Tutoraggio di Analisi Matematica - Ingegneria Energetica
Foglio 7

Esercizio 1

Calcolare i seguenti integrali definiti usando eventuali simmetrie della funzione

$$\int_0^2 e^{-x}|x-1|\,dx, \qquad \int_{-1}^1 \frac{|x|+\sin x}{1+x^2}\,dx \qquad \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \frac{|\cos x|}{3-\cos^2 x}\,dx$$

Esercizio 2

Stabilire la convergenza o meno dei seguenti integrali generalizzati.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx, \qquad \int_1^{+\infty} \sqrt{x}\left[\log(1+x^2)-2\log x\right]dx, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{x(1+x^2)}\,dx$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x+e^{-x}}{2+2x+x^2}\,dx, \qquad \int_{-1}^1 \frac{\sin x}{x\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx, \qquad \int_0^{2\pi} \frac{(\frac{\pi}{2}-x)^2}{\cos x}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{|x|+e^{2x}}\,dx \qquad \int_0^{2\pi} \frac{1+\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}\,dx \qquad \int_0^{\pi} \sqrt[3]{\tan x}\,dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x-1-x}\,dx, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{e^{\sqrt[3]{x^2}}-1}{xe^x}\,dx, \qquad \int_{-\infty}^0 \arctan\frac{1}{x}\,dx$$

Esercizio 3

Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ convergono gli integrali seguenti

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \log x}{1+x^2}\,dx \qquad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2\alpha}|\log x|^{2\alpha}} \qquad \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha|\log x|^{2\alpha}}$$

$$\int_\alpha^{+\infty} \frac{1}{(x-2)\sqrt{|x-3|}}\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha}\,dx, \qquad \int_2^3 \frac{x(\sin(x-2))^\alpha}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$$

Esercizio 4
Stabilire per quali valori del parametro reale positivo α converge l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/x}}{x^\alpha(1+x^\alpha)}\,dx$$

Esercizio 5
Stabilire la convergenza dei seguenti integrali impropri

$$\int_2^4 \frac{\log\sqrt{x+1}+\sqrt{|x^2-3x|}-\log 2}{\sqrt{4-x}-1}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{\arctan x}{\log(1+x)\sqrt{1-e^{x-1}}}\,dx,$$

Esercizio 6
Discutere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza dei seguenti integrali impropri

$$\int_1^\infty \frac{\arctan x}{\sqrt{x}(1+x^\alpha)}\,dx, \qquad \int_1^2 \frac{(x-1)^{5\alpha}}{(x^\alpha-1)^{3/2}}\,dx, \quad \alpha > 0$$

Esercizio 7
Determinare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni integrali

$$\int_{-2}^x \frac{dt}{t\sqrt[3]{t+1}}, \qquad \int_{-\infty}^x \frac{dt}{t\sqrt[3]{t+2}} \qquad \int_0^\pi \frac{\sin(\pi t)}{(t^2-1)(t^2-2)}\,dt, \qquad \int_\pi^x e^{-\frac{1}{t}}\frac{\sin t}{\sqrt[3]{\cos t}}\,dt$$

Esercizio 8
Dopo aver determinato l'insieme di definizione di F, stabilire se F è continua, derivabile, determinando i punti di discontinuità e di non derivabilità di F e discutendone la natura

$$F(x) = \int_0^x \frac{e^t}{t^{2/3}}\,dt, \qquad F(x) = \int_1^x \frac{t}{|t|}\cos t\,dt, \qquad \int_0^x \frac{\arctan(1/t)}{t+1}\,dt$$

Esercizio 9
Studiare le seguenti funzioni integrali e tracciarne il grafico

$$F(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}-3t}{t+3}\,dt, \qquad \int_0^x e^{-t}\arctan(e^t)\,dt, \qquad \int_1^x \frac{(t+1)^3}{t^2-4}\log|t|\,dt$$

Esercizio 10
Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\int\limits_0^{x/2} \sin t \cos t \, dt}, \qquad \lim_{x\to 2} \frac{1}{e^{16}(x-2)} \int\limits_2^x e^{t^2}\, dt \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\int\limits_{-x}^{x} \left(1-\cos^4(t^3)\right)\, dt}{e^{x^6}-\cos x^3},$$

Esercizio 11
Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} \displaystyle\int\limits_1^x \frac{\cos(\pi t)}{t}\, dt & x \neq 1 \\ -1 & x = 1 \end{cases}$$

dire se è continua in $\mathbb{R}$.

Esercizio 12
Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ determinare il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha \int\limits_0^{x^2} \sin(t^2)\, dt$$

Trova l'errore
Esercizio 13
Data la funzione

$$f(x) = \frac{\cos^2 x + 1}{e^x}$$

si ha che

$$\int\limits_\pi^{2\pi} f(x)\, dx = 0$$

Esercizio 14
La funzione

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3}\tan x)$$

è una primitiva di

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x + 3\sin^2 x}$$

e quindi si ha che

$$\int\limits_0^\pi f(x)\, dx = g(\pi) - g(0) = 0$$