ESERCIZI DI RICAPITOLAZIONE SVOLTI IN AULA

Numeri Reali

• Determinare **sup**, **inf** e, qualora esistano, **max**, **min** dei seguenti insiemi:

$$
\begin{aligned}
&1) \quad A = \{xy \ : \ x \in I\!R \ , \ -1 \le x \le 2 \ ; \ y \in I\!R \ , \ -3 \le y \le -1\} \\
&2) \quad A = \{n \ : \ n \in I\!N\} \cup \{1/n^2 \ : \ n \in I\!N\} \\
&3) \quad A = \left\{ \frac{n-1}{n} \ : \ n \in I\!N \right\} \ .
\end{aligned}
$$

Numeri Complessi

• Risolvere le seguenti equazioni:

$$
\begin{aligned}
&1) \quad z^4 + 1 = 0 \\
&2) \quad z^2 + 2iz + 3 = 0 \\
&3) \quad (z-2i)^2 + 2 + 2\sqrt{3}i = 0 \\
&4) \quad z \arg(z) + 3|z| = \mathrm{Re}(z) + 1 \\
&5) \quad \mathrm{e}^{5iz} + 1 = 0 \\
&6) \quad (|z| + 3z)\arg(z) = -5 \\
&7) \quad \frac{\overline{z}}{i} - \arg(z) = \frac{z \cdot \overline{z}}{2} + iz \\
&8) \quad (z^2 + i)(z^2 - 1) = 0 \ .
\end{aligned}
$$

• Calcolare

$$
\begin{aligned}
&1) \quad \sqrt[7]{(-\sqrt{3} + i)^7} = \ ? \\
&2) \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{112} = \ ?
\end{aligned}
$$

Successioni e serie Numeriche

• Calcolare i seguenti limiti:

$$1)\quad \lim_{n\to+\infty}\Big(2n+n[\cos(n\pi)]\Big)$$

$$2)\quad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2-n!}{3-n!}\right)^{(n+2)!}$$

$$3)\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n}(n+2)}(\sin n-\cos n)$$

$$4)\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{(n!)^2\mathrm{e}^{2n}}{n^{2n+1}}$$

$$5)\quad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{n^2+1}{n^a}\right)^n \qquad a\in\mathbb{R}$$

$$6)\quad \lim_{n\to+\infty}[\sin(\sin^4 n)]^{n/4}$$

$$7)\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{a^n+(-1)^n}{n\log n} \qquad a\geq 0\ .$$

• Determinare il carattere delle seguenti serie:

$$1)\quad \sum_{n=1}^{+\infty}[\sin(\sin^4 n)]^{n/4}$$

$$2)\quad \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{a^n+(-1)^n}{n\log n} \qquad a\geq 0$$

$$3)\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n\sin(x^n)}{n+x^{2n}} \qquad x\in\mathbb{R}$$

$$4)\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\log\left(n^{3/4}\tan\frac{1}{n^{5\alpha}}\right) \qquad \alpha>0$$

$$5)\quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n n^a\sin\frac{1}{n} \qquad a\in\mathbb{R} \qquad \text{(solo convergenza assoluta)}$$

$$6)\quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n n^{1/2}\sin\frac{1}{n}$$

$$7)\quad \sum_{n=1}^{+\infty}a^{\sqrt{n}} \qquad a>0$$

$$8)\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(\log x)^{\log n}} \qquad x>1\ .$$

Funzioni di una variabile reale

• Determinare l'ordine di infinitesimo, per $x\to+\infty$, rispetto all'infinitesimo campione $1/x$, della funzione:

$$f(x)=\exp\left(\frac{1}{x^2}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\ .$$

- Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x) = \sqrt[4]{\log_{\sin^3 x}[\log(x-4)]} \ .$$

- Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^5 e^{x^3} - \log(1+x^5)}{(\sqrt{1+x^4}-1)^2} \ .$$

- Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = e^{-2/x}(|x| + |x-1|)$$

e tracciarne un grafico qualitativo.

- Stabilire per quali valori di $a, \ b \in I\!R$ la seguente funzione risulta continua e derivabile in $I\!R$:

$$f(x) = \begin{cases} 2^x + b & \text{se } x \le 2 \ ; \\ \frac{\sin(4x-8)}{2b-bx} + a(x-2) & \text{se } x > 2 \ . \end{cases}$$

Integrali

- Calcolare i seguenti integrali definiti e indefiniti:

$$\begin{aligned} &1) \quad \int_0^1 \frac{(e^{4x}+1)^2}{e^{4x}} \, dx \\ &2) \quad \int x^2 \cos(1-3x^3) \, dx \\ &3) \quad \int_0^{\pi/6} \frac{1+\cos x \sin x}{\cos^2 x} \, dx \\ &4) \quad \int_e^{e^2} \frac{7^{\log x}}{x} \, dx \ . \end{aligned}$$

- Calcolare l'area della regione di piano compresa tra i grafici delle funzioni:

$$\begin{aligned} &1) \quad x = y^2 \qquad \text{e} \qquad x = 3y+4 \\ &2) \quad y = x \qquad \text{e} \qquad y = x^3 - 3x \ . \end{aligned}$$

- Stabilire se esistono finiti i seguenti integrali impropri:

$$\begin{aligned} &1) \quad \int_0^{1/2} \frac{\arctan x^\alpha}{1-\cos x} \, dx \qquad \alpha \in I\!R \\ &2) \quad \int_0^{\pi^2} \frac{|x|^\alpha \sin\sqrt{|x|}}{(\pi^2-x)^\alpha} \, dx \qquad \alpha \in I\!R \\ &3) \quad \int_0^1 \frac{\log(1-x^2)}{x^\alpha} \, dx \qquad \alpha \in I\!R \\ &4) \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(2+\sin x + e^{x/2})} \, dx \ . \end{aligned}$$

• Studiare le seguenti funzioni integrali:

$$1) \quad F(x) = \int_1^x \frac{\log t}{t e^t}\ dt$$
$$2) \quad F(x) = \int_1^x t e^{-\frac{1}{t}}\ dt$$

e tracciarne un grafico qualitativo.

Equazioni differenziali

• Determinare la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy:

$$1) \qquad \begin{cases} y'(x) = -y(x)\text{cotan } x + 2\cos x \\ y(\pi/2) = 1 \end{cases}$$
$$2) \qquad \begin{cases} (x^2 - x^2 y(x))y'(x) + y^2(x) + xy^2(x) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$
$$3) \qquad \begin{cases} e^{x+y(x)} y'(x) + x = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$
$$4) \qquad \begin{cases} y'(x) = -\dfrac{2x}{1+x^2} y(x) + \dfrac{1}{x(1+x^2)} \\ y(-1) = 0 \end{cases}$$
$$5) \qquad \begin{cases} y'''(x) - y'(x) = 2\cosh x \\ y(0) = 0 \quad y'(0) = 0 \quad y''(0) = 0 \end{cases}$$

Curve

• Calcolare la lunghezza della curva $\gamma = \{\rho = \sin^2\theta\ ,\quad \theta \in [-\pi, \pi]\}$.

• Determinare l'equazione della retta tangente alla curva γ di parametrizzazione $\phi(t) = (t, t^2, t^3)$ con $t \in [0, 10]$, nel generico punto t_0.

• Calcolare $\int_\gamma f\ ds$ dove $f(x, y) = xy$ e $\gamma = (t, t^2)$ con $t \in [0, 1]$.

Funzioni di 2 Variabili

• Determinare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni:

$$1) \quad f(x, y) = \frac{1}{\log\left(\frac{1-|y|}{x+y}\right)}$$
$$2) \quad f(x, y) = [\arcsin(y^2 - x^2)]^{1/\pi}$$

e stabilirne la natura.

- Stabilire se la seguente funzione è continua, derivabile e differenziabile in $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(1+x^2)x^2y^4}{x^4+2x^2y^4+y^8} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\ . \end{cases}$$

- Determinare i punti di massimo e minimo assoluti di

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{(x+1)^2+(y-1)^2}$$

nel triangolo chiuso T, avente per vertici i punti $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,2)$.

Integrali doppi e tripli

- Calcolare i seguenti integrali:

1) $\displaystyle\iint_{A\cup B} \frac{x\exp\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\ dy$
dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x > 0\ ,\ x^2+(y-1)^2 < 1\ ,\ x^2+y^2 > 1\}$
e $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ -\pi \le y \le 0\ ,\ |x| \le |\sin y|\}$;

2) $\displaystyle\iint_E dx\ dy$ dove $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 0 < x < 1\ ,\ \frac{1}{1+x^2} < y < 4\}$

3) $\displaystyle\iint_E \left(\frac{x\mathrm{e}^{x^2+y^2}}{x^2+y^2} - 1\right) dx\ dy$ dove $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$

4) $\displaystyle\iiint_E \frac{z(z^2-1)\mathrm{e}^{-z}}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dx\ dy\ dz$
dove $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x \ge 0\ ,\ y \ge 0\ ,\ z \ge 1/2\ ,\ z^2 \le x^2+y^2 \le 4\}$

5) $\displaystyle\iint_E \left(1 + x^2y\mathrm{e}^{x^2}\right) dx\ dy$ dove $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 2x \le x^2+y^2 \le 4\}$

6) $\displaystyle\iiint_E dx\ dy\ dz$ dove $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2-2y < z < -y^2+2x\}$

7) $\displaystyle\iint_E \frac{y-x}{(x^2+y^2)^2}\,dx\ dy$ dove $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 1 < x^2+y^2 < 9\ ,\ y > 0\}$

8) $\displaystyle\iint_E 2xy\ dx\ dy$ dove $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x \le 0\ ,\ x^2+y^2 \le 9\ ,\ y \ge x\}$

9) $\displaystyle\iint_E y\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{e}^{\cos y}\,dx\ dy$ dove $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 0 \le x \le 1\ ,\ |y| \le (1-x)^3\}$.