Tutoraggio Ingegneria Meccanica e Ingegneria energetica

Settimo foglio di esercizi

(1) Determinare la primitiva $F(x)$ della funzione

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}(1+\log(1+\sqrt{x^2+3}))$$

tale che $F(1) = \log 54$.

(2) Determinare la primitiva $F(x)$ della funzione

$$f(x) = \frac{2x}{3(\sqrt[3]{1+x^2})\sqrt[6]{1+x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\log(1+\sqrt[3]{1+x^2})$$

tale che $F(\sqrt{e^6-1}) = 0$.

(3) Determinare la primitiva $F(x)$ della funzione

$$f(x) = x\sin x + \cos^2 x$$

che verifica $F(\frac{\pi}{2}) = 0$.

(4) Siano $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabili.

(a) Scrivere la derivata di $f(x) = g(h(x))$.

(b) Date $G(y) := \int_0^y e^{t^2}\ \mathrm{d}t$ e $h(x) := x^3$, calcolare la derivata di

$$F(x) = \int_0^{x^3} e^{t^2}\ \mathrm{d}t.$$

(5) Si consideri la funzione integrale $G : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$G(x) := \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\ \mathrm{d}t.$$

(a) G è derivabile in 0? Se sì, quanto vale $G'(0)$?

(b) Sia $F(x) = xG(x)$. F è derivabile in 0? Se sì, quanto vale $F'(0)$?

(6) Tracciare grafici qualitativi delle seguenti funzioni integrali:

$$F_1(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \qquad F_2(x) = \int_1^{x^2} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$$
$$F_3(x) = \int_0^x \frac{e^{-t^2}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t \qquad F_3(x) = \int_1^{2x} \frac{1}{e^t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

(7) Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f_\alpha(x) = \frac{(e^{\frac{1}{x\sqrt{x}}} - 1)^\alpha}{(1 - \cos\frac{1}{x\sqrt[3]{x}})^{1-2\alpha}}$$

è impropriamente integrabile nell'intervallo $[1, +\infty)$.

(8) Stabilire per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\log^\alpha(1 + x\sqrt[4]{x})}{\sin^\beta(x\sqrt{x})}$$

è impropriamente integrabile nell'intervallo $(0, 1]$.

(8) Calcolare l'area della regione del piano delimitata dal grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

e dall'asse delle ascisse, per $1 \le x \le 4$.

(9) Calcolare l'area della regione del piano delimitata dal grafico della funzione

$$f(x) = (x-1)\log(x^2+4)$$

e dall'asse delle ascisse, per $0 \le x \le 1$.

(10) Determinare tutte le primitive delle seguenti funzioni

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} \qquad f_2(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$$
$$f_3(x) = \frac{1}{(4x^2+9)^2} \qquad f_4(x) = \frac{1}{(4x^2+9)^3}.$$