

**Tutoraggio di Analisi Matematica - Ingegneria Energetica**  
**Foglio 8 - Equazioni differenziali**

**Esercizio**

Si determini l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali

$$y' - \frac{y^2}{x \log x} = -\frac{1}{x \log x}, \quad y' = \sqrt[3]{2y+3} \tan^2 x \quad y' = e^x y \log y$$

$$y' = \frac{2x-y}{x-1} \quad y' = \frac{1}{x}y - \frac{3x+2}{x^3} \quad y' = e^{x+y} \quad y' = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}y$$

$$y' = \frac{y^2 - 5y + 6}{x^2 + 1} \quad y' + 2xy = xy^2 \quad x^2(1-y)y' + (1+x)y^2 = 0$$

$$y' = -y + \frac{1}{e^x + 1} \quad xy' = y + \frac{2x^2}{1+x^2} \quad y' = -\frac{y}{x^2+x} + x - 2$$

**Esercizio**

Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1-e^{-y}}{2x+1} \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1) \cos x \\ y(\pi) = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} y' = (1+y^2) \sin x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = \sqrt{\frac{1+y}{1+x^2}} \\ y(0) = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} y' = \frac{y + \arctan x}{1+x^2} \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y' = \frac{3y}{x+1} + e^x(x+1)^3 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = x^3(y^2 + 1)(3 + 4 \arctan y)^2 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y' = \frac{1}{(e^2 + x) \log(e^2 + x)}(y - 2) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

**Esercizio**

Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} e^y y' = 4x^3 \log x(1 + e^y) \\ y(\sqrt[4]{e}) = 0 \end{cases}$$

nella semiretta  $[\sqrt[4]{e}, +\infty)$ .

**Esercizio**

Nell'intervallo  $(-2, 2)$  si risolva il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{3x}{x^2-4}|y| \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

**Esercizio**

Al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ , risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (2 + \alpha)y - 2e^{\alpha x} \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

Stabilire, successivamente, per quali valori di  $\alpha$  il seguente integrale improprio  $\int_0^{+\infty} y(x) dx$  converge.

**Esercizio**

Data l'equazione differenziale

$$y' \sin(2x) - 2(y + \cos x) = 0, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

determinarne l'integrale generale e indicare la soluzione che si mantiene limitata per  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$ .

**Esercizio**

Siano  $a, b \in \mathbb{R}$ . Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = a\frac{y}{x} + 3x^b \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

sulla semiretta  $[2, +\infty]$ .

**Esercizio**

Data l'equazione differenziale

$$y'(x) = -3xy(x) + kx, \quad k \in \mathbb{R}$$

1. se ne trovi la soluzione che si annulla nell'origine;
2. per tale soluzione, si determini  $k$  in modo che  $y(x) \sim x^2$  per  $x \rightarrow 0$ .

**Esercizio**

Data l'equazione differenziale

$$y' = \frac{y^2 - 2y - 3}{2(1 + 4x)}$$

1. determinare l'integrale generale;

2. determinare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale  $y_0(0) = 1$ ;
3. scrivere lo sviluppo di Maclaurin di  $y_0(x)$  arrestato al secondo ordine.

### Esercizio

Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenee

$$y'' + y = x \cos x \qquad y'' - 3y' + 2y = x^2 \qquad y'' - y = e^x \sin x$$

### Esercizio

Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - 4y = xe^x$$

e poi trovare la soluzione che soddisfa le condizioni  $y(0) = 16/9, y'(0) = -5/9$ .

In seguito, determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - 4y = e^{2x} + xe^x$$

e infine quello di

$$y'' - 4y' + 5y = 1 + e^{2x} \cos(\theta x)$$

dove  $\theta$  è un parametro reale.

### Esercizio

Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = e^x \sin x \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' - y = (x+1)e^x \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' + y = \cos x \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' + 4y = e^x + 1 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' - 2y = -2xe^x \sin x \\ y(0) = \frac{1}{2}, \quad y'(0) = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' - 8y' + 16y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$