A N A L I S I 1/A appello del 12 gennaio 1999	cognome e nome	firma

1. Sia data

$$F(x) = \int_2^x \frac{e^t}{t^{\frac{1}{3}}(t+1)}\, dt.$$

(a) Determinare campo di esistenza, segno, monotonia, concavità e convessità di F .

(b) Dimostrare che $\exists \lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

(c) Sapendo che $\exists \lim_{x\to 0^+} F(x) = \alpha \in (-\infty, 0)$, tracciare il grafico qualitativo di F .

Fino a punti 9

---

2. Determinare, al variare del parametro $x \in (0, 5/4)$, il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\log n)^{(x-\frac{3}{2})} \log\left[1 + \left(\sin\frac{1}{n}\right)^{(-4x^2+5x)}\right].$$

Fino a punti 9

---

3. Calcolare

$$\lim_{x\to 1^+} x^{\frac{1}{\sin(x^2-1)}}.$$

Fino a punti 6

---

4. Trovare i numeri complessi $z = a + ib$ soluzioni dell'equazione

$$|z+1|e^{2iz} = \sqrt{5}e^{-2(\mathrm{Im} z)}$$

tali che $|\mathrm{Re} z| < 2$.

Fino a punti 6

Tempo: 3 ore	spazio riservato alla commissione	1.	2.	3.	4.	totale

SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1
(a)

$$
\begin{aligned}
&\text{C.E.} = (0,+\infty);\\
&F(x)>0 \;\; x>2, \quad F(x)<0 \;\; 0<x<2, \quad F(x)=0 \;\; x=2;\\
&F'(x) = \frac{e^x}{\sqrt[3]{x}(x+1)} = f(x) > 0 \qquad \forall x\in(0,+\infty); \qquad \lim_{x\to 0^+} F'(x) = +\infty;\\
&F''(x) = \frac{e^x[3x^2-x-1]}{3\sqrt[3]{x^4}(x+1)^2};\\
&F''(x)<0 \;\; 0<x<\frac{1+\sqrt{13}}{6}, \quad F''(x)>0 \;\; x>\frac{1+\sqrt{13}}{6}, \quad F''(x)=0 \;\; x=\frac{1+\sqrt{13}}{6}.
\end{aligned}
$$

Quindi F é sempre crescente con un unico flesso a ordinata negativa.
(b) Per $x>2$, F é positiva e monotona crescente, quindi ammette limite positivo per $x\to+\infty$. Essendo anche convessa, non puó ammettere asintoto orizzontale, quindi necessariamente diverge a $+\infty$.

Esercizio 2
Per $x\in(0,5/4)$, si ha che l'esponente della successione $\sin(1/n)$ é sempre positivo, quindi tale successione é sempre infinitesima. Pertanto

$$
a_n^x \sim (\log n)^{(x-3/2)}\left(\sin\frac{1}{n}\right)^{(-4x^2+5x)} \sim \frac{1}{(\log n)^{(3/2-x)} n^{(-4x^2+5x)}}.
$$

Pertanto dai criteri visti, si ha che la serie converge (assolutamente, essendo una serie a termini positivi) per $1/4\le x<1$, in quanto

(i) per $1/4<x<1$, l'esponente di n é maggiore di 1 (quindi non ha importanza il valore dell'esponente del logaritmo);

(ii) per $x=1/4$, l'esponente di n é proprio 1, ma il logaritmo ha esponente maggiore di 1.

Infine, per $x\in(0,1/4)\cup[1,5/4)$, la serie diverge.

Esercizio 3
É sufficiente riscrivere la funzione proposta in forma esponenziale ed utilizzare lo sviluppo di Taylor al primo ordine per $\log(1+t)$ (con $t=x-1$) e per $\sin t$ (con $t=x^2-1$):

$$
\begin{aligned}
x^{\frac{1}{\sin(x^2-1)}} &= \exp\left\{\frac{\log x}{\sin(x^2-1)}\right\} = \exp\left\{\frac{\log[1+(x-1)]}{\sin(x^2-1)}\right\}\\
&\sim \exp\left[\frac{(x-1)}{(x+1)(x-1)}\right] \to \sqrt{e}.
\end{aligned}
$$

Esercizio 4
L'equazione proposta si riscrive nella forma

$$
\sqrt{(a+1)^2+b^2}\; e^{2ia-2b} = \sqrt{5}\; e^{-2b}.
$$

Tenendo conto che si deve avere $|\mathrm{Re} z|<2$, si ottiene il sistema

$$
\begin{cases} 2a = 0\\ (a+1)^2+b^2 = 5 \end{cases}
$$

che ha per soluzione $z=\pm 2i$.

A N A L I S I 1/B appello del 12 gennaio 1999	cognome e nome	firma

1. Sia data

$$F(x) = \int_5^x \frac{e^{4t}}{t^{\frac{1}{2}}(1-t)}\, dt.$$

(a) Determinare campo di esistenza, segno, monotonia, concavità e convessità di F .

(b) Dimostrare che $\exists \lim_{x\to+\infty} F(x) = -\infty$.

(c) Sapendo che $\exists \lim_{x\to 1^+} F(x) = +\infty$, tracciare il grafico qualitativo di F .

Fino a punti 9

---

2. Determinare, al variare del parametro $x < -\sqrt{3}$ e $x > \sqrt{3}$, il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\log n)^{(2x-1)}} \operatorname{artg}\left(\frac{1}{n^{(x^2-3)}}\right).$$

Fino a punti 9

---

3. Calcolare

$$\lim_{x\to 3^+} [\cos(x^2-9)]^{\frac{1}{9(x-3)^2}}.$$

Fino a punti 6

---

4. Trovare i numeri complessi $z = a + ib$ soluzioni dell'equazione

$$|z+2i|^2 e^{5z} = 8e^{5(\mathrm{Re} z)}$$

tali che $|\mathrm{Im} z| < 1$.

Fino a punti 6

Tempo: **3 ore**	spazio riservato alla commissione	1.	2.	3.	4.	totale

SOLUZIONI COMPITO B

Esercizio 1
(a)

C.E. $= (1, +\infty)$;
$F(x) > 0 \;\; 1 < x < 5, \quad F(x) < 0 \;\; x > 5, \quad F(x) = 0 \;\; x = 5$;
$F'(x) = \dfrac{e^{4x}}{\sqrt{x}(1-x)} = f(x) < 0 \qquad \forall x \in (1, +\infty)$;
$F''(x) = \dfrac{e^{4x}[-8x^2 + 11x - 1]}{2x^{3/2}(1-x)^2}$;
$F''(x) < 0 \;\; x > \dfrac{11+\sqrt{89}}{16}, \quad F''(x) > 0 \;\; 1 < x < \dfrac{11+\sqrt{89}}{16}, \quad F''(x) = 0 \;\; x = \dfrac{11+\sqrt{89}}{16}$.

Quindi F é sempre decrescente con un unico flesso a ordinata positiva.
(b) Per $x > 5$, F é negativa e monotona decrescente, quindi ammette limite negativo per $x \to +\infty$. Essendo anche concava, non puó ammettere asintoto orizzontale, quindi necessariamente diverge a $-\infty$.

Esercizio 2
Per $x < -\sqrt{3}$ e $x > \sqrt{3}$, si ha che l'esponente di n é sempre positivo, quindi la successione $1/(n^{x^2-3})$ é sempre infinitesima. Pertanto

$$a_n^x \sim \frac{1}{(\log n)^{(2x-1)} n^{x^2-3}}.$$

Pertanto dai criteri visti, si ha che la serie converge (assolutamente, essendo una serie a termini positivi) per $x \geq 2$ e $x < -2$, in quanto
(i) per $x < -2$ e $x > 2$, l'esponente di n é maggiore di 1 (quindi non ha importanza il valore dell'esponente del logaritmo);
(ii) per $x = 2$, l'esponente di n é proprio 1, ma il logaritmo ha esponente maggiore di 1.
Infine, per $x \in [-2, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2)$, la serie diverge.

Esercizio 3
É sufficiente riscrivere la funzione proposta in forma esponenziale ed utilizzare lo sviluppo di Taylor al primo ordine per $\log(1+t)$ (con $t = \cos(x^2-9) - 1$) e quello al secondo ordine per $\cos t$ (con $t = x^2 - 9$):

$$[\cos(x^2-9)]^{\frac{1}{9(x-3)^2}} = \exp\left\{\frac{\log[\cos(x^2-9)]}{9(x-3)^2}\right\} = \exp\left\{\frac{\log[1+(\cos(x^2-9)-1)]}{9(x-3)^2}\right\}$$
$$\sim \exp\left[\frac{\cos(x^2-9)-1}{9(x-3)^2}\right] \sim \exp\left[-\frac{(x^2-9)^2}{18(x-3)^2}\right] \to \frac{1}{e^2}.$$

Esercizio 4
L'equazione proposta si riscrive nella forma

$$[a^2 + (b+2)^2]\, e^{5a+5ib} = 8\, e^{5a}.$$

Tenendo conto che si deve avere $|\mathrm{Im} z| < 1$, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 5b = 0 \\ a^2 + (b+2)^2 = 8 \end{cases}$$

che ha per soluzione $z = \pm 2$.

A N A L I S I 1/A	cognome e nome	firma
appello del 26 gennaio 1999		

1. Sia data

$$f(x) = -\mathrm{sign}(x)\sqrt{e^{2x} - 4e^{x} - 5}$$

Determinare campo di esistenza, segno, limiti alla frontiera, eventuali asintoti e monotonia di f . Tracciarne il grafico qualitativo, nell'ipotesi di un numero minimale di flessi.

Fino a punti 9

---

2. Calcolare

$$\int_{-5}^{5} \frac{e^{(x^2)} \sin x}{\log(1+|x|)+1}\, dx.$$

Fino a punti 6

---

3. Stabilire se la seguente funzione

$$f(x,y) = \frac{[(x-1)^3 y + 2xy + 4y^2]^{7/3}}{[\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + x} - \sqrt{x}]^{1/3}}$$

è prolungabile con continuità nel punto $(1,0)$ ed in caso affermativo stabilire quale valore deve assumere il prolungamento di f nel punto $(1,0)$.

Fino a punti 9

---

4. Calcolare il seguente

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sin\frac{1}{n}\right)^{1-\cos(1/n)} .$$

Fino a punti 6

Tempo: 3 ore	spazio riservato alla commissione	1.		2.		3.		4.		totale	

SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1

$$\text{C.E.} = [\log 5, +\infty), \quad f(x) = -\sqrt{e^{2x} - 4e^x - 5} \qquad \forall x \in [\log 5, +\infty);$$
$$f(x) < 0 \;\; x \in (\log 5, +\infty), \quad f(x) = 0 \;\; x = \log 5;$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -e^x = -\infty;$$
$$f'(x) = \frac{-e^x(e^x-2)}{\sqrt{e^{2x} - 4e^x - 5}} < 0 \qquad \forall x \in (\log 5, +\infty); \lim_{x\to\log 5^+} f'(x) = -\infty.$$

Inoltre, poichè $f(x) \sim -e^x$ per $x \to +\infty$, la funzione non ammette asintoto obliquo a $+\infty$ e diverge in modo concavo. Infine, avendo tangente verticale e positiva in $x = \log 5$, la funzione deve avere almeno un flesso.

Esercizio 2

Osserviamo che l'intervallo d'integrazione è simmetrico rispetto all'origine, la funzione integranda è dispari e quindi l'integrale proposto è nullo.

Esercizio 3

Facendo un cambiamento di variabile in coordinate polari con centro in $(1,0)$, ci si riconduce a calcolare il seguente limite:

$$\lim_{\rho\to0^+} \frac{[\rho^4\cos^3\theta\sin\theta + 2(1+\rho\cos\theta)\rho\sin\theta + 4\rho^2\sin^2\theta]^{7/3}}{[\sqrt{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta + 1 + \rho\cos\theta} - \sqrt{1+\rho\cos\theta}]^{1/3}} =$$
$$\lim_{\rho\to0^+} \frac{(2\rho\sin\theta)^{7/3}[(1/2)\rho^3\cos^3\theta + (1+\rho\cos\theta) + 2\rho\sin\theta]^{7/3}}{[\sqrt{\rho^2+1+\rho\cos\theta} - \sqrt{1+\rho\cos\theta}]^{1/3}} =$$
$$\lim_{\rho\to0^+} \frac{(2\rho\sin\theta)^{7/3}[\sqrt{\rho^2+1+\rho\cos\theta} + \sqrt{1+\rho\cos\theta}]^{1/3}}{[\rho^2+1+\rho\cos\theta - 1 - \rho\cos\theta]^{1/3}} = \lim_{\rho\to0^+} \frac{\rho^{7/3}(2\sin\theta)^{7/3}\sqrt[3]{2}}{\rho^{2/3}} = 0$$

indipendentemente da θ . Quindi la funzione è prolungabile con continuità nel punto $(1,0)$ ed il suo prolungamento dovrà assumere il valore 0 in tale punto.

Esercizio 4

Il limite proposto è un caso di indecisione della forma $[0^0]$; passando alla forma esponenziale ed utilizzando lo sviluppo di Taylor al primo ordine per $\sin t$ ed al secondo ordine per $\cos t$ (con $t = 1/n$) si ottiene

$$\left(\sin\frac{1}{n}\right)^{(1-\cos\frac{1}{n})} = \exp\left[(1-\cos\frac{1}{n})\log(\sin\frac{1}{n})\right]$$
$$\sim \exp(\frac{1}{2n^2}\log\frac{1}{n}) = \exp\left(-\frac{\log n}{2n^2}\right) \to 1.$$

A N A L I S I 1/B	cognome e nome	firma
appello del 26 gennaio 1999		

1. Sia data

$$f(x) = \operatorname{sign}(x)\sqrt{e^{2x} - e^{x} - 6}$$

Determinare campo di esistenza, segno, limiti alla frontiera, eventuali asintoti e monotonia di f . Tracciarne il grafico qualitativo, nell'ipotesi di un numero minimale di flessi.

Fino a punti 9

---

2. Calcolare

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^{|x|}\tan x}{1+x^2}\, dx.$$

Fino a punti 6

---

3. Stabilire se la seguente funzione

$$f(x,y) = \frac{[x^3 + 4xy + 10x(y-1)^2]^{5/3}}{[\sqrt{x^2+(y-1)^2+y} - \sqrt{y}]^{1/2}}$$

è prolungabile con continuità nel punto $(0,1)$ ed in caso affermativo stabilire quale valore deve assumere il prolungamento di f nel punto $(0,1)$.

Fino a punti 9

---

4. Calcolare il seguente

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)^{\sin(1/n)} .$$

Fino a punti 6

Tempo: 3 ore	spazio riservato alla commissione	1.	2.	3.	4.	totale

SOLUZIONI COMPITO B

Esercizio 1

$$\text{C.E.} = [\log 3, +\infty); \quad f(x) = \sqrt{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - 6} \qquad \forall x \in [\log 3, +\infty);$$
$$f(x) > 0 \quad x \in (\log 3, +\infty), \quad f(x) = 0 \quad x = \log 3;$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty;$$
$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(2\mathrm{e}^x - 1)}{2\sqrt{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - 6}} > 0 \qquad \forall x \in (\log 3, +\infty); \lim_{x\to\log 3^+} f'(x) = +\infty.$$

Inoltre, poichè $f(x) \sim \mathrm{e}^x$ per $x \to +\infty$, la funzione non ammette asintoto obliquo a $+\infty$ e diverge in modo convesso. Infine, avendo tangente verticale e positiva in $x = \log 3$, la funzione deve avere almeno un flesso.

Esercizio 2

Osserviamo che l'intervallo d'integrazione è simmetrico rispetto all'origine, la funzione integranda è dispari e quindi l'integrale proposto è nullo.

Esercizio 3

Facendo un cambiamento di variabile in coordinate polari con centro in $(0,1)$, ci si riconduce a calcolare il seguente limite:

$$\lim_{\rho\to0^+} \frac{[\rho^3\cos^3\theta + 4\rho\cos\theta(1+\rho\sin\theta) + 10\rho^3\sin^2\theta\cos\theta]^{5/3}}{[\sqrt{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta + 1 + \rho\sin\theta} - \sqrt{1+\rho\sin\theta}]^{1/2}} =$$
$$\lim_{\rho\to0^+} \frac{(4\rho\cos\theta)^{5/3}[(1/4)\rho^2\cos^2\theta + (1+\rho\sin\theta) + (5/2)\rho^2\sin^2\theta]^{5/3}}{[\sqrt{\rho^2 + 1 + \rho\sin\theta} - \sqrt{1+\rho\sin\theta}]^{1/2}} =$$
$$\lim_{\rho\to0^+} \frac{(4\rho\cos\theta)^{5/3}[\sqrt{\rho^2+1+\rho\sin\theta} + \sqrt{1+\rho\sin\theta}]^{1/2}}{[\rho^2 + 1 + \rho\sin\theta - 1 - \rho\sin\theta]^{1/2}} = \lim_{\rho\to0^+} \frac{\rho^{5/3}(4\cos\theta)^{5/3}\sqrt{2}}{\rho} = 0$$

indipendentemente da θ. Quindi la funzione è prolungabile con continuità nel punto $(0,1)$ ed il suo prolungamento dovrà assumere il valore 0 in tale punto.

Esercizio 4

Il limite proposto è un caso di indecisione della forma $[0^0]$; passando alla forma esponenziale ed utilizzando lo sviluppo di Taylor al primo ordine per $\sin t$ ed al secondo ordine per $\cos t$ (con $t = 1/n$), si ottiene

$$\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)^{(\sin\frac{1}{n})} = \exp\left[(\sin\frac{1}{n})\log(1-\cos\frac{1}{n})\right]$$
$$\sim \exp\left(\frac{1}{n}\log\frac{1}{2n^2}\right) = \exp\left(-\frac{2\log n + \log 2}{n}\right) \to 1.$$

A N A L I S I 1/C	cognome e nome	firma
appello del 26 gennaio 1999		

1. Sia data

$$f(x) = -\mathrm{sign}(-x)\sqrt{\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^{x} - 14}$$

Determinare campo di esistenza, segno, limiti alla frontiera, eventuali asintoti e monotonia di f. Tracciarne il grafico qualitativo, nell'ipotesi di un numero minimale di flessi.

Fino a punti 9

---

2. Calcolare

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{\mathrm{e}^{|x^3|}\tan x}{\log(1+x^2)+1}\, dx.$$

Fino a punti 6

---

3. Stabilire se la seguente funzione

$$f(x,y) = \frac{[(x-1)^3(y-1) + x(y-1) + 4(y-1)^2]^{7/3}}{[\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+x} - \sqrt{x}]^{1/2}}$$

è prolungabile con continuità nel punto $(1,1)$ ed in caso affermativo stabilire quale valore deve assumere il prolungamento di f nel punto $(1,1)$.

Fino a punti 9

---

4. Calcolare il seguente

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\tan\frac{1}{n}\right)^{\sin(1/n)}.$$

Fino a punti 6

Tempo: 3 ore	spazio riservato alla commissione	1.	2.	3.	4.	totale

SOLUZIONI COMPITO C

Esercizio 1

$$\text{C.E.} = [\log 7, +\infty), \quad f(x) = \sqrt{\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^{x} - 14} \qquad \forall x \in [\log 7, +\infty);$$

$$f(x) > 0 \;\; x \in (\log 7, +\infty), \quad f(x) = 0 \;\; x = \log 7;$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty;$$

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{x}(2\mathrm{e}^{x} - 5)}{2\sqrt{\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^{x} - 14}} > 0 \qquad \forall x \in (\log 7, +\infty); \lim_{x\to\log 7^{+}} f'(x) = +\infty.$$

Inoltre, poichè $f(x) \sim \mathrm{e}^{x}$ per $x \to +\infty$, la funzione non ammette asintoto obliquo a $+\infty$ e diverge in modo convesso. Infine, avendo tangente verticale e positiva in $x = \log 7$, la funzione deve avere almeno un flesso.

Esercizio 2

Osserviamo che l'intervallo d'integrazione è simmetrico rispetto all'origine, la funzione integranda è dispari e quindi l'integrale proposto è nullo.

Esercizio 3

Facendo un cambiamento di variabile in coordinate polari con centro in $(1,1)$, ci si riconduce a calcolare il seguente limite:

$$\lim_{\rho\to0^{+}} \frac{[\rho^{4}\cos^{3}\theta\sin\theta + (1+\rho\cos\theta)\rho\sin\theta + 4\rho^{2}\sin^{2}\theta]^{7/3}}{[\sqrt{\rho^{2}\cos^{2}\theta + \rho^{2}\sin^{2}\theta + 1 + \rho\cos\theta} - \sqrt{1+\rho\cos\theta}]^{1/2}} =$$

$$\lim_{\rho\to0^{+}} \frac{(\rho\sin\theta)^{7/3}[\rho^{3}\cos^{3}\theta + (1+\rho\cos\theta) + 4\rho\sin\theta]^{7/3}}{[\sqrt{\rho^{2} + 1 + \rho\cos\theta} - \sqrt{1+\rho\cos\theta}]^{1/2}} =$$

$$\lim_{\rho\to0^{+}} \frac{(\rho\sin\theta)^{7/3}[\sqrt{\rho^{2}+1+\rho\cos\theta} + \sqrt{1+\rho\cos\theta}]^{1/2}}{[\rho^{2}+1+\rho\cos\theta - 1 - \rho\cos\theta]^{1/2}} = \lim_{\rho\to0^{+}} \frac{\rho^{7/3}(\sin\theta)^{7/3}\sqrt[2]{2}}{\rho} = 0$$

indipendentemente da θ . Quindi la funzione è prolungabile con continuità nel punto $(1,1)$ ed il suo prolungamento dovrà assumere il valore 0 in tale punto.

Esercizio 4

Il limite proposto è un caso di indecisione della forma $[0^{0}]$; passando alla forma esponenziale ed utilizzando lo sviluppo di Taylor al primo ordine per $\sin t$ e per $\tan t$ (con $t = 1/n$), si ottiene

$$\left(\tan\frac{1}{n}\right)^{(\sin\frac{1}{n})} = \exp\left[(\sin\frac{1}{n})\log(\tan\frac{1}{n})\right]$$

$$\sim \exp\left(\frac{1}{n}\log\frac{1}{n}\right) = \exp\left(-\frac{\log n}{n}\right) \to 1.$$

A N A L I S I 1/D	cognome e nome	firma
appello del 26 gennaio 1999		

1. Sia data

$$f(x) = \mathrm{sign}(-x)\sqrt{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - 2}$$

Determinare campo di esistenza, segno, limiti alla frontiera, eventuali asintoti e monotonia di f . Tracciarne il grafico qualitativo, nell'ipotesi di un numero minimale di flessi.

Fino a punti 9

---

2. Calcolare

$$\int_{-3}^{3} \frac{\mathrm{e}^{(x^4)} \sin x}{1 + |x|}\, dx.$$

Fino a punti 6

---

3. Stabilire se la seguente funzione

$$f(x,y) = \frac{[(x-2)^3 + (x-2)y + 10(x-2)(y-2)^2]^{5/3}}{[\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2 + y} - \sqrt{y}]^{1/3}}$$

è prolungabile con continuità nel punto $(2,2)$ ed in caso affermativo stabilire quale valore deve assumere il prolungamento di f nel punto $(2,2)$.

Fino a punti 9

---

4. Calcolare il seguente

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)^{\tan(1/n)}.$$

Fino a punti 6

Tempo: **3 ore**	spazio riservato alla commissione	1.	2.	3.	4.	totale

SOLUZIONI COMPITO D

Esercizio 1

$$\text{C.E.} = [\log 2, +\infty); \quad f(x) = -\sqrt{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - 2} \qquad \forall x \in [\log 2, +\infty);$$
$$f(x) < 0 \quad x \in (\log 2, +\infty), \qquad f(x) = 0 \quad x = \log 2;$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -\mathrm{e}^x = -\infty;$$
$$f'(x) = \frac{-\mathrm{e}^x(2\mathrm{e}^x - 1)}{2\sqrt{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - 2}} < 0 \qquad \forall x \in (\log 2, +\infty); \lim_{x\to\log 2^+} f'(x) = -\infty.$$

Inoltre, poichè $f(x) \sim -\mathrm{e}^x$ per $x \to +\infty$, la funzione non ammette asintoto obliquo a $+\infty$ e diverge in modo concavo. Infine, avendo tangente verticale e positiva in $x = \log 2$, la funzione deve avere almeno un flesso.

Esercizio 2

Osserviamo che l'intervallo d'integrazione è simmetrico rispetto all'origine, la funzione integranda è dispari e quindi l'integrale proposto è nullo.

Esercizio 3

Facendo un cambiamento di variabile in coordinate polari con centro in $(2, 2)$, ci si riconduce a calcolare il seguente limite:

$$\lim_{\rho\to0^+} \frac{[\rho^3\cos^3\theta + \rho\cos\theta(2 + \rho\sin\theta) + 10\rho^3\sin^2\theta\cos\theta]^{5/3}}{[\sqrt{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta + 2 + \rho\sin\theta} - \sqrt{2 + \rho\sin\theta}]^{1/3}} =$$
$$\lim_{\rho\to0^+} \frac{(\rho\cos\theta)^{5/3}[\rho^2\cos^2\theta + (2 + \rho\sin\theta) + 10\rho^2\sin^2\theta]^{5/3}}{[\sqrt{\rho^2 + 2 + \rho\sin\theta} - \sqrt{2 + \rho\sin\theta}]^{1/3}} =$$
$$\lim_{\rho\to0^+} \frac{(2\rho\cos\theta)^{5/3}[\sqrt{\rho^2 + 2 + \rho\sin\theta} + \sqrt{2 + \rho\sin\theta}]^{1/3}}{[\rho^2 + 2 + \rho\sin\theta - 2 - \rho\sin\theta]^{1/3}} = \lim_{\rho\to0^+} \frac{\rho^{5/3}(2\cos\theta)^{5/3}\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}{\rho^{2/3}} = 0$$

indipendentemente da θ . Quindi la funzione è prolungabile con continuità nel punto $(2, 2)$ ed il suo prolungamento dovrà assumere il valore 0 in tale punto.

Esercizio 4

Il limite proposto è un caso di indecisione della forma $[0^0]$; passando alla forma esponenziale ed utilizzando lo sviluppo di Taylor al primo ordine per $\tan t$ ed al secondo ordine per $\cos t$ (con $t = 1/n$) si ottiene

$$\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)^{(\tan\frac{1}{n})} = \exp\left[(\tan\frac{1}{n})\log(1 - \cos\frac{1}{n})\right]$$
$$\sim \exp(\frac{1}{n}\log\frac{1}{2n^2}) = \exp\left(-\frac{2\log n + \log 2}{n}\right) \to 1.$$

A N A L I S I 1/A appello del 9 febbraio 1999	cognome e nome	firma

1. Stabilire se la seguente funzione

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{e^{x^3}-1}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0); \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0); \end{cases}$$

è continua e differenziabile in $\mathbf{R}^2$. Calcolare inoltre le derivate direzionali di f nell'origine.

Fino a punti 9

---

2. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\pi)e^{-2n}\log n}{n}.$$

Fino a punti 9

---

3. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_1^4 \arctan\left(\frac{x+1}{|x|}\right)\, dx$$

Fino a punti 6

---

4. Stabilire per quali valori del parametro α , la seguente funzione

$$f(x)=\begin{cases} \alpha & \text{se } 0<x\le 1; \\ \frac{1+\log[1+(x-1)]-x}{\sin^2(x-1)} & \text{se } 1<x<1+\pi; \end{cases}$$

risulta continua.

Fino a punti 6

Tempo: 3 ore	spazio riservato alla commissione	1.	2.	3.	4.	totale

SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1
La funzione proposta è chiaramente continua e differenziabile fuori dall'origine. Cominciamo quindi a studiare la continuità nell'origine: con un cambiamento in coordinate polari ed utilizzando lo sviluppo di Taylor al primo ordine per $\exp t$ (con $t = \rho^3 \cos^3\theta$), ci si riconduce al calcolo del seguente limite

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\exp\left(\rho^3\cos^3\theta\right) - 1}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^3\cos^3\theta}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \rho\cos^3\theta = 0$$

indipendentemente da θ. Quindi la funzione è continua anche nell'origine. Osservando che $\nabla f(0,0) = (1,0)$, con un cambiamento in coordinate polari ed utilizzando lo sviluppo di Taylor al secondo ordine per $\exp t$ (con $t = \rho^3\cos^3\theta$), per lo studio della differenziablità nell'origine ci si riconduce al calcolo del seguente limite

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\exp\left(\rho^3\cos^3\theta\right) - 1 - \rho^3\cos^3\theta - \rho^3\cos\theta\sin^2\theta}{\rho^3} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{(1/2)\rho^6\cos^6\theta - \rho^3\cos\theta\sin^2\theta}{\rho^3} =$$
$$\lim_{\rho\to 0^+} [(1/2)\rho^3\cos^6\theta - \cos\theta\sin^2\theta] = -\cos\theta\sin^2\theta \neq 0.$$

La funzione, quindi, non è differenziabile nell'origine. Per il calcolo delle derivate direzionali bisogna pertanto procedere mediante la definizione

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \lim_{t\to 0} \frac{\exp(t^3 v_1^3) - 1}{t^3} = v_1^3.$$

Esercizio 2
Osserviamo che, per n sufficientemente grande, si ha

$$|a_n| = \left| \frac{(-1)^n \mathrm{e}^{-2n}\log n}{n} \right| = \frac{\mathrm{e}^{-2n}\log n}{n} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Poiché $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, dal criterio del confronto, si ottiene che la serie proposta converge assolutamente.

Esercizio 3
Osservando che l'integrale proposto può essere riscritto nel modo seguente:

$$\int_1^4 1\ \arctan\left(\frac{x+1}{x}\right)\ dx$$

e ricordando che 1 è la derivata della funzione $f(x) = x$, tramite un'integrazione per parti si ottiene:

$$\int_1^4 \arctan\left(\frac{x+1}{|x|}\right)\ dx = x\arctan\left(\frac{x+1}{x}\right)\Bigg|_1^4 + \int_1^4 \frac{x}{2x^2+2x+1}\ dx$$
$$= 4\arctan\frac{5}{4} - \arctan 2 + \frac{1}{4}\int_1^4 \frac{4x+2}{2x^2+2x+1}\ dx - \int_1^4 \frac{1}{[2(x+1/2)]^2+1}\ dx$$
$$= 4\arctan\frac{5}{4} - \arctan 2 + \log\sqrt[4]{\frac{41}{5}} - (1/2)\arctan 9 + (1/2)\arctan 3.$$

Esercizio 4

Osserviamo che la funzione proposta sarà continua nel punto $x = 1$, se si impone la condizione

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \equiv \alpha,$$

cioè

$$\begin{aligned}\alpha &= \lim_{x\to 1^+} \frac{1+\log[1+(x-1)]-x}{\sin^2(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1+(x-1)-(1/2)(x-1)^2-x}{(x-1)^2} \\ &= \lim_{x\to 1^+} -\frac{1}{2}\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2} = -\frac{1}{2},\end{aligned}$$

dove si è utilizzato lo sviluppo di Taylor al primo ordine per $\sin t$ ed al secondo ordine per $\log(1+t)$ (con $t = x-1$). In tutti gli altri punti del proprio insieme di definizione la funzione f è chiaramente continua.

A N A L I S I 1/B appello del 9 febbraio 1999	cognome e nome	firma

1. Stabilire se la seguente funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\log(1+3y^3)-x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0);\\ -1 & \text{se } (x,y)=(0,0);\end{cases}$$

è continua e differenziabile in $\mathbf{R}^2$. Calcolare inoltre le derivate direzionali di f nell'origine.

Fino a punti 9

---

2. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right]\mathrm{e}^{-4n}\log^2 n}{n+1}.$$

Fino a punti 9

---

3. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_1^3 \log\left(\frac{x^2+2x+3}{|x|}\right)\,dx$$

Fino a punti 6

---

4. Stabilire per quali valori del parametro α , la seguente funzione

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\mathrm{e}^{(x^2-1)}-x^2}{\cos(x-1)-1} & \text{se } 0<x<1;\\ \alpha & \text{se } x\geq 1;\end{cases}$$

risulta continua.

Fino a punti 6

Tempo: 3 ore	spazio riservato alla commissione	1.		2.		3.		4.		totale	

SOLUZIONI COMPITO B

Esercizio 1

La funzione proposta è chiaramente continua e differenziabile fuori dall'origine. Cominciamo quindi a studiare la continuità nell'origine: con un cambiamento in coordinate polari ed utilizzando lo sviluppo di Taylor al primo ordine per $\log(1+t)$ (con $t = 3\rho^3 \sin^3\theta$), ci si riconduce al calcolo del seguente limite

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\log(1+3\rho^3\sin^3\theta) - \rho^2}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{3\rho^3\sin^3\theta - \rho^2}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0^+} (3\rho\sin^3\theta - 1) = -1$$

indipendentemente da θ. Quindi la funzione è continua anche nell'origine. Osservando che $\nabla f(0,0) = (0,3)$, con un cambiamento in coordinate polari ed utilizzando lo sviluppo di Taylor al secondo ordine per $\log(1+t)$ (con $t = 3\rho^3\sin^3\theta$), per lo studio della differenziablità nell'origine ci si riconduce al calcolo del seguente limite

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\log(1+3\rho^3\sin^3\theta) - \rho^2 + \rho^2 - 3\rho^3\cos^2\theta\sin\theta - 3\rho^3\sin^3\theta}{\rho^3} =$$
$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{(9/2)\rho^6\sin^6\theta - 3\rho^3\cos^2\theta\sin\theta}{\rho^3} =$$
$$\lim_{\rho\to 0^+} ((9/2)\rho^3\sin^6\theta - 3\cos^2\theta\sin\theta) = -3\cos^2\theta\sin\theta \neq 0.$$

La funzione, quindi, non è differenziabile nell'origine. Per il calcolo delle derivate direzionali bisogna pertanto procedere mediante la definizione

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[\frac{\log(1+3t^3v_2^3) - t^2}{t^2} + 1\right] = \lim_{t\to 0} \frac{\log(1+3t^3v_2^3)}{t^3} = 3v_2^3.$$

Esercizio 2

Osserviamo che, per n sufficientemente grande, si ha

$$|a_n| = \left|\frac{(-1)^n e^{-4n}\log^2 n}{n+1}\right| = \frac{e^{-4n}\log^2 n}{n+1} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Poiché $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, dal criterio del confronto, si ottiene che la serie proposta converge assolutamente.

Esercizio 3

Osservando che l'integrale proposto può essere riscritto nel modo seguente:

$$\int_1^3 1 \, \log\left(\frac{x^2+2x+3}{x}\right)\, dx$$

e ricordando che 1 è la derivata della funzione $f(x) = x$, tramite un'integrazione per parti si ottiene:

$$\int_1^3 \log\left(\frac{x^2+2x+3}{|x|}\right)\, dx = x\log\left(\frac{x^2+2x+3}{x}\right)\Bigg|_1^3 - \int_1^3 \frac{x^2-3}{x^2+2x+3}\, dx$$
$$= \log 36 - \int_1^3 1\, dx + \int_1^3 \frac{2x+6}{x^2+2x+3}\, dx$$
$$= \log 36 - 2 + \int_1^3 \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\, dx + 2\int_1^3 \frac{1}{[\frac{1}{\sqrt{2}}(x+1)]^2+1}\, dx$$
$$= \log 36 - 2 + \log 3 + 2\sqrt{2}\arctan\frac{4}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{2}\arctan\frac{2}{\sqrt{2}}.$$

Esercizio 4

Osserviamo che la funzione proposta sarà continua nel punto $x = 1$, se si impone la condizione

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \equiv \alpha,$$

cioè

$$\begin{aligned}\alpha = \lim_{x\to 1^-} \frac{\exp(x^2-1) - x^2}{\cos(x-1) - 1} &= \lim_{x\to 1^-} \frac{[1 + (x^2-1) + (x^2-1)^2/2] - x^2}{-(x-1)^2/2} \\ = \lim_{x\to 1^-} -\frac{(x^2-1)^2/2}{(x-1)^2/2} &= \lim_{x\to 1^-} -\frac{(x+1)^2(x-1)^2}{(x-1)^2} = -4,\end{aligned}$$

dove si è utilizzato lo sviluppo di Taylor al secondo ordine per $\exp t$ (con $t = x^2 - 1$) e per $\cos t$ (con $t = x - 1$). In tutti gli altri punti del proprio insieme di definizione la funzione f è chiaramente continua.

A N A L I S I 1/C	cognome e nome	firma
appello del 9 febbraio 1999		

1. Stabilire se la seguente funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\log(1+2x^3)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0); \end{cases}$$

è continua e differenziabile in $\mathbf{R}^2$. Calcolare inoltre le derivate direzionali di f nell'origine.

Fino a punti 9

---

2. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\right] \mathrm{e}^{-n} \log^3 n}{n-1}.$$

Fino a punti 9

---

3. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_1^2 \log\left(\frac{x^2+x+1}{|x|}\right)\, dx$$

Fino a punti 6

---

4. Stabilire per quali valori del parametro α , la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^{(x-2)}-x+1}{x\sin^2(x^2-4)} & \text{se } 1 < x < 2; \\ \alpha & \text{se } x \geq 2; \end{cases}$$

risulta continua.

Fino a punti 6

Tempo: **3 ore**	spazio riservato alla commissione	1.	2.	3.	4.	totale

SOLUZIONI COMPITO C

Esercizio 1

La funzione proposta è chiaramente continua e differenziabile fuori dall'origine. Cominciamo quindi a studiare la continuità nell'origine: con un cambiamento in coordinate polari ed utilizzando lo sviluppo di Taylor al primo ordine per $\log(1+t)$ (con $t = 2\rho^3 \cos^3\theta$), ci si riconduce al calcolo del seguente limite

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\log(1+2\rho^3\cos^3\theta)}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{2\rho^3\cos^3\theta}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0^+} 2\rho\cos^3\theta = 0$$

indipendentemente da θ. Quindi la funzione è continua anche nell'origine. Osservando che $\nabla f(0,0) = (2,0)$, con un cambiamento in coordinate polari ed utilizzando lo sviluppo di Taylor al secondo ordine per $\log(1+t)$ (con $t = 2\rho^3\cos^3\theta$), per lo studio della differenziablità nell'origine ci si riconduce al calcolo del seguente limite

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\log(1+2\rho^3\cos^3\theta) - 2\rho^3\cos^3\theta - 2\rho^3\cos\theta\sin^2\theta}{\rho^3} =$$
$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{(-1/2)4\rho^6\cos^6\theta - 2\rho^3\cos\theta\sin^2\theta}{\rho^3} =$$
$$\lim_{\rho\to 0^+} (-2\rho^3\cos^6\theta - 2\cos\theta\sin^2\theta) = -2\cos\theta\sin^2\theta \neq 0.$$

La funzione, quindi, non è differenziabile nell'origine. Per il calcolo delle derivate direzionali bisogna pertanto procedere mediante la definizione

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \lim_{t\to 0} \frac{\log(1+2t^3v_1^3)}{t^3} = 2v_1^3.$$

Esercizio 2

Osserviamo che, per n sufficientemente grande, si ha

$$|a_n| = \left| \frac{(-1)^{n+1}\mathrm{e}^{-n}\log^3 n}{n-1} \right| = \frac{\mathrm{e}^{-n}\log^3 n}{n-1} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Poiché $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, dal criterio del confronto, si ottiene che la serie proposta converge assolutamente.

Esercizio 3

Osservando che l'integrale proposto può essere riscritto nel modo seguente:

$$\int_1^2 1 \ \log\left(\frac{x^2+x+1}{x}\right)\ dx$$

e ricordando che 1 è la derivata della funzione $f(x) = x$, tramite un'integrazione per parti si ottiene:

$$\int_1^2 \log\left(\frac{x^2+x+1}{x}\right)\ dx = x\log\left(\frac{x^2+x+1}{|x|}\right)\Bigg|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2-1}{x^2+x+1}\ dx$$
$$= \log\frac{49}{12} - \int_1^2 1\ dx + \int_1^2 \frac{x+2}{x^2+x+1}\ dx$$
$$= \log\frac{49}{12} - 1 + (1/2)\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\ dx + 2\int_1^2 \frac{1}{[\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})]^2+1}\ dx$$
$$= \log\frac{49}{12} - 1 + \log\sqrt{\frac{7}{3}} + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right) - \sqrt{3}\arctan\sqrt{3}.$$

Esercizio 4

Osserviamo che la funzione proposta sarà continua nel punto $x = 2$, se si impone la condizione

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2) \equiv \alpha,$$

cioè

$$\begin{aligned} \alpha = \lim_{x \to 2^-} \frac{\exp(x-2) - x + 1}{x \sin^2(x^2-4)} &= \lim_{x \to 2^-} \frac{1 + (x-2) + (1/2)(x-2)^2 - x + 1}{2(x^2-4)^2} \\ &= \lim_{x \to 2^-} \frac{1}{4} \frac{(x-2)^2}{(x-2)^2(x+2)^2} = \frac{1}{64}, \end{aligned}$$

dove si è utilizzato lo sviluppo di Taylor al primo ordine per $\sin t$ (con $t = x^2 - 4$) ed al secondo ordine per $\exp t$ (con $t = x - 2$). In tutti gli altri punti del proprio insieme di definizione la funzione f è chiaramente continua.

A N A L I S I 1/D	cognome e nome	firma
appello del 9 febbraio 1999		

1. Stabilire se la seguente funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{4y^3} - 1 + x^2 + y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0); \end{cases}$$

è continua e differenziabile in $\mathbf{R}^2$. Calcolare inoltre le derivate direzionali di f nell'origine.

Fino a punti 9

---

2. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos[(n+1)\pi] e^{-3n} \log^4 n}{2n}.$$

Fino a punti 9

---

3. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^2 \arctan\left(\frac{|x|}{2x+1}\right)\, dx$$

Fino a punti 6

---

4. Stabilire per quali valori del parametro α , la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + \log[1 + (4 - x^2)] - 4}{x[1 - \cos(x-2)]} & \text{se } 0 < x < 2; \\ \alpha & \text{se } 2 \leq x < 3; \end{cases}$$

risulta continua.

Fino a punti 6

Tempo: 3 ore	spazio riservato alla commissione	1.		2.		3.		4.		totale	

SOLUZIONI COMPITO D

Esercizio 1

La funzione proposta è chiaramente continua e differenziabile fuori dall'origine. Cominciamo quindi a studiare la continuità nell'origine: con un cambiamento in coordinate polari ed utilizzando lo sviluppo di Taylor al primo ordine per $\exp t$ (con $t = 4\rho^3 \sin^3\theta$), ci si riconduce al calcolo del seguente limite

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\exp(4\rho^3\sin^3\theta) - 1 + \rho^2}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{4\rho^3\sin^3\theta + \rho^2}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0^+} (4\rho\sin^3\theta + 1) = 1$$

indipendentemente da θ . Quindi la funzione è continua anche nell'origine. Osservando che $\nabla f(0,0) = (0,4)$, con un cambiamento in coordinate polari ed utilizzando lo sviluppo di Taylor al secondo ordine per $\exp t$ (con $t = 4\rho^3\sin^3\theta$), per lo studio della differenziablità nell'origine ci si riconduce al calcolo del seguente limite

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\exp(4\rho^3\sin^3\theta) - 1 + \rho^2 - \rho^2 - 4\rho^3\cos^2\theta\sin\theta - 4\rho^3\sin^3\theta}{\rho^3} =$$
$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{8\rho^6\sin^6\theta - 4\rho^3\cos^2\theta\sin\theta}{\rho^3} =$$
$$\lim_{\rho\to 0^+} (8\rho^3\sin^6\theta - 4\cos^2\theta\sin\theta) = -4\cos^2\theta\sin\theta \neq 0.$$

La funzione, quindi, non è differenziabile nell'origine. Per il calcolo delle derivate direzionali bisogna pertanto procedere mediante la definizione

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[\frac{\exp(4t^3v_2^3) - 1 + t^2}{t^2} - 1\right] = \lim_{t\to 0} \frac{\exp(4t^3v_2^3) - 1}{t^3} = 4v_2^3.$$

Esercizio 2

Osserviamo che, per n sufficientemente grande, si ha

$$|a_n| = \left|\frac{(-1)^{n+1}\mathrm{e}^{-3n}\log^4 n}{2n}\right| = \frac{\mathrm{e}^{-3n}\log^4 n}{2n} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Poiché $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, dal criterio del confronto, si ottiene che la serie proposta converge assolutamente.

Esercizio 3

Osservando che l'integrale proposto può essere riscritto nel modo seguente:

$$\int_0^2 1 \ \arctan\left(\frac{x}{2x+1}\right) \ dx$$

e ricordando che 1 è la derivata della funzione $f(x) = x$, tramite un'integrazione per parti si ottiene:

$$\begin{aligned}\int_0^2 \arctan\left(\frac{|x|}{2x+1}\right) \ dx &= x\arctan\left(\frac{x}{2x+1}\right)\Bigg|_0^2 - \int_0^2 \frac{x}{5x^2+4x+1} \ dx \\ &= 2\arctan\frac{2}{5} - \frac{1}{10}\int_0^2 \frac{10x+4}{5x^2+4x+1} \ dx + 2\int_0^2 \frac{1}{[5(x+\frac{2}{5})]^2+1} \ dx \\ &= 2\arctan\frac{2}{5} - \log\sqrt[10]{29} + \frac{2}{5}\arctan 12 - \frac{2}{5}\arctan 2.\end{aligned}$$

Esercizio 4

Osserviamo che la funzione proposta sarà continua nel punto $x = 1$, se si impone la condizione

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2) \equiv \alpha,$$

cioè

$$\begin{aligned} \alpha = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 + \log[1 + (4 - x^2)] - 4}{x[1 - \cos(x-2)]} &= \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 + (4 - x^2) - (4 - x^2)^2/2 - 4}{x[1 - 1 + (x-2)^2/2]} \\ = \lim_{x \to 2^-} - \frac{(4 - x^2)^2/2}{(x-2)^2} = \lim_{x \to 2^-} - \frac{(2-x)^2(2+x)^2}{2(x-2)^2} &= -8, \end{aligned}$$

dove si è utilizzato lo sviluppo di Taylor al secondo ordine per $\log(1+t)$ (con $t = 4 - x^2$) e per $\cos t$ (con $t = x - 2$). In tutti gli altri punti del proprio insieme di definizione la funzione f è chiaramente continua.

A N A L I S I 1	cognome e nome	firma
appello del 2 Giugno 1999		

1. Sia data

$$F(x) = \int_3^x \left(\sin^2 t\right) \log(t-2)\ dt.$$

(a) Determinare campo di esistenza, segno, monotonia e punti di flesso a tangente orizzontale.

(b) Sapendo che $\lim_{x\to 2^+} F(x) = \alpha \in (0,+\infty)$ e $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$, tracciare il grafico qualitativo di F , evidenziando anche il comportamento della derivata per $x \to 2^+$.

(c) Calcolare $\lim_{x\to 3} F(x)/(x-3)^2$.

Fino a punti 9

---

2. Calcolare , in dipendenza del parametro reale α , il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\log n^\alpha + \frac{1}{n^{\alpha+1}} \right).$$

Fino a punti 9

---

3. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_1^{e^{2\pi}} \frac{\sin(\log x)}{x} \log x\ dx$$

Fino a punti 6

---

4. Stabilire l'ordine di infinitesimo della funzione

$$\frac{(e^{x^2}-1)x - x^3}{x(\sqrt{x} - \sin\sqrt{x})}$$

per $x \to 0$, rispetto all'infinitesimo campione x .

Fino a punti 6

Tempo: 3 ore	spazio riservato alla commissione	1.	2.	3.	4.	totale

SOLUZIONI COMPITO

Esercizio 1

C.E. $= (2, +\infty)$; $F(x) > 0 \;\; \forall x \in \text{C.E.} \setminus \{3\}$; $F(x) = 0$ per $x = 3$;

$F'(x) = f(x) = (\sin^2 x)\log(x-2)$;

$F'(x) > 0 \;\; x > 3,\; x \neq k\pi \;\; k \geq 1$; $F'(x) < 0 \;\; 2 < x < 3$; $F'(x) = 0 \;\; x = 3,\; k\pi \;\; k \geq 1$;

$x = 3$ punto di minimo assoluto, $x = k\pi \;\; k \geq 1$ punti di flesso a tangente orizzontale;

$\lim_{x\to 2^+} F'(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$.

Applicando due volte il teorema di De L'Hospital si ottiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3} \frac{F(x)}{(x-3)^2} &\overset{H}{=} \lim_{x\to 3} \frac{F'(x)}{2(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{f(x)}{2(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{(\sin^2 x)\log(x-2)}{2(x-3)} \\ &\overset{H}{=} \lim_{x\to 3} \frac{2\sin x \cos x \log(x-2) + (\sin^2 x)\frac{1}{x-2}}{2} = \frac{\sin^2 3}{2}.\end{aligned}$$

Esercizio 2

Poniamo per semplicità

$$a_n(\alpha) = \log n^\alpha + \frac{1}{n^{\alpha+1}}.$$

Osserviamo che per $\alpha > -1$ il termine $1/(n^{\alpha+1})$ tende sempre a zero. Inoltre $\log n^\alpha = \alpha \log n$, pertanto il limite proposto sarà

$$\begin{aligned} &\text{per} \quad \alpha > 0 \quad \lim a_n(\alpha) = +\infty, \\ &\text{per} \quad \alpha = 0 \quad \lim a_n(\alpha) = 0, \\ &\text{per} \quad -1 < \alpha < 0 \quad \lim a_n(\alpha) = -\infty. \end{aligned}$$

Si osserva, inoltre, facilmente che il limite proposto è uguale a $-\infty$ anche per $\alpha = -1$.
Infine per $\alpha < -1$, il termine $1/(n^{\alpha+1})$ si può riscrivere come $n^{|\alpha+1|}$ ed il suo limite è sempre $+\infty$. D'altra parte $\alpha \log n \to -\infty$. Siamo quindi di fronte ad un caso di indeterminazione della forma $-\infty + \infty$, ma ricordando che qualunque potenza positiva di n tende a $+\infty$ più velocemente di $\log n$, si ottiene che in questo caso il limite proposto è ancora $+\infty$. Ricapitolando:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\log n^\alpha + \frac{1}{n^{\alpha+1}}\right) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < -1,\; \alpha > 0; \\ 0 & \text{se } \alpha = 0; \\ -\infty & \text{se } -1 \leq \alpha < 0. \end{cases}$$

Esercizio 3

Osservando che $1/x$ è la derivata di $\log x$ ed effettuando la sostizione $t = \log x$, si ottiene

$$\int_1^{e^{2\pi}} \frac{\sin(\log x)}{x} \log x \; dx = \int_0^{2\pi} t \sin t \; dt.$$

Integrando per parti l'ultima espressione, si ottiene

$$\int_0^{2\pi} t \sin t \; dt = (-t\cos t + \sin t)\Big|_0^{2\pi} = -2\pi.$$

Esercizio 4

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per e^t , con $t = x^2$ e quello al terzo ordine per $\sin t$, con $t = \sqrt{x}$, si ottiene

$$f(x) \sim \frac{(1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 - 1)x - x^3}{x(\sqrt{x} - \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x^3}}{3!})} = \frac{\frac{1}{2}x^5}{\frac{1}{6}x^{5/2}} = 3x^{5/2}.$$

Quindi l'ordine di infinitesimo richiesto è $5/2$.

A N A L I S I 1	cognome e nome	firma
appello del 17 Giugno 1999		

1. Sia data

$$f(x) = \log(3 - |2x+1|).$$

Determinare campo di esistenza, segno, limiti alla frontiera, eventuali asintoti e monotonia di f. Tracciarne il grafico qualitativo.

Fino a punti 9

---

2. Trovare le soluzioni della seguente equazione in campo complesso:

$$(z-2i)^2 + 2 + 2\sqrt{3}i = 0.$$

Fino a punti 6

---

3. Stabilire per quali valori del parametro reale x la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left[\frac{e^{n(x^2+x-1)}}{2n}\right].$$

coverge assolutamente e semplicemente.

Fino a punti 9

---

4. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{(x^2-6x+9)^2}{[e^{(x^2-9)}-1]^4}.$$

Fino a punti 6

Tempo: **3 ore**	spazio riservato alla commissione	1.		2.		3.		4.		totale	

SOLUZIONI COMPITO

Esercizio 1

$$\text{C.E.} = (-2,1); \qquad f(x) = \begin{cases} \log(2-2x) & \text{se } -1/2 \le x < 1; \\ \log(4+2x) & \text{se } -2 < x < -1/2; \end{cases}$$

$f(x) > 0$ se $x \in (-3/2, 1/2)$; $f(x) < 0$ se $x \in (-2, -3/2) \cup (1/2, 1)$;

$f(x) = 0$ se $x = -3/2, 1/2$;

$\lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, $x = -2, 1$ sono asintoti verticali;

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-2}{2-2x} & \text{se } -1/2 < x < 1; \\ \frac{2}{2x+4} & \text{se } -2 < x < -1/2; \end{cases}$$

$f'(x) < 0 \quad -1/2 < x < 1$, $\quad f'(x) > 0 \quad -2 < x < -1/2$;

$\lim_{x\to -1/2^\pm} f'(x) = \mp 2/3$; $\quad x = -1/2$ punto angoloso.

Esercizio 2

Ponendo $w = z - 2i$ si ottiene l'equazione di secondo grado

$$w^2 = -2 - 2\sqrt{3}i = 4\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$$

che ha come soluzioni

$$w_1 = 2[\cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)] \qquad w_2 = 2[\cos(5\pi/3) + i\sin(5\pi/3)],$$

da cui

$$z_1 = 2i + 2[-1/2 + i\sqrt{3}/2)] = -1 + i(2+\sqrt{3}) \qquad z_2 = 2i + 2[1/2 - i\sqrt{3}/2)] = 1 + i(2-\sqrt{3}).$$

Esercizio 3

Ponendo $a_n(x) = (-1)^n \left[\frac{e^{n(x^2+x-1)}}{2n}\right]$, dal criterio della radice si ottiene che, se

$$1 > \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n(x)|} = e^{(x^2+x-1)}$$

allora la serie convergerà assolutamente.

Ciò porta alla condizione $x^2+x-1 < 0$ ovvero $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Se $x < (-1-\sqrt{5})/2$ oppure $x > (-1+\sqrt{5})/2$, il termine generale non tende a zero e quindi, non essendo soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza della serie, essa non convergerà neppure semplicemente. Infine per $x = (-1\pm\sqrt{5})/2$, $a_n(x) = \frac{(-1)^n}{2n}$, e quindi la serie converge semplicemente per il criterio di Leibnitz.

Esercizio 4

Ponendo $t = x^2 - 9$ e utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per e^t si ottiene

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{(x^2-6x+9)^2}{[e^{(x^2-9)} - 1]^4} = \lim_{x\to 3^+} \frac{(x-3)^4}{(x-3)^4(x+3)^4} = \frac{1}{1296}.$$

A N A L I S I 1/A appello del 1 Luglio 1999	cognome e nome firma

1. Sia data

$$F(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{x} (t^2 - \frac{1}{4}) e^{2t^4} \, dt.$$

(a) Determinare campo di esistenza, monotonia, concavità e convessità di F .
(b) Dimostrare che $\lim_{x\to\pm\infty} F(x) = \pm\infty$ e che F non ammette asintoti obliqui.
(c) Tracciare il grafico qualitativo di F .

Fino a punti 9

---

2. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^4 + 3x^3 & \text{per } x \geq 0; \\ \frac{\log(1+x^2)-x^2}{\sqrt[3]{x}} & \text{per } x < 0; \end{cases}$$

(a) stabilire se f è continua su $\mathbf{R}$;
(b) calcolare la derivata destra e sinistra di f in $x = 0$;
(c) stabilire se f è derivabile in $\mathbf{R}$.

Fino a punti 9

---

3. Calcolare

$$\int_0^1 t \left(e^{(1+t^2)} + \frac{t}{1+t^3} \right) \, dt.$$

Fino a punti 6

---

4. Stabilire per quali valori del parametro reale α la funzione

$$f_\alpha(x,y) = e^{\alpha y^2} \log[1 + |x|^{\alpha^2+2/3}]$$

ammette entrambe le derivate parziali nel punto $P_0 = (0,0)$ e per tali valori di α calcolarle.

Fino a punti 6

Tempo: 3 ore	spazio riservato alla commissione	1.		2.		3.		4.		totale	

SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1

$$\text{C.E.} = (-\infty, +\infty); \qquad F'(x) = f(x) = (x^2 - \frac{1}{4})\mathrm{e}^{2x^4};$$
$$F'(x) > 0 \quad x < -\frac{1}{2} \quad x > \frac{1}{2}; \qquad F'(x) < 0 \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2};$$
$$F'(x) = 0 \quad x = \pm\frac{1}{2} \ \text{ rispettivamente punto di minimo e di massimo;}$$
$$F''(x) = f'(x) = 2x(4x^4 - x^2 + 1)\mathrm{e}^{2x^4};$$
$$F''(x) > 0 \ \ x > 0; \qquad F''(x) < 0 \ \ x < 0; \qquad F''(x) = 0 \ \ x = 0.$$

Osserviamo anche che $F(x) = 0$ per $x = \frac{1}{2}$ ed inoltre, poichè $f(t) > 0$ per $t < -\frac{1}{2}$ e $t > \frac{1}{2}$ ed $f(t) < 0$ per $-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$, ne consegue che $F(x) > 0$ per $x > \frac{1}{2}$ e almeno per $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$. Poichè F è convessa e crescente per $x \to +\infty$, essa ammette necessariamente limite pari a $+\infty$; analogamente, poichè F è concava e decrescente per $x \to -\infty$, essa ammette necessariamente limite pari a $-\infty$. Infine, poichè

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{F(x)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to\pm\infty} F'(x) = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty,$$

F non ammette asintoti obliqui all'infinito.

Esercizio 2

Ovviamente la funzione proposta è continua e derivabile in ogni punto di $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, in quanto composizione di funzioni continue e derivabili. Pertanto bisogna solo studiare il comportamento di f nell'origine. Ovviamente $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$. Ricordando poi lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per $\log(1+t)$ con $t = x^2$, si ottiene che

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 - x^4/2 - x^2}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{x^{11/3}}{2} = 0 = f(0).$$

Quindi f è continua anche nell'origine.
Utilizzando i calcoli appena fatti e la definizione di derivata sinistra e destra, si ottiene

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{x^{11/3}}{2x} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{x^{8/3}}{2} = 0;$$
$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^4 + 3x^3}{x} = \lim_{x\to 0^+} 3x^2 = 0.$$

Poichè $f'_-(0) = 0 = f'_+(0)$, la funzione risulta derivabile anche nell'origine.

Esercizio 3

Osserviamo che

$$\int_0^1 t\left(\mathrm{e}^{(1+t^2)} + \frac{t}{1+t^3}\right)\, dt = \int_0^1 t\mathrm{e}^{(1+t^2)}\, dt + \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^3}\, dt$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{(1+t^2)}\Big|_0^1 + \frac{1}{3}\log(1+t^3)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}) + \frac{1}{3}\log 2.$$

Esercizio 4

È immediato verificare che $\dfrac{\partial f_\alpha}{\partial y}(0,0) = 0$. Calcoliamo quindi l'altra derivata parziale.

$$(*) \qquad \frac{\partial f_\alpha}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f_\alpha(t,0) - f_\alpha(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\log(1 + |t|^{\alpha^2/2+2/3})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|^{\alpha^2+2/3}}{|t|}\mathrm{sign}(t),$$

ove, nell'ultimo passaggio, si è utilizzato lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per $\log(1+x)$ con $x = |t|^{\alpha^2+2/3}$. Da $(*)$ si ottiene facilmente che la derivata parziale rispetto ad x di f_α nell'origine esiste se e solo se $\alpha^2 - 1/3 > 0$, cioè per $\alpha < -1/\sqrt{3}$ e $\alpha > 1/\sqrt{3}$. In tal caso si ottiene che $\dfrac{\partial f_\alpha}{\partial x}(0,0) = 0$.

A N A L I S I 1/B appello del 1 Luglio 1999	cognome e nome	firma

1. Sia data

$$F(x) = \int_0^x (t^2 - 1)e^{t^4} \, dt.$$

(a) Determinare campo di esistenza, monotonia, concavità e convessità di F.

(b) Dimostrare che $\lim_{x \to \pm\infty} F(x) = \pm\infty$ e che F non ammette asintoti obliqui.

(c) Tracciare il grafico qualitativo di F.

Fino a punti 9

---

2. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+x^3)-x^3}{\sqrt{x}} & \text{per } x > 0; \\ x^3 + 2x^4 & \text{per } x \leq 0; \end{cases}$$

(a) stabilire se f è continua su $\mathbf{R}$;

(b) calcolare la derivata destra e sinistra di f in $x = 0$;

(c) stabilire se f è derivabile in $\mathbf{R}$.

Fino a punti 9

---

3. Calcolare

$$\int_0^1 t \left[\frac{\log(1+t^2)+1}{1+t^2} \right] dt.$$

Fino a punti 6

---

4. Stabilire per quali valori del parametro reale α la funzione

$$f_\alpha(x,y) = e^{\alpha x^2} \log[1 + |y|^{2\alpha^2+1/2}]$$

ammette entrambe le derivate parziali nel punto $P_0 = (0,0)$ e per tali valori di α calcolarle.

Fino a punti 6

Tempo: 3 ore	spazio riservato alla commissione	1.	2.	3.	4.	totale

SOLUZIONI COMPITO B

Esercizio 1

$$\begin{aligned}
&\text{C.E.} = (-\infty, +\infty); \qquad F'(x) = f(x) = (x^2-1)\mathrm{e}^{x^4};\\
&F'(x) > 0 \quad x < -1 \;\; x > 1; \qquad F'(x) < 0 \quad -1 < x < 1;\\
&F'(x) = 0 \quad x = \pm 1 \;\; \text{rispettivamente punto di minimo e di massimo;}\\
&F''(x) = f'(x) = 2x(2x^4 - 2x^2 + 1)\mathrm{e}^{x^4};\\
&F''(x) > 0 \;\; x > 0; \qquad F''(x) < 0 \;\; x < 0; \qquad F''(x) = 0 \;\; x = 0.
\end{aligned}$$

Osserviamo anche $F(x) = 0$ per $x = 0$ ed inoltre poichè $f(t) < 0$ per $-1 < t < 1$ ne consegue che $F(x) > 0$ almeno per $-1 < x < 0$ ed $F(x) < 0$ almeno per $0 < x < 1$. Poichè F è convessa e crescente per $x \to +\infty$, essa ammette necessariamente limite pari a $+\infty$; analogamente, poichè F è concava e decrescente per $x \to -\infty$, essa ammette necessariamente limite pari a $-\infty$. Infine, poichè

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{F(x)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to\pm\infty} F'(x) = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty,$$

F non ammette asintoti obliqui all'infinito.

Esercizio 2

Ovviamente la funzione proposta è continua e derivabile in ogni punto di $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, in quanto composizione di funzioni continue e derivabili. Pertanto bisogna solo studiare il comportamento di f nell'origine. Ovviamente $\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 0$. Ricordando poi lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per $\log(1+t)$ con $t = x^3$, si ottiene che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3 - x^6/2 - x^3}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{x^{11/2}}{2} = 0 = f(0).$$

Quindi f è continua anche nell'origine.
Utilizzando i calcoli appena fatti e la definizione di derivata sinistra e destra, si ottiene

$$\begin{aligned}
f'_+(0) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^{11/2}}{2x} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^{9/2}}{2} = 0;\\
f'_-(0) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3+2x^4}{x} = \lim_{x\to 0^-} x^2 = 0.
\end{aligned}$$

Poichè $f'_-(0) = 0 = f'_+(0)$, la funzione risulta derivabile anche nell'origine.

Esercizio 3

Osserviamo che

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t\left[\frac{\log(1+t^2)+1}{1+t^2}\right] dt &= \int_0^1 \left(\frac{t}{1+t^2}\right)\log(1+t^2)\, dt + \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\, dt\\
&= \frac{1}{4}\log^2(1+t^2)\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\log(1+t^2)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}\log^2 2 + \frac{1}{2}\log 2.
\end{aligned}$$

Esercizio 4

È immediato verificare che $\dfrac{\partial f_\alpha}{\partial x}(0,0) = 0$. Calcoliamo quindi l'altra derivata parziale.

$$(*) \qquad \frac{\partial f_\alpha}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f_\alpha(0,t) - f_\alpha(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\log(1 + |t|^{2\alpha^2+1/2})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|^{2\alpha^2+1/2}}{|t|}\mathrm{sign}(t),$$

ove, nell'ultimo passaggio, si è utilizzato lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per $\log(1+x)$ con $x = |t|^{2\alpha^2+1/2}$. Da $(*)$ si ottiene facilmente che la derivata parziale rispetto ad x di f_α esiste se e solo se $2\alpha^2 - 1/2 > 0$, cioè per $\alpha < -1/2$ e $\alpha > 1/2$. In tal caso si ottiene che $\dfrac{\partial f_\alpha}{\partial y}(0,0) = 0$.

A N A L I S I 1/A	cognome e nome	firma
appello del 13 Luglio 1999		

1. Sia data

$$f(x) = \arctan \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Determinare campo di esistenza, segno, limiti alla frontiera, eventuali asintoti, monotonia, concavità e convessità di f e tracciarne il grafico qualitativo.

Fino a punti 9

---

2. Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{1}{\tan x + \cos x}\, dx$$

Fino a punti 9

---

3. Calcolare

$$\sqrt[7]{(-1+\sqrt{3}i)^7}.$$

Fino a punti 6

---

4. Stabilire per quali valori del parametro reale x la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x-12|^{n+1}}{2n^2 \mathrm{e}^{-n}}$$

converge.

Fino a punti 6

Tempo: **3 ore**	spazio riservato alla commissione	1.	2.	3.	4.	totale

SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1

C.E. $= \mathbf{R}$; $\quad f(x) > 0 \ \ \forall x \in \mathbf{R}$; $\quad f(x)$ pari;

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0^+$, $\ y = 0$ asintoto orizzontale a $\pm\infty$;

$f'(x) = -\dfrac{x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+1}}$; $\quad f'(x) > 0 \ \ x < 0$, $\quad f'(x) < 0 \ \ x > 0$, $\quad f'(x) = 0 \ \ x = 0$;

$f''(x) = \dfrac{2x^4 + x^2 - 2}{(x^2+2)^2(x^2+1)^{3/2}}$; $\quad f''(x) = 0 \ \ x = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{17}-1}{4}} := \pm\alpha$;

$f''(x) < 0 \ \ -\alpha < x < \alpha$, $\quad f''(x) > 0 \ \ x < -\alpha, \ x > \alpha$.

Esercizio 2

Ricordando che $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, l'integrale proposto si può riscrivere nella forma

$$\int \frac{\cos x}{\sin x + \cos^2 x}\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x + 1 - \sin^2 x}\, dx.$$

Osservando inoltre che $\cos x$ è la derivata di $\sin x$, si può effettuare il cambiamento di variabile $y = \sin x$, riconducendosi così al calcolo dell'integrale

$$\int \frac{1}{1+y-y^2}\, dy = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\int \frac{1}{y - \frac{1+\sqrt{5}}{2}}\, dy - \int \frac{1}{y - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}\, dy\right] = -\frac{1}{\sqrt{5}} \log\left|\frac{y - \frac{1+\sqrt{5}}{2}}{y - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right| + cost.$$

Pertanto

$$\int \frac{1}{\tan x + \cos x}\, dx = (1/\sqrt{5}) \log\left|\frac{\sin x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sin x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right| + cost.$$

Esercizio 3

Ponendo $z = -1 + \sqrt{3}i$, si ottiene subito che $\rho = |z| = 2$ e $\theta = \arg z = 2\pi/3$. Pertanto, indicando con w_k, $\ k = 0, \ldots, 6$ le 7 radici complesse del numero dato, si ha

$$w_k = \sqrt[7]{2^7}\mathrm{e}^{i\left(\frac{14\pi/3 + 2k\pi}{7}\right)} = 2\mathrm{e}^{i\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{2k\pi}{7}\right)} \qquad k = 0, \ldots, 6.$$

Esercizio 4

Dal criterio della radice si ottiene che la serie converge per tutti gli $x \in \mathbf{R}$ tali che

$$1 > \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{|x-12|^{n+1}}{2n^2\mathrm{e}^{-n}}} = \mathrm{e}|x-12|$$

cioè per $12 - 1/\mathrm{e} < x < 12 + 1/\mathrm{e}$, mentre diverge per tutti gli $x \in \mathbf{R}$ tali che $x < 12 - 1/\mathrm{e}$ oppure $x > 12 + 1/\mathrm{e}$. Infine nei punti $x = 12 \pm 1/\mathrm{e}$ si vede facilmente che la serie è ancora convergente.

A N A L I S I 1/B	cognome e nome	firma
appello del 13 Luglio 1999		

1. Sia data

$$f(x) = \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\right).$$

Determinare campo di esistenza, segno, limiti alla frontiera, eventuali asintoti, monotonia, concavità e convessità di f e tracciarne il grafico qualitativo.

Fino a punti 9

---

2. Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{1}{2\tan x + 3\cos x}\, dx$$

Fino a punti 9

---

3. Calcolare

$$\sqrt[7]{(-\sqrt{3}+i)^7}.$$

Fino a punti 6

---

4. Stabilire per quali valori del parametro reale x la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x-12|^{n+2}}{n^3 e^{2n}}$$

converge.

Fino a punti 6

Tempo: **3 ore**	spazio riservato alla commissione	1.	2.	3.	4.	totale

SOLUZIONI COMPITO B

Esercizio 1

C.E. $= \mathbf{R}$; $\quad f(x) < 0 \ \ \forall x \in \mathbf{R}$; $\quad f(x)$ pari;

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0^-$, $\ y = 0$ asintoto orizzontale a $\pm\infty$;

$f'(x) = \dfrac{x}{(x^2+5)\sqrt{x^2+4}}$; $\quad f'(x) > 0 \ \ x > 0$, $\quad f'(x) < 0 \ \ x < 0$, $\quad f'(x) = 0 \ \ x = 0$;

$f''(x) = -2\dfrac{x^4 + 2x^2 - 10}{(x^2+5)^2(x^2+4)^{3/2}}$; $\quad f''(x) = 0 \ \ x = \pm\sqrt{\sqrt{11}-1} := \pm\alpha$;

$f''(x) > 0 \ \ -\alpha < x < \alpha$, $\quad f''(x) < 0 \ \ x < -\alpha, \ x > \alpha$.

Esercizio 2

Ricordando che $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, l'integrale proposto si può riscrivere nella forma

$$\int \frac{\cos x}{2\sin x + 3\cos^2 x}\, dx = \int \frac{\cos x}{2\sin x + 3 - 3\sin^2 x}\, dx.$$

Osservando inoltre che $\cos x$ è la derivata di $\sin x$, si può effettuare il cambiamento di variabile $y = \sin x$, riconducendosi così al calcolo dell'integrale

$$\int \frac{1}{3 + 2y - 3y^2}\, dy = -\frac{1}{2\sqrt{10}}\left[\int \frac{1}{y - \frac{1+\sqrt{10}}{3}}\, dy - \int \frac{1}{y - \frac{1-\sqrt{10}}{3}}\, dy\right]$$
$$= -\frac{1}{2\sqrt{10}} \log\left|\frac{y - \frac{1+\sqrt{10}}{3}}{y - \frac{1-\sqrt{10}}{3}}\right| + cost.$$

Pertanto

$$\int \frac{1}{2\tan x + 3\cos x}\, dx = (1/2\sqrt{10}) \log\left|\frac{\sin x - \frac{1-\sqrt{10}}{3}}{\sin x - \frac{1+\sqrt{10}}{3}}\right| + cost.$$

Esercizio 3

Ponendo $z = -\sqrt{3} + i$, si ottiene subito che $\rho = |z| = 2$ e $\theta = \arg z = 5\pi/6$. Pertanto, indicando con w_k, $\ k = 0, \ldots, 6$ le 7 radici complesse del numero dato, si ha

$$w_k = \sqrt[7]{2^7} \mathrm{e}^{i\left(\frac{35\pi/6 + 2k\pi}{7}\right)} = 2\mathrm{e}^{i\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{2k\pi}{7}\right)} \qquad k = 0, \ldots, 6.$$

Esercizio 4

Dal criterio della radice si ottiene che la serie converge per tutti gli $x \in \mathbf{R}$ tali che

$$1 > \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{|x-12|^{n+2}}{n^3 \mathrm{e}^{2n}}} = \frac{|x-12|}{\mathrm{e}^2}$$

cioè per $12 - \mathrm{e}^2 < x < 12 + \mathrm{e}^2$, mentre diverge per tutti gli $x \in \mathbf{R}$ tali che $x < 12 - \mathrm{e}^2$ oppure $x > 12 + \mathrm{e}^2$. Infine nei punti $x = 12 \pm \mathrm{e}^2$ si vede facilmente che la serie è ancora convergente.

A N A L I S I 1/A	cognome e nome	firma
appello del 22 Settembre 1999		

1. Sia data

$$f(x) = \sqrt{|x-2|-2}.$$

Determinare campo di esistenza, segno, limiti alla frontiera, eventuali asintoti, monotonia, concavità e convessità di f e tracciarne il grafico qualitativo.

Fino a punti 9

---

2. Trovare le soluzioni della seguente equazione in campo complesso, esprimendole in forma trigonometrica:

$$z^4 - 4z^2 + 8 = 0.$$

Fino a punti 6

---

3. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^{\pi/4} \cos^6 x \tan^5 x \; dx.$$

Fino a punti 6

---

4. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x^2+1)^2 \sin(x-1)}{\sqrt{x}\log x}.$$

Fino a punti 9

Tempo: **3 ore**	spazio riservato alla commissione	1.	2.	3.	4.	totale

SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1

C.E. $= (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$; $\qquad f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4} & \text{se } x \geq 4; \\ \sqrt{-x} & \text{se } x \leq 0; \end{cases}$

$f(x) > 0 \;\; \forall x \in$ C.E. $\setminus \{0, 4\}$; $\;\; f(x) = 0$ per $x = 0, 4$;

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$, non ci sono asintoti obliqui a $\pm\infty$;

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x-4}} & \text{se } x > 4; \\ -\frac{1}{2\sqrt{-x}} & \text{se } x < 0; \end{cases}$$

$f'(x) < 0 \;\; x < 0$, $\quad f'(x) > 0 \;\; x > 4$; $\qquad \lim_{x \to 0^-} f'(x) = -\infty$; $\quad \lim_{x \to 4^+} f'(x) = +\infty$;

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4(x-4)^{3/2}} & \text{se } x > 4; \\ -\frac{1}{(-4x)^{3/2}} & \text{se } x < 0; \end{cases} \qquad f''(x) < 0 \;\; \forall x \in \text{C.E.} \setminus \{0, 4\};$$

Esercizio 2

Ponendo $w = z^2$ si ottiene l'equazione di secondo grado

$$w^2 - 4w + 8 = 0$$

che ha come soluzioni

$$w_1 = \sqrt{8}[\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)] \quad w_2 = \sqrt{8}[\cos(\pi/4) - i\sin(\pi/4)].$$

Estraendo poi le rispettive radici complesse, si ottiene

$$z_1 = \sqrt[4]{8}[\cos(\pi/8) + i\sin(\pi/8)] \quad z_2 = -\sqrt[4]{8}[\cos(\pi/8) + i\sin(\pi/8)]$$
$$z_3 = \sqrt[4]{8}[\cos(\pi/8) - i\sin(\pi/8)] \quad z_4 = -\sqrt[4]{8}[\cos(\pi/8) - i\sin(\pi/8)].$$

Esercizio 3

Ricordando che $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, l'integrale proposto diviene:

$$\int_0^{\pi/4} \cos x \; \sin^5 x \; dx = \frac{\sin^6 x}{6}\bigg|_0^{\pi/4} = \frac{1}{48}.$$

Esercizio 4

Osservando che $\log x = \log[1 + (x-1)]$, ponendo $t = x - 1$ e utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per $\sin t$ e $\log(1+t)$ si ottiene

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x^2+1)^2 \sin(x-1)}{\sqrt{x}\log x} = 4 \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x-1} = 4.$$

A N A L I S I 1/B	cognome e nome	firma
appello del 22 Settembre 1999		

1. Sia data

$$f(x) = \sqrt{|2x-5|-3}.$$

Determinare campo di esistenza, segno, limiti alla frontiera, eventuali asintoti, monotonia, concavità e convessità di f e tracciarne il grafico qualitativo.

Fino a punti 9

---

2. Trovare le soluzioni della seguente equazione in campo complesso, esprimendole in forma trigonometrica:

$$4z^4 - 16z^2 + 32 = 0.$$

Fino a punti 6

---

3. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^{\pi/3} \cos^4 x \tan^3 x \; dx.$$

Fino a punti 6

---

4. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}\sin^2(x-1)}{(x+1)^3 \log^2 x}.$$

Fino a punti 9

Tempo: **3 ore**	spazio riservato alla commissione	1.	2.	3.	4.	totale

SOLUZIONI COMPITO B

Esercizio 1

C.E. $= (-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$; $\qquad f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x-8} & \text{se } x \geq 4; \\ \sqrt{2-2x} & \text{se } x \leq 1; \end{cases}$

$f(x) > 0 \ \ \forall x \in$ C.E. $\setminus \{1, 4\}$; $\ f(x) = 0$ per $x = 1, 4$;

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$, non ci sono asintoti obliqui a $\pm\infty$;

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2x-8}} & \text{se } x > 4; \\ -\frac{1}{\sqrt{2-2x}} & \text{se } x < 1; \end{cases}$$

$f'(x) < 0 \ \ x < 1$, $\quad f'(x) > 0 \ \ x > 4$; $\qquad \lim_{x \to 1^-} f'(x) = -\infty$; $\quad \lim_{x \to 4^+} f'(x) = +\infty$;

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(2x-8)^{3/2}} & \text{se } x > 4; \\ -\frac{1}{(2-2x)^{3/2}} & \text{se } x < 1; \end{cases} \qquad f''(x) < 0 \ \ \forall x \in \text{C.E.} \setminus \{1, 4\};$$

Esercizio 2

Ponendo $w = z^2$ si ottiene l'equazione di secondo grado

$$4w^2 - 16w + 32 = 0$$

che ha come soluzioni

$$w_1 = \sqrt{8}[\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)] \quad w_2 = \sqrt{8}[\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)].$$

Estraendo poi le rispettive radici complesse, si ottiene

$$z_1 = \sqrt[4]{8}[\cos(\pi/8) + i\sin(\pi/8)] \quad z_2 = -\sqrt[4]{8}[\cos(\pi/8) + i\sin(\pi/8)]$$
$$z_3 = \sqrt[4]{8}[\cos(\pi/8) - i\sin(\pi/8)] \quad z_4 = -\sqrt[4]{8}[\cos(\pi/8) - i\sin(\pi/8)].$$

Esercizio 3

Ricordando che $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, l'integrale proposto diviene:

$$\int_0^{\pi/3} \cos x \ \sin^3 x \ dx = \frac{\sin^4 x}{4}\bigg|_0^{\pi/3} = \frac{9}{64}.$$

Esercizio 4

Osservando che $\log x = \log[1 + (x-1)]$, ponendo $t = x - 1$ e utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per $\sin t$ e $\log(1+t)$ si ottiene

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}\sin^2(x-1)}{(x+1)^3 \log^2 x} = \frac{1}{8} \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2} = \frac{1}{8}.$$