanto una *curva* γ è una classe di equivalenza (secondo la relazione d'equivalenza appena introdotta) di funzioni continue da un intervallo reale a valori in $I\!R^N$, mentre una *rappresentazione parametrica* o *parametrizzazione* di una curva γ è una qualunque funzione continua ϕ appartenente alla classe d'equivalenza $\gamma = [\phi]$.

Vedremo in seguito come molte importanti proprietà di una curva γ non dipendano dalla particolare rappresentazione parametrica scelta e giustificheremo quindi l'introduzione di questa relazione d'equivalenza.

Osservazione 1.4. Osserviamo che il sostegno $\phi(I)$ di una curva $\gamma = [\phi]$ non deve essere confuso con la curva stessa. Infatti le due curve di parametrizzazione

$$(1.1) \qquad \phi(t) = \begin{cases} \phi_1(t) = \cos t \\ \phi_2(t) = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi] \qquad \text{e} \qquad \psi(t) = \begin{cases} \psi_1(t) = \cos t \\ \psi_2(t) = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 3\pi]$$

rispettivamente, hanno entrambe come sostegno la circonferenza unitaria di centro l'origine, ma sono due curve distinte, nel senso che ϕ e ψ non sono equivalenti.

Dal punto di vista della fisica, possiamo pensare alla parametrizzazione di una curva in $I\!R^3$ come alla legge oraria di una particella che si muove nello spazio; di conseguenza il suo sostegno risulta essere la traiettoria della particella.

Definizione 1.5. Sia γ una curva in $I\!R^N$ e $\phi : I \to I\!R^N$ una sua parametrizzazione. La curva γ si dice *semplice* se presi due punti $t_1, t_2 \in I$ distinti e di cui almeno uno interno all'intervallo I si ha che $\phi(t_1) \neq \phi(t_2)$. Essa si dice *regolare* se $\phi \in \mathcal{C}^1(I; I\!R^N)$ e se $\phi'(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$. Infine, se $I = [a, b]$ è un intervallo chiuso e $\phi(a) = \phi(b)$, allora γ si dice *chiusa*.

La prima curva in (1.1) è regolare, semplice e chiusa, mentre la seconda è regolare, ma non è nè semplice nè chiusa.

Consideriamo le due curve parametrizzate da

(1.2)
$$\phi(t) = \begin{cases} \phi_1(t) = \cos t \\ \phi_2(t) = \sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi] \qquad \text{e} \qquad \psi(t) = \begin{cases} \psi_1(t) = \cos(t/2) \\ \psi_2(t) = \sin(t/2) \end{cases} \qquad t \in [0, 4\pi],$$

rispettivamente. Osserviamo che esse sono entrambe delle curve semplici, regolari e chiuse e che hanno lo stesso sostegno. Inoltre possiamo scrivere $\phi = \psi \circ h$ ove la funzione $h : [0, 2\pi] \to [0, 4\pi]$, assegnata dall'espressione $h(t) = 2t$, è di classe $\mathcal{C}^1$, invertibile e con inversa di classe $\mathcal{C}^1$. In altre parole, è possibile passare dalla parametrizzazione ϕ alla parametrizzazione ψ mediante un cambiamento di parametro ammissibile. Quindi ϕ e ψ appartengono alla stessa classe di equivalenza, cioè sono due parametrizzazioni della stessa curva.

Osservazione 1.6. Data una curva regolare γ ed una sua parametrizzazione $\phi : I \to I\!R^N$ e dato un punto $t_0 \in I$, chiameremo il vettore unitario

$$T(t_0) = \frac{\phi'(t_0)}{\|\phi'(t_0)\|} \tag{1.3}$$

versore tangente alla curva γ nel punto $\phi(t_0)$. Ovviamente, per una curva regolare, esso è ben definito in ogni punto dell'intervallo I. In particolare, le equazioni parametriche della retta tangente alla curva nel punto $\phi(t_0)$ sono date da

$$\begin{cases} x_1(t) = \phi_1(t_0) + T_1(t_0)(t - t_0) \\ \dots \qquad \dots \\ x_N(t) = \phi_N(t_0) + T_N(t_0)(t - t_0) \ . \end{cases}$$

Osservazione 1.7. Sia $f : [a, b] \to I\!R$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1([a, b])$. Allora la curva di $I\!R^2$ assegnata dalla parametrizzazione

$$\phi(t) = \begin{cases} \phi_1(t) = t \\ \phi_2(t) = f(t) \end{cases} \qquad t \in [a, b]$$

è una curva regolare, semplice e non chiusa e viene detta *curva cartesiana*. Essa ha come sostegno il grafico della funzione f e la retta tangente a tale curva nel punto $\phi(t_0)$ coincide con l'usuale tangente al grafico di f nel punto $(t_0, f(t_0))$; infatti, in questo caso,

$$T(t_0) = \frac{(1, f'(t_0))}{\sqrt{1 + (f')^2(t_0)}}.$$

Ad ogni curva γ è possibile assegnare un *verso di percorrenza* o *orientazione* indotta dalla parametrizzazione nel modo seguente: sia $\phi : I \to I\!R^N$ una rappresentazione parametrica di γ, diremo che il punto $P_1 = \phi(t_1)$ precede il punto $P_2 = \phi(t_2)$ se $t_1 < t_2$. Se ϕ è una curva semplice, il significato geometrico della definizione precedente risulta immediato, altrimenti può succedere che il punto P_1 preceda il punto P_2 secondo la definizione, anche se "geometricamente" essi coincidono sul sostegno (per esempio, nella seconda curva in (1.1), $P_1 = \psi(\pi/2)$ precede $P_2 = \psi(5\pi/2)$ nel verso di percorrenza indotto dalla parametrizzazione, anche se sono entrambi il punto di intersezione del sostegno con l'asse delle ordinate positive) o addirittura risultino "geometricamente" in ordine inverso (per esempio, sempre nella seconda curva di (1.1), $P_1 = \psi(\pi)$ e $P_2 = \psi(\frac{5}{2}\pi)$). Sottolineiamo, inoltre, che il concetto di orientazione dipende dalla relazione d'ordine presente in $I\!R$.

Osserviamo che su ogni curva γ è sempre possibile indurre due versi di percorrenza opposti. È possibile quindi introdurre un'altra relazione d'equivalenza, più forte della precedente, nel modo seguente.

Definizione 1.8. Diremo che γ è una *curva orientata*, se per ogni coppia ϕ e ψ di parametrizzazioni di γ, con $\phi : I \to I\!R^N$ e $\psi : J \to I\!R^N$, esiste un cambiamento di parametro ammissibile e crescente, cioè una funzione $h : I \to J$ di classe $\mathcal{C}^1$, invertibile, crescente e con inversa di classe $\mathcal{C}^1$ (*diffeomorfismo di classe* $\mathcal{C}^1$ *crescente*), tale che $\phi = \psi \circ h$.

Se $\phi = \psi \circ h$, con h diffeomorfismo di classe $\mathcal{C}^1$ crescente, scriveremo $\phi \overset{\circ}{\sim} \psi$. Non è difficile verificare che anche questa è una relazione di equivalenza nel senso usuale (mentre non lo sarebbe quella ottenuta mediante un cambiamento di parametro dato da un diffeomorfismo di classe $\mathcal{C}^1$ decrescente); inoltre la relazione $\overset{\circ}{\sim}$ ci permette di suddividere ogni classe d'equivalenza ottenuta precedentemente mediante la relazione $\sim$ in due ulteriori classi. Quindi una *curva orientata* è una classe di equivalenza $\gamma = [\phi]$ rispetto alla relazione $\overset{\circ}{\sim}$. Osserviamo che ogni curva orientata ammette un unico verso di percorrenza.

2. Lunghezza di una curva.

Vogliamo ora introdurre la nozione di lunghezza di una curva. A tale proposito sottolineiamo fin da ora che la lunghezza di una curva non coincide, in generale, con la lunghezza del suo sostegno (come si potrebbe erroneamente pensare), salvo quando la curva è semplice.

Consideriamo una curva γ di parametrizzazione $\phi : [a, b] \to I\!R^N$, cioè definita su un intervallo chiuso e limitato. Ad ogni partizione p dell'intervallo $[a, b]$ costituita dai punti

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

è possibile associare una *poligonale inscritta* nella curva, i cui vertici siano assegnati ordinatamente dai punti $\phi(a),\ \phi(t_1),\ \ldots,\ \phi(b)$. La lunghezza di questa poligonale si ottiene in modo ovvio come somma delle distanze tra due punti consecutivi, cioè come somma delle lunghezze di ciascun segmentino di cui è composta la poligonale, ed è assegnata dall'espressione

$$l(p) = \sum_{i=1}^{n} \|\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})\| \ .$$

Intuitivamente, essa fornisce un'approssimazione della lunghezza della curva, tanto migliore quanto più sono piccole le distanze fra due punti consecutivi della poligonale (ancora una volta la situazione considerata è particolarmente chiara se si suppone la curva semplice, anche se questa non è una condizione indispensabile).

Diviene allora naturale porre la seguente definizione.

Definizione 2.1. Data una curva γ, sia $\phi : [a,b] \to I\!R^N$ una sua parametrizzazione. Indichiamo con $\mathcal{P}$ l'insieme di tutte le partizione dell'intervallo $[a,b]$. Definiamo *lunghezza della curva* γ il numero non negativo

$$L(\gamma) = \sup\{l(p) \ : \ p \in \mathcal{P}\} \tag{2.1}$$

Diremo che la curva è *rettificabile* se il numero $L(\gamma)$ è finito.

Osserviamo che la definizione appena stabilita è consistente, in quanto è possibile provare che la lunghezza di una curva non dipende dalla particolare parametrizzazione considerata.

* * *

Osservazione 2.2. Osserviamo che non tutte le curve sono rettificabili. Consideriamo per esempio la curva γ di parametrizzazione

$$\phi(t) = \begin{cases} \phi_1(t) = t \\ \phi_2(t) = g(t) \end{cases} \qquad t \in [0, \frac{2}{\pi}],$$

ove

$$g(t) = \begin{cases} t\sin(\frac{1}{t}) & \text{se } t \in (0, \frac{2}{\pi}] \\ 0 & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Al variare di $n \in I\!N$, consideriamo la partizione $p_n = \{t_0 = 0 < t_1 = \frac{2}{[(2n-1)\pi]} < \ldots < t_i = \frac{2}{\{[2(n-i)+1]\pi\}} < t_n = \frac{2}{\pi}\}$. Allora, per ogni $n \in I\!N$, si ha

$$\begin{aligned} L(\gamma) &\geq \sum_{i=2}^{n} \left| t_i \sin(\frac{1}{t_i}) - t_{i-1}\sin(\frac{1}{t_{i-1}}) \right| \\ &= \sum_{i=2}^{n} \left| \frac{2}{\pi}[\frac{1}{2(n-i)+1} + \frac{1}{2(n-i)+3}] \right| \\ &= \frac{8}{\pi} \sum_{i=2}^{n} \frac{n-i+1}{[2(n-i)+1][2(n-i)+3]} \\ &= \frac{8}{\pi} \sum_{j=0}^{n-2} \frac{j+1}{(2j+1)(2j+3)}. \end{aligned}$$

Poiché l'ultimo termine della disuguaglianza precedente diverge a $+\infty$ quando $n \to +\infty$, si ottiene che γ non è rettificabile.

* * *

Il prossimo teorema mostra che esiste una notevole classe di curve che risultano sempre rettificabili.

Teorema 2.3. *Ogni curva regolare γ è rettificabile. Inoltre, se $\phi : [a, b] \to I\!R^N$ è una sua parametrizzazione, si ha*

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\phi'(t)\| \; dt = \int_a^b \sqrt{[\phi_1'(t)]^2 + \ldots + [\phi_N'(t)]^2} \; dt. \tag{2.2}$$

Osserviamo che, come si ottiene dal teorema di cambiamento di variabile per l'integrale di Riemann (e in accordo con quanto sottolineato precedentemente), il membro di destra nell'espressione (2.2) non dipende dalla scelta della parametrizzazione ϕ della curva γ.

* * *

Osserviamo anche che, come risulterà chiaro dalla dimostrazione, il teorema vale più in generale per le curve di classe $\mathcal{C}^1$, poiché l'ipotesi $\phi'(t) \neq 0$ in $[a,b]$ non viene mai utilizzata.

Dim. Sia γ una curva regolare e sia $\phi : [a,b] \to I\!R^N$ una sua parametrizzazione. Cominciamo con il dimostrare che

$$L(\gamma) \leq \int_a^b \|\phi'(t)\| \, dt. \tag{2.3}$$

A tale scopo, sia $p = \{t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ una partizione dell'intervallo $[a,b]$. Allora, dal Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale, si ottiene

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \|\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})\| &= \sum_{i=1}^n \| \int_{t_i}^{t_{i-1}} \phi'(t) \, dt\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{t_i}^{t_{i-1}} \|\phi'(t)\| \, dt = \int_a^b \|\phi'(t)\| \, dt.\end{aligned}$$

Passando al sup, al variare di tutte le possibili partizioni di $[a,b]$ si ottiene la (2.3). Poiché la funzione $\|\phi'(\cdot)\|$ è continua, essa è integrabile secondo Riemann in $[a,b]$ e quindi la (2.3) assicura che γ è rettificabile.

Per dimostrare la disuguaglianza opposta, osserviamo che ϕ' è uniformemente continua in $[a,b]$; pertanto, fissato $\varepsilon > 0$, è possibile trovare $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che, se $t, s \in [a,b]$ e $|t-s| < \delta$, allora $\|\phi'(t) - \phi'(s)\| < \varepsilon$. Sia quindi $p = \{t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ una partizione di $[a,b]$ tale che

$$|p| := \max_{i=1,\ldots,n} (t_i - t_{i-1}) < \delta \tag{2.4}$$

e sia $s_i \in [t_{i-1}, t_i]$ arbitrario. Allora

$$\begin{aligned}&\|\phi'(s_i)\| \\ &\leq \frac{1}{(t_i - t_{i-1})} \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\phi'(s_i) - \phi'(\tau)] \, d\tau \right\| + \frac{1}{(t_i - t_{i-1})} \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \phi'(\tau) \, d\tau \right\| \\ &\leq \frac{1}{(t_i - t_{i-1})} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\phi'(s_i) - \phi'(\tau)\| \, d\tau + \frac{1}{(t_i - t_{i-1})} \|\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})\| \\ &\leq \varepsilon + \frac{1}{(t_i - t_{i-1})} \|\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})\|.\end{aligned}$$

Integrando la precedente disuguaglianza per $s_i \in [t_{i-1}, t_i]$ e sommando per $i = 1, \ldots, n$, si ottiene

$$\int_a^b \|\phi'(s)\| \, ds \leq \varepsilon(b-a) + \sum_{i=1}^n \|\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})\| \leq \varepsilon(b-a) + L(\gamma).$$

Facendo tendere ε a zero e tenendo presente la (2.3) si ottiene la tesi. □

* * *

Osservazione 2.4. Osserviamo che la lunghezza di una curva cartesiana γ, ottenuta tramite una funzione $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$, assume l'espressione particolarmente semplice data da

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx.$$

Infatti, ricordiamo che una parametrizzazione $\phi : [a,b] \to I\!R^2$ è assegnata da

$$\phi(t) = \begin{cases} \phi_1(t) = t \\ \phi_2(t) = f(t) \end{cases} \qquad t \in [a,b].$$

ESEMPIO 2.5. Vogliamo ora calcolare a titolo di esempio la lunghezza di un'elica cilindrica, cioè una curva regolare γ in $I\!R^3$ parametrizzata da

$$\phi(t) = \begin{cases} \phi_1(t) = \cos t \\ \phi_2(t) = \sin t \\ \phi_3(t) = t \end{cases} \qquad t \in [0, 4\pi].$$

Dal Teorema 2.3 si ottiene

$$L(\gamma) = \int_0^{4\pi} \|\phi'(t)\|\ dt = \int_0^{4\pi} \sqrt{(\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1}\ dt = 4\pi\sqrt{2}.$$

Fra tutte le possibili parametrizzazioni di una curva regolare γ, ce n'è una privilegiata, quella fatta mediante l'ascissa curvilinea. Per introdurla, sia data una curva regolare γ e sia $\phi : [a,b] \to I\!R^N$ una sua parametrizzazione. Consideriamo la funzione

$$s(t) = \int_a^t \|\phi'(\tau)\|\ d\tau \qquad \forall t \in [a,b]. \tag{2.5}$$

Dal Teorema 2.3 si ha subito che $s(b) = L$, ove L è la lunghezza di γ. Inoltre, dal Teorema di Torricelli risulta immediatamente che $s : [a,b] \to [0,L]$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^1([a,b])$, strettamente crescente e con derivata strettamente positiva in $[a,b]$, cioè è un diffeomorfismo di classe $\mathcal{C}^1$ crescente, quindi rappresenta un cambiamento di parametro ammissibile. Tale parametro s è detto *ascissa curvilinea* o *lunghezza d'arco*.

Quindi, una curva regolare γ può essere sempre parametrizzata mediante l'ascissa curvilinea. Indicheremo con $\gamma(s)$ la particolare parametrizzazione di γ così ottenuta. Osserviamo che, indicata con $t(s)$ la funzione inversa dell'ascissa curvilinea, si ha

$$\gamma'(s) = \frac{d\phi}{dt}(t(s)) \cdot \frac{dt}{ds}(s) = \frac{\phi'(t(s))}{\|\phi'(t(s))\|}$$

e quindi, con la notazione introdotta in (1.3), si ha che il versore tangente alla curva nel generico punto di ascissa curvilinea s è dato da $T(s) = \gamma'(s)$.

* * *

Everyone knows what a curve is, until he has studied enough mathematics to become confused through the countless number of possible exceptions. F. Klein.

* * *