ESERCIZI DI RICAPITOLAZIONE

Numeri Complessi

• Porre in forma trigonometrica i seguenti numeri complessi

$$5; \qquad 1+i; \qquad \sqrt{2}.$$

• Calcolare

$$\sqrt[3]{-i}; \qquad \sqrt{2-2i}; \qquad \sqrt[4]{1+i\sqrt{3}}; \qquad (1+i)^6; \quad (3-3i)^7.$$

• Risolvere le seguenti equazioni

$$\begin{aligned}
&1) \quad z|z| - 2z - 1 = 0\\
&2) \quad z^2 + z\overline{z} = 1 + 2i\\
&3) \quad z + i\overline{z}^2 = -2i\\
&4) \quad |z|^2 z^2 = i\\
&5) \quad z^4 = |z|^2 + 2\\
&6) \quad z^3\overline{z} + 3z^2 - 4 = 0\\
&7) \quad z^2 + 2z + i = 0.
\end{aligned}$$

Serie Numeriche

• Studiare il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n(n+\sqrt{n})}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right); \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} n^3 \pi^{-\arctan(1/n)};$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)}{n^2-35n+250-\cos n}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(2n)!}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-\ln n};$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n\ln n} + \sin\left(n\pi + \frac{1}{n}\right)\right); \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2+\cos n}{n^3+1};$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n^2+n} - n)(n\tan\frac{1}{n} - 1); \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{7n+24}{n^2+7n+12}.$$

• Al variare del parametro reale x, studiare il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{10}\sin(n^2)\left[\left(\frac{7^n+3^n}{5^n+2^n}\right)^{\frac{1}{n}}-x\right]; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2+n+1}{n^x+n^2+1}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\cosh\frac{n^2+n}{n^3+3}-1\right)^x;$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\left(\frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2}\right)^n+\left(\frac{\sqrt{2n^2+1}}{n^2}\right)^{x+\frac{1}{n}}\right\}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln(1+n^{2x})}{(n+\sin n)^{x^2}};$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+\sin(n\pi+\frac{\pi}{2}x)}{(n+1)^x}, \quad x\in[0,2]; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+|x|^n}{n^2+1}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left[\ln(x+\frac{1}{n})\right]^n}{x^2+n^2}, \quad x>0;$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{|x|^n}{n}\right); \qquad \sum_{n=3}^{+\infty}\frac{n^2}{(x+\frac{1}{n})^{\ln n}}; \qquad \sum_{n=3}^{+\infty}\frac{\ln n}{n}x^{(\ln n)^2};$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}|n-x^2+3x|^{nx^3}; \qquad \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n}{(x-\frac{1}{n})^{\ln n}}; \qquad \sum_{n=2}^{+\infty}(n-\sqrt[3]{n^3-2n})^x;$$
$$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{x^{2^n}}{1+x^{2^{n+1}}}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^{x^2}}{(n+x)^{\sqrt{13x}}}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|\arctan x|^{3n}}{\sqrt{n(n+1)}};$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{n^3+(x^2+2)n^2+1}-\sqrt{n^3+3xn^2-4}); \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+10}{3^n(n+5)}(x^2-1)^{3n}.$$

• Dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n(\sin 1\sin 2\dots\sin n)^2}{(1+x\cos^2 1)(1+x\cos^2 2)\dots(1+\cos^2 n)}$$

converge se $-1<x<1$.

• Sia $f(x)$ un polinomio di terzo grado, in cui il coefficiente del termine di grado massimo è positivo. Dire per quali valori del parametro x la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{f(n^{\sin x}\ln n)+3n}.$$

converge semplicemente e per quali valori converge assolutamente.

Limiti

- Calcolare i seguenti limiti: (Ghizzetti-Rosati: Complementi ed esercizi di analisi matematica - Vol. I - Ed. Veschi)

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$;

2) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(\mathrm{e}^x-1)^x$;

3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(x^2+1)^{1/\sin^2 x}$;

4) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2+1}{x+1}\right)$;

5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}-(x+1)^{1/x}}{x}$;

6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{x+1}-2\cos x-x}{(\arctan x)^2}$;

7) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x-x^x}{1-x+\log x}$;

8) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}$;

9) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[x-x^2\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$;

10) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(\arctan x)^{\tan x}$;

11) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\log x[\log(1+x)]^2$;

12) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{\frac{1}{\log(\cos x)}}$;

13) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}+\cos x-2}{(\arcsin x)^4}$;

14) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}\sqrt{1+x}-\mathrm{e}}{x^2}$;

15) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{(\log x)^{2/3}+(1-x^2)^{3/4}}{[\sin(x-1)]^{2/3}}$;

16) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x+x^2)+\log(1-x+x^2)}{\sin^2 x}$;

17) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2}$;

18) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\log x}{x}\right)^{1/x}$;

19) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x\mathrm{e}^{1/x}$.

Funzioni di 1 Variabile

- Scrivere la retta tangente al grafico della funzione $y=x^2+2x$ nel punto $(1,3)$.

• Studiare le seguenti funzioni e tracciarne un grafico qualitativo:

$$\begin{array}{ll} 1) & f(x)=x^2-2x+|x|; \\ 2) & f(x)=x^4-4x^3+4x^2+1; \\ 3) & f(x)=x\mathrm{e}^{-x+1}; \\ 4) & f(x)=x\mathrm{e}^{x^2}; \\ 5) & f(x)=x^{2/3}(1-x). \end{array}$$

• Stabilire se la seguente funzione è continua:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x\ge 1, \\ \sin x+\log(1+|x|)-\log 2 & \text{se } x<1. \end{cases}$$

• Stabilire se le seguenti funzioni sono continue e derivabili:

$$1) \quad f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x\ne 0, \\ 1 & \text{se } x=0; \end{cases}$$

$$2) \quad f(x)=\begin{cases} \left(1+\frac{3}{x-1}\right)^{(x-1)} & \text{se } x>1, \\ 2-x^2 & \text{se } x\le 1. \end{cases}$$

• Determinare per quale valore del parametro reale α le seguenti funzioni risultano continue:

$$1) \quad f(x)=\begin{cases} (1+3x)^{1/x} & \text{se } x>0, \\ \alpha & \text{se } x\le 0; \end{cases}$$

$$2) \quad f(x)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x-1} & \text{se } x\ne 1, \\ \alpha & \text{se } x=1; \end{cases}$$

$$3) \quad f(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} & \text{se } x>0, \\ \alpha+3x-\mathrm{e}^2 & \text{se } x\le 0. \end{cases}$$

• Determinare per quali valori dei parametri reali α e β le seguenti funzioni risultano continue e derivabili:

$$1) \quad f(x)=\begin{cases} (\mathrm{e}^x-1)^{\sin^2 x} & \text{se } x>0, \\ \alpha(x+1)^2+\beta x & \text{se } x\le 0; \end{cases}$$

$$2) \quad f(x)=\begin{cases} \frac{(\mathrm{e}^{x-2}-1)^\alpha}{\sin(x-2)} & \text{se } x>2, \\ \beta x^2+1-4\beta & \text{se } x\le 2; \end{cases}$$

$$3) \quad f(x)=\begin{cases} \frac{\log(2+x)}{(x+1)^\alpha} & \text{se } x>-1, \\ \beta x+x^2-\beta & \text{se } x\le -1; \end{cases}$$

$$4) \quad f(x)=\begin{cases} \frac{\alpha(\mathrm{e}^{x-2}-1)}{[\log(x-1)]^\beta} & \text{se } x>2, \\ 2x+3 & \text{se } x\le 2. \end{cases}$$

Funzioni Integrali

- Studiare le seguenti funzioni e tracciarne un grafico qualitativo:

1) $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\, dt,$

sapendo che $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ e $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} F(x) = \alpha > 0;$

2) $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^x \frac{1}{t^{2/3}(1-t)^{1/3}}\, dt,$

sapendo che $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$ e $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} F(x) = \alpha > 0;$

3) $F(x) = \displaystyle\int_{1/2}^{x^2} \frac{1}{t\sqrt{1-t}}\, dt,$

sapendo che $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} F(x) = -\infty$ e $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} F(x) = \alpha > 0;$

4) $F(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{\ln(t-1)}{1+t^2}\, dt,$

sapendo che $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = \alpha > 0$ e $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} F(x) = \beta > 0.$

Stabilire inoltre se la funzione di cui al punto 1) ammette un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ e se la funzione di cui al punto 2) ammette un asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

Integrali Indefiniti

1) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x(1+\ln x)}\, dx;$

2) $\displaystyle\int \frac{\cos x \sin x}{(1+\cos^2 x)(1+\cos x)}\, dx;$

3) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+1}{x^{3/2}-1}\, dx;$

4) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x+2}{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+1)}\, dx;$

5) $\displaystyle\int \frac{1}{\tan x - \sin x}\, dx.$

Integrali Definiti

1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{(1+\sin t)(2+\sin t)}\, dt;$

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^t+1}\, dt;$

3) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin 2t \ln(\sin t)\, dt;$

4) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin t}\, dt;$

5) $\displaystyle\int_{3\cosh 1}^3 \frac{1}{\sqrt{t^2-9}}\, dt.$

Funzioni di 2 Variabili

• Determinare gli insiemi di definizione delle seguenti funzioni di 2 variabili e darne una rappresentazione nel piano:

$$1) f(x,y) = (xy)^{3x-1};$$
$$2) f(x,y) = \sqrt{x+y^2-2y}\,\ln_{x^2+y^2-1}(24);$$
$$3) f(x,y) = \frac{\arcsin(x+y)}{\sqrt[3]{9x^2+9y^2-1}};$$
$$4) f(x,y) = \arccos[\tan(4y+x-\pi/4)];$$
$$5) f(x,y) = \tan\left[\frac{\pi}{2}\arcsin(x^2+y)\right];$$

• Calcolare i seguenti limiti:

$$1) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}\sin\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right);$$
$$2) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x^2+y^2+1};$$
$$3) \lim_{|(x,y)|\to+\infty} \frac{x^3}{(x^2+y^2)^2};$$
$$4) \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\sin^2(x+y-2)}{(x-1)^2+y^2-2y+1};$$
$$5) \lim_{|(x,y)|\to+\infty} \frac{x^4}{x^2+y^2};$$

• Stabilire se le seguenti funzioni sono continue:

$$1) f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\cos\frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0; \\ 0 & \text{se } x = 0; \end{cases}$$
$$2) f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x-y} & \text{se } x \neq y; \\ 0 & \text{se } x = y; \end{cases}$$
$$3) f(x,y) = \begin{cases} \frac{\exp[y^2/(x^2+y^2)^{2/3}]}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0); \end{cases}$$
$$4) f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3+y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0); \end{cases}$$
$$5) f(x,y) = \begin{cases} \arctan\frac{x}{|y|} & \text{se } y \neq 0; \\ \pi/2 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

• Stabilire se le seguenti funzioni sono differenziabili e calcolare, qualora esistano, le derivate direzionali:

$$1) f(x,y) = \begin{cases} \Big|\, |x|+|y| \,\Big| e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0); \end{cases}$$
$$2) f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2y}{x^4+y^2}\right)^2 & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0); \end{cases}$$
$$3) f(x,y) = |x|e^y$$
$$4) f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0); \end{cases}$$
$$5) f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

• Data

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{|x|^{3/2}\mathrm{e}^y}{(x^2+y^2)^{1/2}} & \text{se } x\neq 0;\\ 0 & \text{se } x=0;\end{cases}$$

(i) stabilire se f è continua su $\mathbb{R}^2$;

(ii) calcolare il $\lim\limits_{n\to+\infty} f(P_n)$, ove $P_n=(\mathrm{e}^n,0)$;

(iii) determinare il codominio di f.

• Data

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\log(1-y^4)}{(x^2+y^2)}+\mathrm{e}^x & \text{se } (x,y)\neq(0,0);\\ 1 & \text{se } (x,y)=(0,0);\end{cases}$$

(i) determinare il massimo insieme $D\subseteq\mathbb{R}^2$ in cui f è definita e continua;

(ii) calcolare il $\lim\limits_{n\to+\infty} f(P_n)$, ove $P_n=(n!,0)$ e il $\lim\limits_{n\to+\infty} f(Q_n)$, ove $Q_n=(1/n,\sqrt[4]{1-1/n})$;

(iii) determinare il codominio di f.

• Data la funzione $f(x,y)=\mathrm{e}^{xy}+\sin x$, calcolare la derivata di f normale alla retta di equazione $3x+6y-6=0$, nel punto $(0,1)$.

• Data la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0);\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0);\end{cases}$$

e la curva

$$\gamma=\begin{cases}(1+t)\sin t\\ t\end{cases}\qquad t\in[0,2\pi]$$

calcolare la derivata di f tangente alla curva assegnata, nel punto $(x,y)=(0,0)$.