

ESERCIZI DI RICAPITOLAZIONE

Numeri Complessi

- Porre in forma trigonometrica i seguenti numeri complessi

$$5; \quad 1 + i; \quad \sqrt{2}.$$

- Calcolare

$$\sqrt[3]{-i}; \quad \sqrt{2-2i}; \quad \sqrt[4]{1+i\sqrt{3}}; \quad (1+i)^6; \quad (3-3i)^7.$$

- Risolvere le seguenti equazioni

$$1) \quad z|z| - 2z - 1 = 0$$

$$2) \quad z^2 + z\bar{z} = 1 + 2i$$

$$3) \quad z + i\bar{z}^2 = -2i$$

$$4) \quad |z|^2 z^2 = i$$

$$5) \quad z^4 = |z|^2 + 2$$

$$6) \quad z^3 \bar{z} + 3z^2 - 4 = 0$$

$$7) \quad z^2 + 2z + i = 0.$$

Serie Numeriche

- Studiare il carattere delle seguenti serie:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n(n + \sqrt{n})}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(1 + \frac{3}{n} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right); \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n^3 \pi^{-\arctan(1/n)}, \\ & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)}{n^2 - 35n + 250 - \cos n}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(2n)!}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-\ln n}, \\ & \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n \ln n} + \sin \left(n\pi + \frac{1}{n} \right) \right); \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2 + \cos n}{n^3 + 1}; \\ & \sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n^2 + n} - n) \left(n \tan \frac{1}{n} - 1 \right); \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{7n + 24}{n^2 + 7n + 12}. \end{aligned}$$

- Al variare del parametro reale x , studiare il carattere delle seguenti serie:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{+\infty} n^{10} \sin(n^2) \left[\left(\frac{7^n + 3^n}{5^n + 2^n} \right)^{\frac{1}{n}} - x \right]; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n^x + n^2 + 1}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\cosh \frac{n^2 + n}{n^3 + 3} - 1 \right)^x; \\
& \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \left(\frac{\sqrt{x^2 + 2}}{x^2} \right)^n + \left(\frac{\sqrt{2n^2 + 1}}{n^2} \right)^{x + \frac{1}{n}} \right\}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(1 + n^{2x})}{(n + \sin n)^{x^2}}; \\
& \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + \sin(n\pi + \frac{\pi}{2}x)}{(n+1)^x}, \quad x \in [0, 2]; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + |x|^n}{n^2 + 1}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[\ln(x + \frac{1}{n})]^n}{x^2 + n^2}, \quad x > 0; \\
& \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{|x|^n}{n} \right); \quad \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^2}{(x + \frac{1}{n})^{\ln n}}; \quad \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\ln n}{n} x^{(\ln n)^2}; \\
& \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} |n - x^2 + 3x|^{nx^3}; \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{(x - \frac{1}{n})^{\ln n}}; \quad \sum_{n=2}^{+\infty} (n - \sqrt[3]{n^3 - 2n})^x; \\
& \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n+1}}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{x^2}}{(n+x)^{\sqrt{13}x}}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\arctan x|^{3n}}{\sqrt{n(n+1)}}; \\
& \sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n^3 + (x^2 + 2)n^2 + 1} - \sqrt{n^3 + 3xn^2 - 4}); \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+10}{3^n(n+5)} (x^2 - 1)^{3n}.
\end{aligned}$$

- Dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n (\sin 1 \sin 2 \dots \sin n)^2}{(1 + x \cos^2 1)(1 + x \cos^2 2) \dots (1 + \cos^2 n)}$$

converge se $-1 < x < 1$.

- Sia $f(x)$ un polinomio di terzo grado, in cui il coefficiente del termine di grado massimo è positivo. Dire per quali valori del parametro x la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{f(n^{\sin x} \ln n) + 3n}.$$

converge semplicemente e per quali valori converge assolutamente.

Limiti

- Calcolare i seguenti limiti: (Ghizzetti-Rosati: Complementi ed esercizi di analisi matematica - Vol. I - Ed. Veschi)

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1)^x$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1)^{1/\sin^2 x}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \frac{x^2 + 1}{x + 1}\right)$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - (x + 1)^{1/x}}{x}$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{x + 1} - 2 \cos x - x}{(\arctan x)^2}$;
- 7) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^x}{1 - x + \log x}$;
- 8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\log(1 + \frac{1}{x})}$;
- 9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - x^2 \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]$;
- 10) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\arctan x)^{\tan x}$;
- 11) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x [\log(1 + x)]^2$;
- 12) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{\frac{1}{\log(\cos x)}}$;
- 13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} + \cos x - 2}{(\arcsin x)^4}$;
- 14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^{1/x} \sqrt{1 + x} - e}{x^2}$;
- 15) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(\log x)^{2/3} + (1 - x^2)^{3/4}}{[\sin(x - 1)]^{2/3}}$;
- 16) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x + x^2) + \log(1 - x + x^2)}{\sin^2 x}$;
- 17) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2}$;
- 18) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\log x}{x}\right)^{1/x}$;
- 19) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{1/x}$.

Funzioni di 1 Variabile

- Scrivere la retta tangente al grafico della funzione $y = x^2 + 2x$ nel punto $(1, 3)$.

- Studiare le seguenti funzioni e tracciarne un grafico qualitativo:

$$1) \quad f(x) = x^2 - 2x + |x|;$$

$$2) \quad f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1;$$

$$3) \quad f(x) = xe^{-x+1};$$

$$4) \quad f(x) = xe^{x^2};$$

$$5) \quad f(x) = x^{2/3}(1-x).$$

- Stabilire se la seguente funzione è continua:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \geq 1, \\ \sin x + \log(1 + |x|) - \log 2 & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

- Stabilire se le seguenti funzioni sono continue e derivabili:

$$1) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 1 & \text{se } x = 0; \end{cases}$$

$$2) \quad f(x) = \begin{cases} \left(1 + \frac{3}{x-1}\right)^{(x-1)} & \text{se } x > 1, \\ 2 - x^2 & \text{se } x \leq 1. \end{cases}$$

- Determinare per quale valore del parametro reale α le seguenti funzioni risultano continue:

$$1) \quad f(x) = \begin{cases} (1 + 3x)^{1/x} & \text{se } x > 0, \\ \alpha & \text{se } x \leq 0; \end{cases}$$

$$2) \quad f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x-1} & \text{se } x \neq 1, \\ \alpha & \text{se } x = 1; \end{cases}$$

$$3) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} & \text{se } x > 0, \\ \alpha + 3x - e^2 & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

- Determinare per quali valori dei parametri reali α e β le seguenti funzioni risultano continue e derivabili:

$$1) \quad f(x) = \begin{cases} (e^x - 1)^{\sin^2 x} & \text{se } x > 0, \\ \alpha(x+1)^2 + \beta x & \text{se } x \leq 0; \end{cases}$$

$$2) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{(e^{x-2}-1)^\alpha}{\sin(x-2)} & \text{se } x > 2, \\ \beta x^2 + 1 - 4\beta & \text{se } x \leq 2; \end{cases}$$

$$3) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\log(2+x)}{(x+1)^\alpha} & \text{se } x > -1, \\ \beta x + x^2 - \beta & \text{se } x \leq -1; \end{cases}$$

$$4) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha(e^{x-2}-1)}{[\log(x-1)]^\beta} & \text{se } x > 2, \\ 2x + 3 & \text{se } x \leq 2. \end{cases}$$

Funzioni Integrali

- Studiare le seguenti funzioni e tracciarne un grafico qualitativo:

$$1) F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt,$$

sapendo che $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \alpha > 0$;

$$2) F(x) = \int_{-1}^x \frac{1}{t^{2/3}(1-t)^{1/3}} dt,$$

sapendo che $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \alpha > 0$;

$$3) F(x) = \int_{1/2}^{x^2} \frac{1}{t\sqrt{1-t}} dt,$$

sapendo che $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \alpha > 0$;

$$4) F(x) = \int_2^x \frac{\ln(t-1)}{1+t^2} dt,$$

sapendo che $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \alpha > 0$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \beta > 0$.

Stabilire inoltre se la funzione di cui al punto 1) ammette un asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$ e se la funzione di cui al punto 2) ammette un asintoto obliquo per $x \rightarrow -\infty$.

Integrali Indefiniti

$$1) \int \frac{\ln x}{x(1+\ln x)} dx;$$

$$2) \int \frac{\cos x \sin x}{(1+\cos^2 x)(1+\cos x)} dx;$$

$$3) \int \frac{\sqrt{x}+1}{x^{3/2}-1} dx;$$

$$4) \int \frac{e^x+2}{e^x(e^x+1)} dx;$$

$$5) \int \frac{1}{\tan x - \sin x} dx.$$

Integrali Definiti

$$1) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{(1+\sin t)(2+\sin t)} dt;$$

$$2) \int_0^1 \frac{e^t+e^{-t}}{e^t+1} dt;$$

$$3) \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin 2t \ln(\sin t) dt;$$

$$4) \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin t} dt;$$

$$5) \int_{3 \cosh 1}^3 \frac{1}{\sqrt{t^2-9}} dt.$$

Funzioni di 2 Variabili

• Determinare gli insiemi di definizione delle seguenti funzioni di 2 variabili e darne una rappresentazione nel piano:

$$\begin{aligned}
 1) f(x, y) &= (xy)^{3x-1}; \\
 2) f(x, y) &= \sqrt{x+y^2-2y} \ln_{x^2+y^2-1}(24); \\
 3) f(x, y) &= \frac{\arcsin(x+y)}{\sqrt[3]{9x^2+9y^2-1}}; \\
 4) f(x, y) &= \arccos[\tan(4y+x-\pi/4)]; \\
 5) f(x, y) &= \tan\left[\frac{\pi}{2} \arcsin(x^2+y)\right];
 \end{aligned}$$

• Calcolare i seguenti limiti:

$$\begin{aligned}
 1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2} \sin\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right); \\
 2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{x^2+y^2+1}; \\
 3) \lim_{|(x,y)| \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{(x^2+y^2)^2}; \\
 4) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{\sin^2(x+y-2)}{(x-1)^2+y^2-2y+1}; \\
 5) \lim_{|(x,y)| \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{x^2+y^2};
 \end{aligned}$$

• Stabilire se le seguenti funzioni sono continue:

$$\begin{aligned}
 1) f(x, y) &= \begin{cases} (x^2+y^2) \cos \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0; \\ 0 & \text{se } x = 0; \end{cases} \\
 2) f(x, y) &= \begin{cases} \frac{x+y}{x-y} & \text{se } x \neq y; \\ 0 & \text{se } x = y; \end{cases} \\
 3) f(x, y) &= \begin{cases} \frac{\exp[y^2/(x^2+y^2)^{2/3}]}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0); \end{cases} \\
 4) f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy^3+y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0); \end{cases} \\
 5) f(x, y) &= \begin{cases} \arctan \frac{x}{|y|} & \text{se } y \neq 0; \\ \pi/2 & \text{se } y = 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

• Stabilire se le seguenti funzioni sono differenziabili e calcolare, qualora esistano, le derivate direzionali:

$$\begin{aligned}
 1) f(x, y) &= \begin{cases} \left| |x| + |y| \right| e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0); \end{cases} \\
 2) f(x, y) &= \begin{cases} \left(\frac{x^2 y}{x^4+y^2} \right)^2 & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0); \end{cases} \\
 3) f(x, y) &= |x|e^y \\
 4) f(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0); \end{cases} \\
 5) f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}
 \end{aligned}$$

- Date $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)$ e $g \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$, calcolare $\phi'(0)$ quando

1) $\phi(x) = f(g(x), g^2(x))$, sapendo che

$$\nabla f(-1, 1) = (1, 1) \quad g(0) = -1 \quad g'(0) = 2.$$

2) $\phi(x) = f\left(e^{g(x)}, \frac{1}{g^2(x)+1}\right)$, sapendo che

$$\nabla f(1, 1) = (0, 1) \quad g(0) = 0 \quad g'(0) = 4.$$

- Data

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^{3/2} e^y}{(x^2+y^2)^{1/2}} & \text{se } x \neq 0; \\ 0 & \text{se } x = 0; \end{cases}$$

- (i) stabilire se f è continua su \mathbb{R}^2 ;
- (ii) calcolare il $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(P_n)$, ove $P_n = (e^n, 0)$;
- (iii) determinare il codominio di f .

- Data

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\log(1-y^4)}{(x^2+y^2)} + e^x & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$$

- (i) determinare il massimo insieme $D \subseteq \mathbb{R}^2$ in cui f è definita e continua;
- (ii) calcolare il $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(P_n)$, ove $P_n = (n!, 0)$ e il $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(Q_n)$, ove $Q_n = (1/n, \sqrt[4]{1-1/n})$;
- (iii) determinare il codominio di f .

• Data la funzione $f(x, y) = e^{xy} + \sin x$, calcolare la derivata di f normale alla retta di equazione $3x + 6y - 6 = 0$, nel punto $(0, 1)$.

- Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$$

e la curva

$$\gamma = \begin{cases} (1+t) \sin t \\ t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

calcolare la derivata di f tangente alla curva assegnata, nel punto $(x, y) = (0, 0)$.