

# 1 26.09 - Introduzione al corso. Richiami sulle serie geometriche. Serie di potenze. Intervallo di convergenza, raggio di convergenza. Esempi.

## 1.1 La Serie geometrica

Consideriamo serie geometrica di ragione  $x$

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Ridotta  $n$ -sima

$$s_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$$

Se  $x = 1$  si ha

$$s_n = 1 + 1 + \dots + 1 = n.$$

Sia  $x \neq 1$ . Si ha

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

Se  $|x| < 1$  allora  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$  e pertanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}.$$

Se  $x > 1$ , poichè  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = +\infty$  si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{1}{x - 1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x^n - \frac{1}{x - 1} = +\infty$$

Sia ora  $x = -1$ ,

$$s_n = \frac{1 - (-1)^n}{2} = \begin{cases} 0 & , \quad n = 2p \\ 1 & , \quad n = 2p + 1 \end{cases}$$

Pertanto la successione  $(s_n)_{\mathbb{N}}$  non è regolare.

Sia infine  $x < -1$ . Possiamo scrivere  $x = -|x|$ , e quindi

$$s_n = \frac{1 - (-|x|)^n}{1 + |x|} = \frac{1 - (-1)^n |x|^n}{1 + |x|} = \begin{cases} \frac{1 - |x|^{2p}}{1 + |x|}, & n = 2p \\ \frac{1 + |x|^{2p-1}}{1 + |x|}, & n = 2p - 1 \end{cases}$$

Ne segue che  $S_{2p} \rightarrow -\infty$  e  $S_{2p-1} \rightarrow +\infty$  e pertanto  $\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$

Allora

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \begin{cases} +\infty & x \geq 1 \\ \frac{1}{1-x} & x \in (-1, 1) \\ \nexists & x \leq -1 \end{cases}$$

## 1.2 Definizione e prime proprietà

La Serie geometrica costituisce un caso particolare di serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

quando  $a_n = 1 \quad n = 0, 1, \dots$  e  $x_0 = 0$ .

In generale i coefficienti  $a_n$  costituiscono una successione di numeri reali.

Con una traslazione  $y = x - x_0$  possiamo ricondurci al caso  $x_0 = 0$

Infatti supponiamo di dover studiare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x - 1)^n$$

Si pone  $y = x - 1$  e si studia

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^n,$$

che sappiamo essere convergente per  $|y| < 1$ .

$$|y| < 1 \iff |x - 1| < 1 \iff -1 < x - 1 < 1 \iff 0 < x < 2$$

Concentriamo la nostra analisi sul ruolo dei coefficienti  $a_n$ . Osserviamo di aver incontrato già le serie di potenze con nello studio delle serie numeriche (oltre le serie geometriche). Facciamo alcuni esempi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge (assolutamente) per  $|x| < 1$ . Il caso  $|x| = 1$  deve essere studiato separatamente per  $x = 1$  la serie diverge (serie armonica), per  $x = -1$  la serie converge (Criterio di Leibniz) pertanto l'insieme dove la serie converge è dato da  $(-1, 1) \cup \{-1\}$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge (assolutamente) per  $|x| < 1$ .  $|x| = 1$  deve essere studiato separatamente per  $x = 1$  la serie converge, per  $x = -1$  la serie converge (Criterio di Leibniz) pertanto l'insieme dove la serie converge è dato da  $(-1, 1) \cup \{-1, 1\}$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge (assolutamente) per ogni  $x$  reale.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge solo per  $x = 0$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge (assolutamente) per  $|x| < \frac{1}{3}$ .  $|x| = \frac{1}{3}$  deve essere studiato separatamente per  $x = \frac{1}{3}$  la serie diverge, per  $x = -\frac{1}{3}$  la serie è indeterminata.

Vediamo negli esempi che l'insieme di convergenza è un intervallo, l'analisi nei punti di estremo dell'intervallo varia da caso a caso. Il raggio di convergenza è la metà della lunghezza di tale intervallo.

Osserviamo che questa definizione è estendibile al caso complesso. Sia  $z \in \mathbb{C}$ . Ripartendo dalla serie geometrica e ricordando che

$$|z| = \sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2} \text{ è il modulo di } z.$$

abbiamo che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

converge se  $|z| < 1$ . Nel piano complesso  $(\Re z, \Im z)$  l'insieme  $\sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2} < 1$  individua il cerchio di centro 0 e raggio 1 privato della circonferenza. Il raggio di convergenza (in questo caso si ha perfetta corrispondenza con l'immagine grafica) è 1.

Dimostriamo ora che l'intuizione maturata sulla struttura dell'insieme di convergenza corrisponde a un risultato matematico.

**Proposizione 1.** *Se la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

*converge in un punto  $x_1$  allora converge (assolutamente) in ogni punto  $x$  tale che  $|x| < |x_1|$ .*

*Dimostrazione.* Sappiamo che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$$

converge. Assumiamo  $x_1 \neq 0$ . Ne segue dalla condizione necessaria di convergenza

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n x_1^n = 0,$$

ne segue che esiste  $N \in \mathbb{N}$  tale che per  $n > N$

$$|a_n x_1^n| < 1.$$

Allora per  $n > N$

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \left| \frac{x^n}{x_1^n} \right| = |a_n x_1^n| \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$$

Quindi tenuto conto che  $|a_n x_1^n| < 1$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n x^n| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$$

L'ultima serie converge se  $|x| < |x_1|$ . □

## 2 28.09 Il criterio della radice e del rapporto per serie di potenze. Esempi di applicazione. Equazioni differenziali e serie di potenze. Calcolo dei coefficienti. Equazione di Bessel di ordine zero.

### 2.0.1 Criteri per la determinazione del raggio di convergenza

**Teorema 2.1.** (Criterio di Cauchy) Se esiste il limite (anche  $+\infty$ )

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l,$$

allora

$$r = \frac{1}{l}$$

**Teorema 2.2.** (Criterio di D'Alembert) Sia  $a_n \neq 0$ , per ogni  $n$ . Se esiste il limite (anche  $+\infty$ )

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l,$$

allora

$$r = \frac{1}{l}.$$

Se  $l = +\infty$  allora  $r = 0$ , se  $l = 0$  allora  $r = +\infty$

**Esercizio 2.3.** Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \left( \frac{x}{3} \right)^n.$$

Risulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \left( \frac{x}{3} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n \left( \frac{1}{3} \right)^n x^n$$

Calcoliamo

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1) \left( \frac{1}{3} \right)^{n+1}}{n \left( \frac{1}{3} \right)^n} = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{n} \right).$$

Ne segue  $l = \frac{1}{3}$  e  $r = 3$

Ricapitolando: data la serie di potenze,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  determiniamo il raggio di convergenza  $r$  (i criteri non fanno intervenire  $x$ ). Allora la serie converge assolutamente per  $|x| < r$ , non converge per  $|x| > r$ , in generale nulla si può dire per  $|x| = r$ .

Ricapitolando

**Teorema 2.4.** *Data la serie di potenze si verifica sempre uno dei seguenti casi*

- *la serie converge per  $x = 0$*
- *la serie converge per ogni  $x$  reale*
- *la serie converge per  $|x| < r$  e non converge per  $|x| > r$*

## 2.1 Serie lacunari

Una serie di potenze che abbia infiniti coefficienti nulli si chiama serie lacunare. Un esempio di serie lacunare è il seguente

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n x^{2n}.$$

Anche se possiamo stabilire il raggio di convergenza della serie  $r = \sqrt{2}$ , tuttavia osserviamo che non possiamo applicare il criterio della radice o il criterio del rapporto in quanto possiamo individuare due sottosuccessioni (date dagli indici pari e dagli indici dispari) che convergono a limiti distinti.

## 2.2 Serie di Potenze ed equazione di Bessel di ordine zero

Illustriamo il Metodo di Frobenius per illustrare come determinare la soluzione dell'equazione di Bessel di ordine 0.

$$xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0, \quad x > 0$$

Ricordiamo le equazioni di Bessel di ordine  $n$

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0, \quad x > 0$$

Aggiungiamo la condizione in  $x = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,

$$y'(x) = -xy''(x) - xy(x), \quad y'(0) = 0$$

Ricapitolando vogliamo risolvere

$$\begin{cases} xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0, & x > 0, \\ y(0) = 1, & y'(0) = 0 \end{cases}$$

Assumiamo che la soluzione sia esprimibile in serie di potenze

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

dalla condizione  $y(0) = 1$  si ricava  $a_0 = 1$ . Dunque

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 1 + \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+1} x^{m+1}$$

Calcoliamo i singoli termini

$$xy(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

$$y'(x) = a_1 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)a_{n+2}x^{n+1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n \quad xy''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+1}$$

Sostituendo

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+1} + a_1 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)a_{n+2}x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

Riordinando

$$a_1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left( a_n + (n+2)^2 a_{n+2} \right) x^{n+1} = 0.$$

Ricaviamo  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 0$ .

$$a_n + (n+2)^2 a_{n+2} = 0 \quad a_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)^2} a_n$$

Se  $n$  è dispari  $a_n = 0$ , se  $n$  è pari allora  $n = 2k$   $k \in \mathbb{N}$

$$a_{2(k+1)} = -\frac{1}{2^2(k+1)^2} a_{2k}$$

$$a_2 = -\frac{1}{2^2} a_0 = -\frac{1}{2^2}$$

$$a_4 = -\frac{1}{2^2} \frac{1}{2^2} a_0 = \frac{1}{2^2} \frac{1}{2^2} \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^2} \frac{1}{2^4}$$

$$a_6 = -\frac{1}{2^2} \frac{1}{3^2} a_4 = -\frac{1}{2^2} \frac{1}{3^2} \frac{1}{2^2} \frac{1}{2^4} = -\frac{1}{2^6} \frac{1}{(3!)^2}$$

...

...

...

$$\begin{cases} a_{2n+1} = 0, \\ a_{2n} = (-1)^n \frac{1}{2^{2n}} \frac{1}{(n!)^2}, \end{cases}$$

Otteniamo

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{2n}} \frac{1}{(n!)^2} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \frac{x^{2n}}{2^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \left( \frac{x}{2} \right)^{2n}$$

funzione di Bessel di ordine 0.

### 3 29.09 Serie di Potenze: Integrale e Derivata. Serie di Taylor. Resto integrale e di Lagrange.

#### 3.1 Serie di Potenze: Integrale e Derivata

##### 3.1.1 Derivazione termine a termine

Sia  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  una serie di potenze con raggio di convergenza  $r > 0$  e con somma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad |x| < r.$$

La serie derivata

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

ha lo stesso raggio di convergenza della serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  (applicare il criterio di D'Alembert), la somma  $f(x)$  è derivabile e vale

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad |x| < r.$$

Vediamo un'applicazione del risultato.

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{n-1} \quad |x| < 1$$

##### 3.1.2 Integrazione termine a termine

Sia  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  una serie di potenze con raggio di convergenza  $r > 0$  e con somma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad |x| < r.$$

Si ha

$$\int_0^x f(s) ds = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad |x| < r$$

Utilizziamo questo risultato.

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} \quad |x| < 1,$$

Integrando

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \quad |x| < 1$$

Possiamo utilizzare il risultato per integrare per serie alcune funzioni non integrabili elementarmente. Per  $a > 0$  calcoliamo

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^a \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!(2n+1)} a^{2n+1}.$$

Introduciamo la funzione degli errori introdotta da Gauss

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} t^{2n} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(2n+1)} x^{2n+1}.$$

**Esercizio 1.**

$$\int_0^2 t^2 e^{t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^2 t^{n+2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{2^{n+3}}{n+3}.$$

### 3.2 Serie di Taylor

Data una funzione  $f \in C^\infty(x_0 - r, x_0 + r)$  la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

si dice serie di Taylor relativa al punto  $x_0$ . Se vale

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad |x - x_0| < r,$$

la funzione  $f$  si dice sviluppabile in serie di Taylor per  $x$ :  $|x - x_0| < r$ .

Il seguente esempio mostra che esistono funzioni  $f \in C^\infty(-r, r)$  che non sono uguali alla serie di Taylor.

**Esempio 3.1.**

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

La funzione presenta derivate tutte nulle in  $x_0 = 0$ , e quindi la serie di Taylor ad essa relativa vale 0 e non coincide con la funzione.

Funzioni analitiche (in senso reale).

**Definizione 3.2.** Una funzione  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $I$  intervallo con  $(x_0 - r, x_0 + r) \subset I$ ) si dice analitica in senso reale se è sviluppabile in serie di Taylor in un intorno  $(x_0 - r, x_0 + r)$  di  $x_0$ .  $f$  si dice analitica in  $I$  se è analitica in ogni punto di  $I$ .

Ci occupiamo di condizioni di sviluppabilità di una funzione in serie di Taylor.

**Definizione 3.3.** Se  $f$  è derivabile  $n + 1$  volte, il resto dato dalla formula di Taylor

$$r(x_0, n, x) = r_n(x_0, x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Sappiamo (resto di Peano) che

$$r(x_0, n, x) = o((x - x_0)^n) \quad x \rightarrow x_0.$$

Ci occupiamo di condizioni per cui

$$r(x_0, n, x) \rightarrow 0 \quad n \rightarrow +\infty$$

### 3.3 Resto Integrale e di Lagrange

Deduciamo ora altre espressioni del resto

**Teorema 3.4.** Se  $f$  è derivabile  $n + 1$  volte, il resto si può esprimere

$$r_n(x_0, x) = \int_{x_0}^x \frac{f^{n+1}(t)}{n!} (x - t)^n dt$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione del risultato segue il principio di induzione. Per  $n = 0$  il risultato segue da

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t) dt.$$

Assumiamo vera l'affermazione al passo  $n - 1$ . Il resto al passo  $n - 1$  si esprime

$$r_{n-1}(x_0, x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Si ha

$$\begin{aligned} r_{n-1}(x_0, x) &= \int_{x_0}^x \frac{f^n(t)}{(n-1)!} (x-t)^{n-1} dt = \int_{x_0}^x \frac{f^n(t)}{(n-1)!} \left[ -\frac{(x-t)^n}{n} \right]' dt = \\ &= - \left[ \frac{(x-t)^n}{n!} f^n(t) \right]_{x_0}^x + \int_{x_0}^x f^{n+1}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt \\ &= \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^n(x_0) + \int_{x_0}^x f^{n+1}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt \end{aligned}$$

In conclusione

$$r(x_0, n-1, x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^n(x_0) + \int_{x_0}^x f^{n+1}(t) \frac{(x - t)^n}{n!} dt,$$

e quindi

$$\begin{aligned} r_n(x_0, x) &= f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k - \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^n(x_0) = \\ &= \int_{x_0}^x f^{n+1}(t) \frac{(x - t)^n}{n!} dt. \end{aligned}$$

□

Dalla formula del resto integrale si deduce la formula del resto di Lagrange.

**Teorema 3.5.** *Se  $f$  è derivabile  $n + 1$  volte in un intervallo  $I$  e  $x, x_0$  sono punti di  $I$ , esiste un punto  $\xi$  compreso tra  $x$  e  $x_0$  tale che*

$$r_n(x_0, x) = f^{n+1}(\xi) \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!},$$

*Dimostrazione.*

$$r_n(x_0, x) = \int_{x_0}^x f^{n+1}(t) \frac{(x - t)^n}{n!} dt =$$

Assumiamo  $x > x_0$ . In  $[x_0, x]$  si ha

$$m \leq f^{n+1}(t) \leq M,$$

essendo

$$m = \min_{[x_0, x]} f^{n+1}(t) \quad M = \max_{[x_0, x]} f^{n+1}(t).$$

Abbiamo

$$m \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} \leq \int_{x_0}^x f^{n+1}(t) \frac{(x - t)^n}{n!} dt \leq M \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!}$$

Ossia

$$m \leq \left[ \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} \right]^{-1} \int_{x_0}^x f^{n+1}(t) \frac{(x - t)^n}{n!} dt \leq M$$

Dal teorema dei valori intermedi applicato a  $f^{n+1}$ , si ha che esiste  $\xi$  per cui

$$f^{n+1}(\xi) = \left[ \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} \right]^{-1} \int_{x_0}^x f^{n+1}(t) \frac{(x - t)^n}{n!} dt,$$

da cui la tesi. □

## 4 03.10 Sviluppi in serie di Taylor di alcune funzioni, $e^x$ , $\sin x$ , $\cos x$ , $\log(1 + x)$ , $\arctan x$ . Serie di potenze complesse, formula di Eulero, funzioni complesse $e^z$ , $\sin z$ , $\cos z$ , $\sinh z$ , $\cosh z$

### 4.1 Condizioni di convergenza

**Teorema 4.1.** *Se la funzione  $f$  è derivabile infinite volte in un intervallo  $(a, b)$  e se esistono due numeri reali  $L$  e  $M$  tali che*

$$|f^{(n)}(x)| \leq ML^n \quad \forall x \in (a, b) \quad \forall n,$$

*allora per ogni  $x_0 \in (a, b)$  la funzione è sviluppabile in serie di Taylor centrata in  $x_0$ .*

La dimostrazione è basata sull'analisi del resto.

Esempi di funzioni analitiche in  $\mathbb{R}$ :  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ .

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

La dimostrazione segue dall'espressione del resto di Lagrange.

**Esercizio 1.**

$$e^{x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^3)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{n!}.$$

**Esercizio 2.**

$$\frac{1 - \cos x}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} x^{2n-1}.$$

## 4.2 Serie di potenze in $\mathbb{C}$

$$z^k = (x + iy)^k$$

La serie geometrica (per  $|z| < 1$ )

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k.$$

La serie di potenza in  $\mathbb{C}$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k.$$

Definiamo l'esponenziale complesso

$$e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Una funzione  $f$  definita su un sottoinsieme aperto  $A$  di  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$  è analitica se è rappresentabile localmente come una serie di potenze: ogni numero  $x_0 \in A$  ha un intorno aperto  $A' \subset A$ , tale che esiste una serie di potenze con centro  $x_0$  che converge a  $f(x)$  per ogni  $x \in A'$ .

Ogni serie di potenze con raggio di convergenza positivo fornisce una funzione analitica sull'interno della sua regione di convergenza. Ogni funzione olomorfa (derivabile in senso complesso, vedremo più avanti) è una funzione analitica complessa.

Le formula di Eulero: per  $x \in \mathbb{R}$ ,  $i$  unità immaginaria.

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Per  $z \in \mathbb{C}$  definiamo

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos hz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\sin hz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Esercizi.

## 5 05.10 Funzioni trigonometriche. Esercizi. Ortogonalità delle funzioni trigonometriche. Sistema ortonormale

### 5.1 Esercizi: La formula del Binomio e la Formula di Eulero

Le formula di Eulero: per  $x \in \mathbb{R}$ ,  $i$  unità immaginaria.

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Ricordiamo la

Formula di triplicazione

$$\begin{aligned} \cos 3x + i \sin 3x &= (e^{ix})^3 = (\cos x + i \sin x)^3 = \\ &= \cos^3 x - i \sin^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \sin^2 x \cos x. \end{aligned}$$

Uguagliando la parte reale e la parte immaginaria dei due numeri

$$\cos(3x) = \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x$$

$$\sin(3x) = -\sin^3 x + 3 \cos^2 x \sin x$$

Più in generale si ha

**Proposizione 2.** *Si ha*

$$\cos(nx) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos \frac{(n-k)\pi}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x, \quad n \in \mathbb{N}$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} \cos(nx) &= \left( \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \right) = \left( \frac{(e^{ix})^n + (e^{-ix})^n}{2} \right) = \\ &= \frac{(\cos x + i \sin x)^n + (\cos x - i \sin x)^n}{2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\cos^k x (i \sin x)^{n-k} + \cos^k x (-i \sin x)^{n-k}}{2} = \\
& \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(i)^{n-k} + (-i)^{n-k}}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x = \\
& \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(e^{\frac{i\pi}{2}})^{n-k} + (e^{-\frac{i\pi}{2}})^{n-k}}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x = \\
& \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(e^{\frac{i(n-k)\pi}{2}}) + (e^{-\frac{i(n-k)\pi}{2}})}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x = \\
& \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos \frac{(n-k)\pi}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x
\end{aligned}$$

□

**Esercizio 5.1.** Dalla formula di Eulero,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $i$  unità immaginaria  $i^2 = -1$ .

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

ricavare

$$\sin(nx) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin \frac{(n-k)\pi}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x, \quad n \in \mathbb{N}$$

Le funzioni  $\sin x$  e  $\cos x$  sono funzioni periodiche di periodo  $2\pi$

**Proposizione 3.** Si ha

$$\sum_{k=0}^n \sin(kx) = \frac{-\cos(n + \frac{1}{2})x + \cos \frac{x}{2}}{2 \sin(\frac{x}{2})}$$

e

$$\sum_{k=0}^n \cos(kx) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin(\frac{x}{2})} + \frac{1}{2}$$

## 5.2 Ortonormalità

Per  $n = 1, 2, \dots$ ;  $m = 1, 2, \dots$  risulta

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx &= \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \end{cases} \\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx &= \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \neq 0 \end{cases} \\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \sin(nx) dx &= 0
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \delta_{m,n}; \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \delta_{m,n}$$

$\delta_{m,n}$  è il simbolo di Kronecker

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

Identità di Weber per  $n, m \in \mathbb{N}$

$$\sin(mx) \sin(nx) = \frac{1}{2} ((\cos((n-m)x) - \cos((n+m)x)))$$

$$\sin(nx) \cos(mx) = \frac{1}{2} ((\sin((n-m)x) + \sin((n+m)x)))$$

$$\cos(nx) \cos(mx) = \frac{1}{2} ((\cos((n-m)x) + \cos((n+m)x)))$$

## 6 06/10 Esercizi

**Esercizio 1.** Per ogni  $z \in \mathbb{C}$ :

$$1) \frac{d}{dz} \sin z = \cos z$$

$$2) \frac{d}{dz} \cos z = -\sin z$$

a) vera

b) la prima è vera e la seconda è falsa

c) la seconda è vera e la prima è falsa

d) entrambe false

**Esercizio 2.**

Per ogni  $z \in \mathbb{C}$ :

$$1) \sin(-z) = -\sin z$$

$$2) \cos(-z) = \cos(z)$$

a) vera

b) la prima è vera e la seconda è falsa

c) la seconda è vera e la prima è falsa

d) entrambe false

**Esercizio 3.** Sia  $z \in \mathbb{C}$ . Allora

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

a Vero

b Falso

**Esercizio 4.** Sia  $x \in \mathbb{R}$ . Allora

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(2k)!}$$

a Vero

b Falso

**Esercizio 5.**Per ogni  $y \in \mathbb{R}$ :

1)  $\sin(iy) = i \sinh y$

2)  $\cos(iy) = i \sinh y$

 a) vera b) la prima è vera e la seconda è falsa c) la seconda è vera e la prima è falsa d) entrambe false**Esercizio 6.**Per ogni  $z = x + iy \in \mathbb{C}, x, y \in \mathbb{R}$ :

1)  $|\sin(z)|^2 = \sin^2(x) + \sinh^2(y)$

2)  $|\cos(z)|^2 = \cos^2(x) + \sinh^2(y)$

 a) vera b) la prima è vera e la seconda è falsa c) la seconda è vera e la prima è falsa d) entrambe false**Soluzione Esercizi****Esercizio 1.** A Vere entrambe. Infatti

$$\frac{d}{dz} \sin z = \frac{1}{2i} \frac{d}{dz} (e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{2i} i (e^{iz} + e^{-iz}) = \cos z.$$

La seconda si dimostra in modo analogo.

**Esercizio 2.** A Vere entrambe. Infatti

$$\sin(-z) = \frac{1}{2i} (e^{-iz} - e^{iz}) = -\sin z.$$

La seconda si dimostra in modo analogo.

**Esercizio 3.** A Vero. Infatti  $f(z) = \cos^2 z + \sin^2 z$  é vera segue dall'espressione di  $\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$  e  $\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ **Esercizio 4.** B Falsa. Infatti

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

**Esercizio 5.** B La prima é vera la seconda é falsa. Infatti

$$\sin iy = \frac{1}{2i}(e^{i^2y} - e^{-i^2y}) = \frac{-1}{i} \sinh y = i \sinh y.$$

$$\cos iy = \frac{1}{2}(e^{i^2y} + e^{-i^2y}) = \cosh y.$$

**Esercizio 6.** A Vera.

Poiché, utilizzando l'esercizio precedente,

$$\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y,$$

$$\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y.$$

Si ha

$$\begin{aligned} |\sin(x + iy)|^2 &= (\sin x \cosh y)^2 + (\cos x \sinh y)^2 = (\sin x)^2(1 + \sinh^2 x) + (\cos x \sinh y)^2 \\ &= \sin^2 x + ((\sin x)^2 + (\cos x)^2) \sinh^2 x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\cos(x + iy)|^2 &= (\cos x \cosh y)^2 + (\sin x \sinh y)^2 = (\cos x)^2(1 + \sinh^2 x) + (\sin x \sinh y)^2 \\ &= \cos^2 x + ((\sin x)^2 + (\cos x)^2) \sinh^2 x. \end{aligned}$$

## 7 10.10 Funzioni complesse. Logaritmo complesso. Funzioni di due variabili reali. Derivate parziali: definizione e calcolo

### 7.1 Logaritmo complesso.

Possiamo dare la definizione di logaritmo di un numero complesso  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ . Sia  $z \neq 0$ .  $\ln z$  sono quei numeri  $\omega = x + iy$  tali  $e^\omega = z$ .

Si ricava

$$e^x(\cos y + i \sin y) = r(\cos \theta + i \sin \theta) \iff x = \ln r \quad y = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Pertanto ogni numero complesso non nullo ha infiniti logaritmi

$$\ln z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi)$$

Logaritmo principale

$$\arg z \in (-\pi, \pi], \quad k = 0$$

Possiamo ora definire  $z^\alpha$  con  $\alpha$  reale o complesso.

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$$

esempio:

$$i^i = e^{i \ln i} = e^{i(\arg i + 2k\pi)} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi}$$

Tutti i valori sono numeri reali.

## 7.2 Derivate parziali prime

Data una funzione  $f$  definita in un intorno di  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f$  si dice derivabile parzialmente rispetto a  $x$  nel punto  $(x_0, y_0)$  se esiste ed è finito il limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Il valore del limite si indica con  $f_x(x_0, y_0)$  e si chiama derivata parziale prima rispetto a  $x$  della funzione in  $(x_0, y_0)$ .

$f$  si dice derivabile parzialmente rispetto a  $y$  nel punto  $(x_0, y_0)$  se esiste ed è finito il limite

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

Il valore del limite si indica con  $f_y(x_0, y_0)$  e si chiama derivata parziale prima rispetto a  $y$  della funzione in  $(x_0, y_0)$ .

$f$  si dice derivabile parzialmente rispetto a  $x$  o rispetto a  $y$  in un aperto  $A$  se è derivabile parzialmente in ogni punto di  $A$ .

### 7.2.1 Esercizio.

Calcolare  $f_x$   $f_y$  ove definite

$$f(x, y) = x + y$$

$$f(x, y) = xy$$

$$f(x, y) = \frac{x}{y}$$

$$f(x, y) = \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

$$f(x, y) = \sqrt{(x^2 + 4)}$$

$$f(x, y) = \sin(xy)$$

$$f(x, y) = \operatorname{arctg}(xy)$$

$$f(x, y) = \ln(xy)$$

$$f(x, y) = \ln(x + y)$$

$$f(x, y) = \pi^{xy}$$

## 8 12.10 Funzioni complesse. Funzioni derivabili in senso complesso. Condizioni di Cauchy-Riemann

### 8.0.2 Derivata di funzioni complesse.

Dato  $z_0 \in \mathbb{C}$  e  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  se esiste finito il limite del rapporto incrementale (inteso come quoziente di numeri complessi)

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$$

dove il rapporto si può scrivere:

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta x + i\Delta y} + i \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta x + i\Delta y}$$

Assumiamo ora che la  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  sia derivabile in  $\mathbb{C}$ . Sia  $z_0 \in \mathbb{C}$ .

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$$

$$(\Delta x, 0) \rightarrow (0, 0)$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + i\Delta y) - u(x_0, y_0)}{i\Delta y} + i \frac{v(x_0, y_0 + i\Delta y) - v(x_0, y_0)}{i\Delta y} = \frac{u_y(x_0, y_0)}{i} + v_y(x_0, y_0)$$

$$(0, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$$

Uguagliando i limiti, deduciamo le Condizioni di Cauchy- Riemann

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \end{cases}$$

Vale il viceversa

Siano  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  due funzioni di classe  $C^1$ . Definiamo

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Se  $u$  e  $v$  soddisfano le condizioni di Cauchy Riemann allora  $f$  è derivabile.

Esempio di funzione olomorfa in  $\mathbb{C}$ :  $f(z) = e^z$ ,  $f(z) = \cos z$ ,  $f(z) = \sin z$ ,  $f(z) = z^n$

$$D(z^n) = nz^{n-1}, n \in \mathbb{N}, D(e^z) = e^z, D(\cos z) = -\sin z, D(\sin z) = \cos z$$

Esempio

$$e^z = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$u(x, y) = e^x \cos y$$

$$v(x, y) = e^x \sin y$$

$$u_x = e^x \cos y = v_y$$

$$u_y = -e^x \sin y = -v_x$$

La funzione  $f(z) = \bar{z}$  non è olomorfa in  $\mathbb{C}$ . Infatti non sono verificate le condizioni di Cauchy-Riemann.

Da

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0),$$

ricavare la derivata complessa delle funzioni elementari.

$$D(e^z) = e^z, D(\cos z) = -\sin z, D(\sin z) = \cos z$$

## 9 13.10 Serie di Fourier. Definizione e calcolo dei coefficienti.

### 9.1 Polinomi trigonometrici

Un polinomio trigonometrico è una combinazione lineare finita di funzioni  $\sin(nx)$  e  $\cos(nx)$  e per alcuni valori di interi positivi. E' una funzione periodica di periodo  $2\pi$ .

$$s_n(x) = a_0/2 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

#### 9.1.1 Funzioni periodiche

Una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  si dice periodica di periodo  $T > 0$  se

$$f(x + T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Il più piccolo numero  $T$  (se esiste) si dice periodo minimo.

E' interessante osservare l'invariata per traslazione dell'integrale di una funzione periodica

$$\int_0^T f(x + y)dx = \int_0^T f(x)dx$$

Cominciamo con l'osservare la seguente proprietà. Per ogni numero reale  $a$

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

Infatti

$$\int_0^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^{a+T} f(x)dx$$

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^{a+T} f(x)dx - \int_0^a f(x)dx = \int_0^{a+T} f(x)dx - \int_0^a f(x+T)dx$$

Si ha

$$\int_0^a f(x+T)dx = \int_T^{a+T} f(x)dx$$

Ne consegue

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

In più

$$\int_0^T f(x+y)dx = \int_y^{T+y} f(t)dt = \int_0^T f(x)dx$$

## 9.2 Serie di Fourier

Supponiamo che la successione di somme parziali  $s_n(x)$  converga per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Otteniamo la serie trigonometrica di coefficienti  $a_0, a_k, b_k$ .

$$a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

Data una funzione  $f$  periodica di periodo  $2\pi$  ci chiediamo se essa sia sviluppabile in una serie trigonometrica ossia se si possono determinare i coefficienti  $a_0, a_k, b_k$  in modo che la serie converga ed abbia come somma  $f(x)$ .

Moltiplicando  $f(x)$  per  $\cos(mx)$  e  $\sin(mx)$  ed integrando tra  $-\pi, \pi$  si ottiene

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx) dx$$

Le successioni  $(a_m)$  e  $(b_m)$  sopra definite si chiamano coefficienti di Fourier di  $f(x)$ . La serie, una volta specificati i coefficienti, si chiama serie di Fourier di  $f(x)$ .

Funzioni pari:

$$b_k = 0 \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

Funzioni dispari:

$$a_k = 0 \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

## 9.3 Esempio

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

prolungata per periodicità I coefficienti di Fourier sono  $a_0 = 1, a_k = 0, b_k = \frac{1-(-1)^k}{k\pi}$  La serie di Fourier è data da

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$$

**Esercizio 1** Data la funzione

$$f(x) = |x|x,$$

per  $x \in [-\pi, \pi)$  e prolungata per periodicità in  $\mathbb{R}$  determinare le serie di Fourier.

La funzione è dispari, pertanto  $a_0 = 0, a_k = 0, \forall k \in \mathbb{N}$ .

$$b_k = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 -x^2 \sin kx dx + \int_0^{\pi} x^2 \sin kx dx \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \left[ - \int_{\pi}^0 -x^2 \sin k(-x) dx + \int_0^{\pi} x^2 \sin kx dx \right] = \\
&= \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\pi} x^2 \sin kx dx + \int_0^{\pi} x^2 \sin kx dx \right] = \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\pi} x^2 \sin kx dx \right].
\end{aligned}$$

Risulta:

$$\begin{aligned}
\int x^2 \sin kx dx &= - \int x^2 \frac{1}{k} (\cos kx)' dx = \\
&= -\frac{1}{k} x^2 (\cos kx) + \frac{2}{k} \int x \cos kx dx = \\
\int_0^{\pi} x^2 \sin kx dx &= -\frac{1}{k} x^2 (\cos kx) \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{k} \int_0^{\pi} x \cos kx dx = \\
&= -\frac{1}{k} \pi^2 (-1)^k + \frac{2}{k^2} \int_0^{\pi} x (\sin kx)' dx = \\
&= -\frac{1}{k} \pi^2 (-1)^k + \left( \frac{2}{k^3} (-1)^k - \frac{2}{k^3} \right)
\end{aligned}$$

Quindi indicata  $S_2$  la serie di Fourier relativa a  $f$ , si ha

$$S_2 = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \left( -\frac{1}{k} \pi^2 (-1)^k + \frac{2}{k^3} (-1)^k - \frac{2}{k^3} \right) \sin kx.$$

**Esercizio 2** Sia  $c$  un parametro reale positivo e  $f$  la funzione periodica di periodo  $2\pi$  ottenuta prolungando per periodicit  su  $\mathbb{R}$  la funzione

$$x \in (-\pi, \pi] \rightarrow e^{\max\{\frac{1}{\pi}, c\}x}$$

Determinare la serie di Fourier di  $f$ .

Se  $c > \frac{1}{\pi}$ , risulta  $f(x) = e^{cx}$ , pertanto la serie vale:

$$\frac{\sinh c\pi}{\pi c} + \frac{2}{\pi} \sinh c\pi \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + c^2} (c \cos kx - k \sin kx).$$

Se  $c \leq \frac{1}{\pi}$ , risulta  $f(x) = e^{\frac{1}{\pi}x}$ , dunque la serie vale:

$$\sinh 1 + \frac{2}{\pi} \sinh 1 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + (1/\pi^2)} \left( \frac{1}{\pi} \cos kx - k \sin kx \right).$$

**Esercizio 3** Sia  $f$  la funzione periodica di periodo  $2\pi$  ottenuta prolungando per periodicit  su  $\mathbb{R}$  la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ -3x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}.$$

Determinare la serie di Fourier di  $f$ .

La serie di Fourier è data da

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \text{sen}(kx)],$$

dove:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, k = 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{sen}(kx) dx, k = 0, 1, 2, \dots$$

Calcoliamo i coefficienti di Fourier della  $f$ .

$$a_0 = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 3x dx = -\frac{3}{2}\pi;$$

$$a_k = -\frac{3}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(kx) dx = -\frac{3}{\pi} \left[ \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \right];$$

$$b_k = -\frac{3}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(kx) dx = -\frac{3}{k} (-1)^{k+1} = \frac{3}{k} (-1)^k.$$

la serie di Fourier richiesta è:

$$-\frac{3\pi}{4} + \frac{6}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} + 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin(kx)}{k}.$$

**Esercizio 4** Sia  $f$  la funzione periodica di periodo  $2\pi$  ottenuta prolungando per periodicità su  $\mathbb{R}$  la funzione

$$f(x) = \max \{2, 2 - x\}, \quad x \in (-\pi, \pi].$$

Determinare la serie di Fourier di  $f$ .

La serie di Fourier è data da

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \text{sen}(kx)],$$

dove:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, k = 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{sen}(kx) dx, k = 0, 1, 2, \dots$$

Osserviamo che:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x \in (-\pi, 0) \\ 2, & x \in [0, \pi] \end{cases}.$$

Dunque:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (2 - x) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2 dx = \frac{\pi}{2} + 4.$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (2 - x) \cos(kx) dx + \int_0^{\pi} 2 \cos(kx) dx = \\ &= \frac{1}{\pi k^2} [(-1)^k - 1]. \end{aligned}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (2 - x) \sin(kx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2 \sin(kx) dx = \frac{1}{k} (-1)^k.$$

La serie di Fourier richiesta è:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} + 4 \right) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\pi k^2} [(-1)^k - 1] \cos(kx) + \frac{1}{k} (-1)^k \sin(kx) \right].$$

Ricordiamo: se  $f$  è pari allora  $b_k = 0, \forall k$ ; se  $f$  è dispari allora  $a_k = 0, \forall k$ ; inoltre per la  $2\pi$  periodicità della funzione  $f$  vale

$$\int_{-\pi-a}^{\pi-a} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

per ogni  $a$  numero reale.

**9.4 Esercizio.** Calcolare la serie di Fourier per l'onda quadra, l'onda a dente di sega, l'onda triangolare.

**9.5 Esercizio.**

Data

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad -L \leq x \leq L$$

Dimostrare

$$\int_{-L}^L f^2(x) dx = L \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$$

Dim.

$$\sum_{n,m=1}^{+\infty} a_n a_m \int_{-L}^L \left( \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \sin \left( \frac{m\pi x}{L} \right) dx =$$

$$y = \frac{\pi x}{L}, \quad dy = \frac{\pi dx}{L}$$

$$\sum_{n,m=1}^{+\infty} a_n a_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin ny \sin my \, dy = L \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$$

## 10 17.10 Disuguaglianza di Bessel. Nucleo di Dirichlet

L'identità di Parseval è un importante risultato che riguarda la sommabilità della serie di Fourier di una funzione. L'identità di Parseval stabilisce che la somma dei quadrati dei coefficienti di Fourier di una funzione è pari all'integrale del quadrato della funzione:

Un caso particolare (assumeremo che siano valide ipotesi sulla funzione che ci permettano di fare il calcolo)

Data

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

con  $b_n$  reale, si ha

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n,m=1}^{+\infty} b_n b_m \sin nx \sin mx \, dx = \\ &= \sum_{n,m=1}^{+\infty} b_n b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \pi \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 \end{aligned}$$

Da cui

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2$$

### 10.1 Disuguaglianza di Bessel

**Lemma 10.1.** *Sia*

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)],$$

*allora*

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)$$

*Dimostrazione.* Consideriamo

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)],$$

dove:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Allora calcoliamo

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\pi}^{\pi} s_n^2(x) dx = \\
 & \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right) \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^n a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right) dx = \\
 & \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^n a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right) dx + \\
 & \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) \right) \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^n a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right) dx + \\
 & \int_{-\pi}^{\pi} \left( b_k \sin(kx) \right) \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^n a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right) dx = \\
 & \pi \frac{a_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)
 \end{aligned}$$

Ne risulta

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)$$

□

**Lemma 10.2.** *Sia*

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)],$$

*allora*

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n f(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)$$

Dal precedente risultato segue

$$0 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - s_n(x))^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2),$$

quindi

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)$$

Per  $n \rightarrow +\infty$  otteniamo la Disuguaglianza di Bessel

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

Inoltre, come corollario,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx < +\infty, \implies$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} b_k = 0,$$

ossia

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = 0.$$

## 10.2 Nucleo di Dirichlet

$$d_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx)$$

Si ha

$$d_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{2 \sin(\frac{x}{2})}$$

Infatti sommiamo da 1 a  $n$  i due membri dell'identità trigonometrica

$$\sin((k + \frac{1}{2})x) - \sin((k - \frac{1}{2})x) = 2 \sin(\frac{x}{2}) \cos(kx)$$

$$\sum_{k=1}^n (\sin((k + \frac{1}{2})x) - \sin((k - \frac{1}{2})x)) = \sin((n + \frac{1}{2})x) - \sin(\frac{x}{2})$$

Inoltre

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 d_n(t) dt = \frac{1}{2}.$$

Segue da  $d_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt)$  ed effettuando l'integrazione.

## 10.3 Formula di Dirichlet

**Teorema 10.3.** *Sia  $f$  periodica di periodo  $2\pi$  integrabile in  $[-\pi, \pi]$ . La somma parziale  $s_n(x)$  della serie di Fourier di  $f$  si può esprimere in termini del nucleo di Dirichlet (integrale di convoluzione)*

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) d_n(t) dt,$$

ove

$$d_n(x) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin(\frac{x}{2})}$$

La dimostrazione è basata sul seguente calcolo. Per definizione di  $s_n(x)$

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos(kx) \cos(ky) + \sin(kx) \sin(ky)) \right] dy = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos(k(x-y))) \right] dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos(kt)) \right] dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{2 \sin(\frac{t}{2})} dt \end{aligned}$$

## 11 19.10 Teorema di Convergenza Puntuale

**Definizione 11.1.** Data una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  diciamo che  $f$  è regolare a tratti in  $[a, b]$  se esistono un numero finito di punti  $x_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, N$  con  $a_0 = x_0 = x_1 < x_1 < x_2 \dots < x_N = b$  tali che  $f$  è derivabile con derivata continua in ogni intervallo  $(x_i, x_{i+1})$ , e la restrizione di  $f'$  a  $(x_i, x_{i+1})$  è prolungabile con continuità in  $[x_i, x_{i+1}]$ . Se la funzione  $f$  è definita su  $\mathbb{R}$ , allora diciamo  $f$  è regolare a tratti in  $\mathbb{R}$  se è regolare a tratti in ogni intervallo  $[a, b]$  contenuto in  $\mathbb{R}$ .

**Convergenza Puntuale** Per ogni  $x$  reale la successione  $s_n(x)$  converge a  $f(x)$ . ovvero per ogni  $x \in \mathbb{R}$  e per ogni  $\epsilon > 0$  esiste un indice  $N(x, \epsilon)$  the che

$$|s_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall N > N(x, \epsilon)$$

**Teorema 11.2.** Sia  $f$  una funzione periodica regolare a tratti su  $\mathbb{R}$ . Per ogni  $x$  reale la serie di Fourier converge alla media aritmetica tra il limite destro e il limite sinistro:

$$\frac{1}{2} [f(x_+) + f(x_-)],$$

e a  $f(x)$  nei punti di continuità.

Dobbiamo considerare

$$s_n(x) - \frac{1}{2} [f(x_+) + f(x_-)] = \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^\pi (f(x+t) - f(x_+)) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin(\frac{t}{2})} dt + \int_{-\pi}^0 (f(x+t) - f(x_-)) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin(\frac{x}{2})} dt \right]$$

Poniamo

$$F(t) = \begin{cases} \frac{f(x+t) - f(x_+)}{2 \sin(\frac{t}{2})} & 0 < t \leq \pi \\ 0 & t = 0 \\ \frac{f(x+t) - f(x_-)}{2 \sin(\frac{t}{2})} & -\pi < t \leq 0 \end{cases}$$

Ne segue dalle ipotesi su  $f$  che esiste il limite per  $t \rightarrow 0^+$  e per  $t \rightarrow 0^-$  di  $F$ . Infatti

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} F(t) = f'_+(x) \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} F(t) = f'_-(x)$$

$F$  è continua a tratti in  $[-\pi, \pi]$ , dunque integrabile e limitata. Inoltre

$$s_n(x) - \frac{1}{2} [f(x_+) + f(x_-)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi F(t) \sin((n + \frac{1}{2})t) dt.$$

Del resto

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi F(t) \sin((n + \frac{1}{2})t) dt =$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos \frac{t}{2} \sin(nt) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \sin \frac{t}{2} \cos(nt) dt$$

Dalla disuguaglianza di Bessel si deduce che

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(t) \sin \frac{t}{2} \cos(nt) dt \rightarrow 0$$

per  $n \rightarrow +\infty$ .

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos \frac{t}{2} \sin(nt) dt \rightarrow 0$$

per  $n \rightarrow +\infty$ .

In conclusione

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(t) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt \rightarrow 0,$$

per  $n \rightarrow +\infty$ .

## 11.1 Serie di Fourier in forma complessa

Data

$$a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ikx}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ikt} = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_k \cos(kx) + i\gamma_k \sin(kx)) + \gamma_{-k} \cos(-kx) + i\gamma_{-k} \sin(-kx) =$$

$$\gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_k + \gamma_{-k}) \cos(kx) + i(\gamma_k - \gamma_{-k}) \sin(kx)$$

$$\gamma_0 = a_0/2$$

$$\gamma_k + \gamma_{-k} = a_k$$

$$i(\gamma_k - \gamma_{-k}) = b_k$$

e

$$\gamma_k + \gamma_{-k} = a_k$$

$$\gamma_k - \gamma_{-k} = -ib_k$$

Sommando

$$\gamma_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$$

Sottraendo

$$\gamma_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$$

E' utile scrivere la serie di Fourier nella forma

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ikx}$$

Risulta per  $n \neq m$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

In conclusione

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \delta_{n,m}$$

$$\gamma_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

## 11.2 Serie di Fourier per funzioni periodiche di periodo $T \neq 2\pi$ .

Sia  $f$  periodica di periodo  $L \neq 2\pi$ . Consideriamo  $\tilde{f}(y) = f(\frac{Ly}{2\pi})$ , allora  $\tilde{f}$  è periodica di periodo  $2\pi$ .

La serie di Fourier di  $\tilde{f}$  è data da

$$a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(ky) + b_k \sin(ky)$$

La serie di Fourier di  $f$  risulta ( $x := \frac{Ly}{2\pi}$ )

$$a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\frac{2k\pi}{L}x) + b_k \sin(\frac{2k\pi}{L}x)$$

i cui coefficienti sono

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(y) \cos(ky) dy = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \cos(\frac{2k\pi}{L}x) dx$$

$k = 0, 1 \dots$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(y) \sin(ky) dy = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \sin(\frac{2k\pi}{L}x) dx$$

$k = 1 \dots$

## 12 20.10 Esercizi

Sia  $f$  la funzione periodica di periodo  $2\pi$  ottenuta prolungando per periodicità su  $\mathbb{R}$  la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ -3x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}.$$

$$-\frac{3\pi}{4} + \frac{6}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} + 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin(kx)}{k}.$$

Poiché  $f$  è continua in tutti i punti di  $\mathbb{R}$  distinti da  $\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , dal teorema di convergenza puntuale delle serie di Fourier la serie converge ad  $f$  in tali punti. Notiamo che, se  $x = \pi$ , la serie si riduce a :

$$-\frac{3\pi}{4} - \frac{6}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Poiché

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{8}\pi^2,$$

questa somma vale:

$$\frac{f(\pi_+) + f(\pi_-)}{2} = -\frac{3\pi}{2}.$$

**Esercizio 1.** Sia  $\alpha$  un numero reale positivo. Determinare, al variare di  $\alpha$ , il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}.$$

**Esercizio 2.** Sia  $x \in \mathbb{R}$ , e  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Allora se  $f$  è pari e  $g$  è dispari  $f + g$  è dispari

a Vero

b Falso

**Esercizio 3.** Sia  $x \in \mathbb{R}$ , e  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Allora se  $f$  è dispari e  $g$  è dispari  $fg$  è dispari

a Vero

b Falso

**Esercizio 4.** Sviluppare in serie di Mac Laurin la funzione

$$f(x) = \cosh x^2.$$

**Esercizio 5.** Scrivere la serie di Fourier della funzione  $f(x) = 0$  in  $[-\pi, 0)$  e  $f(x) = 1$  in  $[0, \pi)$  ripetuta per periodicità in  $\mathbb{R}$

**Esercizio 6.** Scrivere la serie di Fourier della funzione  $f(x) = x$  in  $[-\pi, \pi)$  ripetuta per periodicità in  $\mathbb{R}$

**Esercizio 7.** Vale

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

a Vero

b Falso

**Esercizio 8.** Vale

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{2k-1}$$

a Vero

b Falso

### 13 Topologia in $\mathbb{R}^2$ , punti interni, esterni, e di frontiera. Insiemi aperti, chiusi, chiusura di un insieme. Funzioni di due variabili, nozione di limite

Ricordiamo che per  $x, y \in \mathbb{R}$  valgono le seguenti proprietà

- $|x| \geq 0$
- $x \neq 0$  se e solo se  $|x| > 0$
- $|x| = |-x|$
- $|xy| = |x||y|$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$
- $||x| - |y|| \leq |x - y|$

#### 13.1 Norma

$\mathbb{R}^2$  con  $p > 1$ . La formula

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p}.$$

definisce una norma in  $\mathbb{R}^2$ .

Per  $p = 2$

$$\|x\| = \|x\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2)^{1/2}.$$

Occorre verificare che valgono le seguenti proprietà  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^2$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

- $\|x\| \geq 0$ ,
- $\|x\| = 0 \iff x = 0$ ,
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ ,
- $|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|$ ,
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .
- $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Il prodotto scalare di due elementi di  $\mathbb{R}^2$

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

è minore o uguale al prodotto delle loro norme.

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|$$

l'uguaglianza che sussiste solo se  $x$  e  $y$  sono multipli.

$$0 \leq \|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda x \cdot y + |\lambda|^2 \|y\|^2$$

Disuguaglianza di secondo grado in  $\lambda$

$$\Delta \leq 0$$

$$(x \cdot y)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

Ne segue

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2x \cdot y \leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

### 13.2 Interno, Esterno, Frontiera di un insieme

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

**Definizione 13.1.** Sia  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  e  $r > 0$  un numero reale.  $B_r(x_0)$  di centro  $x_0$  e raggio  $r$  per

$$B_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - x_0\| < r\}.$$

- Per  $m = 1$  troviamo gli intervalli  $]a - r, a + r[$ .
- Per  $m = 2$  troviamo il cerchio privato dei suoi punti frontiera
- Per  $m = 3$  troviamo la palla privata dei suoi punti frontiera

Sia  $A \subset \mathbb{R}^2$  e  $x \in \mathbb{R}^2$ .

- $x$  è un *punto interno* di  $A$  se esiste  $r > 0$  tale  $B_r(x) \subset A$ .
- $x$  è un *punto esterno* di  $A$  se esiste  $r > 0$  tale che  $B_r(x) \subset \mathbb{R}^m \setminus A$ .
- $x$  è un *punto frontiera* di  $A$  se  $B_r(x)$  incontra  $A$  e  $\mathbb{R}^m \setminus A$  per ogni  $r > 0$ .

L'insieme dei punti interni esterni e di frontiera si chiama *interno*, *esterno* e la *frontiera* di  $A$ , e si denota con  $int(A)$ ,  $ext(A)$  e  $\partial A$ . Si utilizza anche la notazione  $A^\circ$  invece di  $int(A)$ . Sia  $A \subset \mathbb{R}^2$ .

- Gli insiemi  $int(A)$ ,  $ext(A)$ ,  $\partial A$  formano una *partizione* di  $\mathbb{R}^2$ : sono disgiunti e la loro riunione fornisce  $\mathbb{R}^2$ .

### 13.3 Insiemi aperti, chiusi, compatti

**Definizione 13.2.** Sia  $X \subset \mathbb{R}^2$  e  $x \in \mathbb{R}^2$ . Si dice che il punto  $x$  è di *accumulazione* per  $X$  se la palla  $B_r(x)$  incontra  $X$  per ogni  $r > 0$ . L'insieme dei punti  $x$  con questa proprietà si chiama *chiusura* di  $X$  e si denota con  $\overline{X}$ .

**Proposizione 4.** Sia  $X \subset \mathbb{R}^2$  e  $x \in \mathbb{R}^2$ , allora

$$x \in \overline{X} \iff \exists (x_n) \subset X \text{ e } x_n \rightarrow x$$

**Definizione 13.3.** Sia  $X \subset \mathbb{R}^2$ . Si dice che  $X$  è un *insieme aperto* se per ogni  $x \in X$  se esiste  $r > 0$  tale che la palla  $B_r(x)$  è interamente contenuta in  $X$ .

Dati due punti distinti di  $\mathbb{R}^2$   $x$  e  $y$  esistono due aperti  $X$  e  $Y$  tali che  $x \in X$ ,  $y \in Y$  e  $X \cap Y = \emptyset$ .

**Proposizione 5.**  $\emptyset$  e  $\mathbb{R}^2$  sono aperti. L'unione qualsiasi di insiemi aperti è un insieme aperto. L'intersezione di un numero finito di insiemi aperti è un insieme aperto.

**Definizione 13.4.** Un insieme  $X$  è chiuso se l'insieme complementare in  $\mathbb{R}^2$  è aperto

$\overline{X}$  è il più piccolo insieme chiuso che contiene  $X$ .

**Proposizione 6.**  $\emptyset$  e  $\mathbb{R}^2$  sono chiusi. L'unione di un numero finito di insiemi chiusi è un insieme chiuso. L'intersezione qualunque di insiemi chiusi è un insieme chiuso.

**Definizione 13.5.**  $K$  è limitato  $\iff$  esiste una costante  $L$  tale che  $\|x\| < L$  per ogni  $x \in K$ . Il diametro di  $K$  è definito come

$$\text{diam}(K) = \sup\{\|x - y\|, x, y \in K\}.$$

Se  $\text{diam}(K) = +\infty$  diremo che  $K$  è illimitato.

**Definizione 13.6.**  $K$  è compatto se  $\forall (x_n) \subset K$  esiste una sottosuccessione  $(x_{n_k})$  con  $\lim x_{n_k} \in K$

**Teorema 13.7. (Teorema di Heine-Borel)**  $K$  compatto di  $\mathbb{R}^m \iff K$  è chiuso e limitato

### 13.4 Esercizio.

Calcolare l'insieme di definizione delle funzioni descrivendone le proprietà (aperto, chiuso, né aperto né chiuso, limitato, illimitato)

- $f(x, y) = \ln(2 - x^2 - y^2)$
- $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$
- $f(x, y) = \ln(1 - x^2) + \ln(1 - y^2)$
- $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$
- $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 - 4}$
- $f(x, y) = \sqrt{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}$

Sia  $A \subset \mathbb{R}^2$ ,  $(x_0, y_0)$  punto di accumulazione per  $A$ . Si dice che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L \in \mathbb{R}$$

se  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall (x, y) \in A \neq (x_0, y_0)$  tale che  $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$  risulta

$$|f(x, y) - L| < \epsilon$$

### 13.5 Esercizio.

Verificare

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

### 13.6 Esercizio.

Verificare

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^3 + 5x^2 + 5y^2}{x^2 + y^2} = 5$$

## 14 26-10 Limiti. Non esistenza di limiti. Continuità.

### 14.1 Esercizio n.1

Esempio di funzione che non ammette limite per  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y=mx) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - m^2}{1 + m^2} = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}$$

### 14.2 Esercizio n.2

Esempio di funzione che non ammette limite per  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  anche se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, mx) = 0$$

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

Si ha

$$f(x, mx) = \frac{x(mx)^2}{x^2 + (mx)^4} = \frac{m^2x}{1 + m^4x^2},$$

quindi

$$\lim_{(x,y=mx) \rightarrow (0,0)} f(x, mx) = 0.$$

Mentre

$$f(y^2, y) = \frac{y^4}{y^4 + y^4} = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2},$$

quindi

$$\lim_{(x=y^2,y) \rightarrow (0,0)} f(y^2, y) = \frac{1}{2}.$$

Sia  $A \subset \mathbb{R}^2$ ,  $(x_0, y_0) \in A$  punto di accumulazione per  $A$ . Si dice che  $f$  è continua in  $(x_0, y_0)$  se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall (x, y) \in A$  tale che  $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$  risulta

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon$$

La continuità non discende dall'esistenza delle derivate parziali prime.

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & (x, y) = 0 \\ \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq 0 \end{cases}$$

In  $(0, 0)$  la funzione ammette derivate prime nulle, ma non è continua. Esempio di funzione che ammette derivate parziali prime in un punto ma non è continua nel punto.

## 15 27-10 Limiti. Derivate parziali prime e seconde. Operatori: Gradiente, Divergenza, Laplaciano, (n=2,n=3)

### 15.1 Esercizio.

Calcolare  $f_x$   $f_y$  ove definite

- $f(x, y) = x + 7y$
- $f(x, y) = 2xy$
- $f(x, y) = \frac{1}{2} \frac{x}{y}$
- $f(x, y) = \sqrt{3x^2 + y^2}$
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 5}$
- $f(x, y) = \sin(x + y)$
- $f(x, y) = \operatorname{arctg}(2xy)$
- $f(x, y) = \ln(4xy)$
- $f(x, y) = \ln(2x + 3y)$
- $f(x, y) = \pi^x \pi^y$

Esempio di funzione continua che non ammette derivate parziali prime in un punto.

Nel punto  $(0, 0)$  la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

non ammette le derivate parziali. Ricordiamo che una funzione  $f$  definita in un intorno di  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f$  si dice derivabile parzialmente rispetto a  $x$  nel punto  $(x_0, y_0)$  se esiste ed è finito il limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Il valore del limite si indica con  $f_x(x_0, y_0)$  e si chiama derivata parziale prima rispetto a  $x$  della funzione in  $(x_0, y_0)$ . Inoltre  $f$  si dice derivabile parzialmente rispetto a  $y$  nel punto  $(x_0, y_0)$  se esiste ed è finito il limite

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

Il valore del limite si indica con  $f_y(x_0, y_0)$  e si chiama derivata parziale prima rispetto a  $y$  della funzione in  $(x_0, y_0)$ .

Dovrebbe esistere finito

$$? \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h},$$

tale limite non esiste. Analogamente

$$? \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{|k|}{k},$$

non ammette limite. Se  $f \in C^2(A)$  ossia ammette derivate parziali seconde in  $A$ , possiamo associare a  $f$  la sua *matrice hessiana*

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix}$$

e il determinante della matrice hessiana, è dato da

$$|H| = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}f_{yx}$$

$$D^2 f(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y, z) & f_{xy}(x, y, z) & f_{xz}(x, y, z) \\ f_{yx}(x, y, z) & f_{yy}(x, y, z) & f_{yz}(x, y, z) \\ f_{zx}(x, y, z) & f_{zy}(x, y, z) & f_{zz}(x, y, z) \end{pmatrix}$$

La traccia della matrice hessiana definisce l'operatore di Laplace o laplaciano

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} \quad n = 2$$

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} \quad n = 3$$

Nel caso in cui le derivate seconde miste siano uguali la matrice hessiana risulta simmetrica. Ad ogni matrice simmetrica possiamo associare un polinomio di secondo grado in due variabili  $(h, k)$  omogeneo che costruisce la forma quadratica associata.

## 15.2 Forme quadratiche in $\mathbb{R}^2$ e la matrice Hessiana

$$Q = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad (1)$$

Una matrice  $Q$  si dice *non negativa* (rispettivamente, *non positiva*) se la forma  $w^T Q w$  o  $Q w \cdot w$  ( $w = (h, k) \in \mathbb{R}^2$ ) è semidefinita positiva (rispettivamente negativa) cioè se

$$w^T Q w = ah^2 + 2bhk + ck^2 \geq 0$$

(rispettivamente,  $w^T Q w \leq 0$ ),  $\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2$ ,

ed esiste  $z$  non nullo per cui  $w^T Q w = 0$ . Una matrice  $Q$  si dice *positiva* (rispettivamente, *negativa*) se la forma  $z^T Q z$  è *positiva* (rispettivamente, *negativa*)

$$w^T Q w = ah^2 + 2bhk + ck^2 > 0 \quad (w^T Q w < 0) \forall (h, k) \in \mathbb{R}^2, (h, k) \neq 0.$$

Indefinita se esistono  $w_1$  e  $w_2$  tali che  $w_1^T Q w_1 > 0$ ,  $w_2^T Q w_2 < 0$ .

**Esempio 15.1.** Un esempio di matrice positiva è data da

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

poichè  $h^2 + k^2 > 0 \quad \forall (h, k) \in \mathbb{R}^2, h, k \neq 0$ . Un esempio di matrice non negativa è data da

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

poichè  $2h^2 \geq 0 \quad \forall (h, k) \in \mathbb{R}^2$ , potendo essere nulla nei punti  $(0, k)$ .

Una matrice indefinita è data da

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

poichè  $h^2 - 2k^2$  in  $(1, 1)$  è negativa, e in  $(2, 1)$  è positiva.

Abbiamo il seguente

**Teorema 15.2.** *Sia*

$$Q = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$|Q| = \det Q = ac - b^2.$$

Allora

$$|Q| > 0 \quad \text{e} \quad a > 0, \iff Q > 0$$

$$|Q| > 0 \quad \text{e} \quad a < 0, \iff Q < 0$$

Se  $\det Q < 0$ , allora  $Q$  è indefinita.

*Dimostrazione.* Data la forma quadratica

$$ah^2 + 2bhk + ck^2,$$

essa può essere equivalentemente scritta

$$a\left(h + \frac{b}{a}k\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}k^2,$$

da questa formula si evince chiaramente il risultato, perché abbiamo una quantità

$$\left(h + \frac{b}{a}k\right)^2 \geq 0$$

e  $ac - b^2$  è il determinante di  $Q$ , assumendo  $\det Q > 0$  allora se  $a > 0$  risulterà

$$a\left(h + \frac{b}{a}k\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}k^2 > 0,$$

mentre se  $a < 0$

$$a\left(h + \frac{b}{a}k\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}k^2 < 0,$$

□

Se  $f$  ammette derivate parziali seconde in  $A$ , possiamo associare a  $f$  la sua *matrice hessiana*.

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix}$$

Nel caso in cui le derivate seconde miste siano uguali la matrice hessiana risulta simmetrica.

$$D^2 f(x, y) = H(f)(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix}$$

e il determinante della matrice hessiana, è dato da

$$\det(H(f)(x, y)) = |H(f)(x, y)| = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y)$$

Allora

$$H(f)(x, y) > 0 \iff |H(f)(x, y)| > 0 \quad f_{xx}(x, y) > 0$$

$$H(f)(x, y) < 0 \iff |H(f)(x, y)| > 0 \quad f_{xx}(x, y) < 0$$

La traccia della matrice hessiana definisce l'operatore di Laplace o laplaciano

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} \quad n = 2$$

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} \quad n = 3$$

Una funzione si dice armonica in un aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^2$  se ammette derivate seconde  $f_{xx}$   $f_{yy}$  che verificano l'equazione di Laplace

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 0$$

### 15.3 Esercizio.

Calcolare la matrice hessiana della funzione:

$$f(x, y) = e^x \cos y$$

punto di accumulazione

### 15.4 Esercizi

Verificare che le seguenti funzioni sono armoniche

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

$$f(x, y) = e^x \cos y$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

Ricordiamo le principali definizioni e notazioni. Con  $F$  indichiamo un campo vettoriale,  $F_1$ ,  $F_2$  ed  $F_3$  sono le sue componenti.

Con  $f, g$  indichiamo funzioni a valori reali definite su un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$ .

Tutte le funzioni sono sufficientemente regolari (ad esempio  $F \in C^1$ ,  $f \in C^2$ ).

#### Definizione 15.3.

$$\nabla f = (f_{x_1}, f_{x_2}, f_{x_3}) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right);$$

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$$

$$F = (F_1, F_2, F_3)$$

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z};$$

Dimostrare  $\Delta f = \operatorname{div}(Df)$ .

Applicando le definizioni precedenti

$$\operatorname{div}(Df) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

## 16 27-10. Teorema di Schwarz

**Teorema 16.1.** *Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^2$ .  $(x_0, y_0)$  un punto di  $A$  e  $f$  una funzione derivabile due volte in  $A$ . Se le derivate parziali miste sono continue in  $(x_0, y_0)$  allora*

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

*Dimostrazione.* Sia  $(x, y)$  un punto di  $\mathbb{R}^2 : x \neq x_0, y \neq y_0$ . Si pone

$F(x) = f(x, y) - f(x, y_0)$   $y$  fissato

$G(y) = f(x, y) - f(x_0, y)$   $x$  fissato. Risulta

$$F(x) - F(x_0) = G(y) - G(y_0)$$

Applicando due volte il teorema di Lagrange

$$F(x) - F(x_0) = f_{xy}(x_1, y_1)(x - x_0)(y - y_0)$$

$$G(y) - G(y_0) = f_{yx}(x_2, y_2)(x - x_0)(y - y_0),$$

con  $(x_1, y_1) \rightarrow (x_0, y_0)$ ,  $(x_2, y_2) \rightarrow (x_0, y_0)$ , per  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ . Ne segue

$$f_{xy}(x_1, y_1) = f_{yx}(x_2, y_2),$$

passando al limite per  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0),$$

□

La sola esistenza delle derivate parziali seconde miste non basta per l'invertibilità delle derivate miste **Esercizio 1.** Verificare, applicando la definizione, che

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & , (x, y) = (0, 0) \\ \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

ammette derivate parziali seconde miste  $(0, 0)$  ma

$$f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0).$$

**Teorema 16.2.** *Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^3$ .  $(x_0, y_0, z_0)$  un punto di  $A$  e  $f$  una funzione derivabile due volte in  $A$ . Se le derivate parziali miste sono continue in  $(x_0, y_0, z_0)$  allora*

$$f_{xy}(x_0, y_0, z_0) = f_{yx}(x_0, y_0, z_0)$$

$$f_{xz}(x_0, y_0, z_0) = f_{zx}(x_0, y_0, z_0)$$

$$f_{zy}(x_0, y_0, z_0) = f_{yz}(x_0, y_0, z_0)$$

Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^2$  e sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$

**Definizione 16.3.**  $f$  è differenziabile in  $(x, y)$  se  $f$  ammette derivate parziali prime e vale

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x+h, y+k) - f(x, y) - f_x(x, y)h - f_y(x, y)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

$f$  è differenziabile in  $A$  se è differenziabile in ogni punto  $(x, y)$  di  $A$ .

**Esercizio 1.** Verificare, applicando la definizione, che per ogni valore dei parametri  $\alpha$  e  $\beta$  reali

$$f(x, y) = (x + \alpha)(y + \beta),$$

è differenziabile in  $(0, 0)$ .

La relazione di limite può scriversi

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = f_x(x, y)h + f_y(x, y)k + o(\sqrt{h^2 + k^2}) \quad (h, k) \rightarrow (0, 0)$$

Da cui si evince la continuità nel punto passando al limite per  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ .

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f(x+h, y+k) = f(x, y)$$

## 17 2-11. Teorema del differenziale. Funzioni composte. Derivazione di funzioni composte. Derivata direzionale.

**Teorema 17.1.** Sia  $f$  dotata di derivate parziali prime in un aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^2$ . Se le derivate parziali prime sono continue in  $A$  allora  $f$  è differenziabile in  $A$ .

*Dimostrazione.* Occorre dimostrare

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) - f_x(x, y)h - f_y(x, y)k = o(\sqrt{h^2 + k^2}) \quad (h, k) \rightarrow (0, 0).$$

Consideriamo

$$f(x+h, y+k) - f(x, y+k) + f(x, y+k) - f(x, y) - f_x(x, y)h - f_y(x, y)k$$

Applicando due volte il teorema di Lagrange

$$f(x+h, y+k) - f(x, y+k) = f_x(x_1, y+k)h$$

$$f(x, y+k) - f(x, y) = f_y(x, y_1)k$$

con  $x_1 \rightarrow x$ ,  $y_1 \rightarrow y$  per  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ . Otteniamo

$$\frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}} |f_x(x_1, y+k) - f_x(x, y)| |h| + \frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}} |f_y(x, y_1)k - f_y(x, y)k| =$$

$$\frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}} |f_x(x_1, y+k) - f_x(x, y)| + \frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} |f_y(x, y_1)k - f_y(x, y)k|$$

$$\frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}} < 1 \quad \frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} < 1$$

Ne segue

$$\leq |f_x(x_1, y + k) - f_x(x, y)| + |f_y(x, y_1)k - f_y(x, y)|$$

Per l'ipotesi di continuità delle derivate parziali si ha che tende a zero per  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ , dimostrando così la differenziabilità. □

Notazione  $f \in C^k(A)$ :  $f$  è dotata di derivate parziali prime continue;  $C^0(A)$  funzioni continue in  $A$ .

Dal teorema del differenziale

$$C^0(A) \supset C^1(A) \supset C^2(A) \supset C^3(A) \dots \supset C^\infty(A)$$

Sia  $t \in I$ ,  $I$  intervallo. Consideriamo l'applicazione  $t \rightarrow (x(t), y(t))$ . Sia  $(x(t), y(t)) \in A$   $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$F(t) = f(x(t), y(t)),$$

vale

**Teorema 17.2.** *Assumiamo  $x(t), y(t)$  derivabili in  $t \in I$ . Sia  $f$  differenziabile in  $(x(t), y(t)) \in A$ . Allora  $F$  è derivabile in  $t$  e*

$$F'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$$

*Dimostrazione.*

$$F'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t))}{h} =$$

Per la differenziabilità

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t))}{h} =$$

$$f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} o(\sqrt{(x(t+h) - x(t))^2 + (y(t+h) - y(t))^2})$$

Risulta

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} o(\sqrt{(x(t+h) - x(t))^2 + (y(t+h) - y(t))^2}) = 0$$

□

## 17.1 Derivate direzionali

Per direzione si intende un vettore di modulo unitario.

In  $\mathbb{R}^2$  la derivata direzionale rispetto a una direzione  $\lambda$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t\alpha, y(t + t\beta)) - f(x, y)}{t}$$

Vale il seguente

**Teorema 17.3.** *Assumiamo Sia  $f$  differenziabile in  $(x, y) \in A$ . Allora  $f$  ammette derivata direzionale rispetto a ogni direzione  $\lambda$  e vale*

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, y) = f_x(x, y)\alpha + f_y(x, y)\beta$$

**Esercizio 1.** Data  $f(x, y) = x^2 - y^2$  calcolare la derivata direzionale nel punto  $(1, 1)$  lungo la direzione  $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ .

$$f_x = 2x, \quad f_y = -2y \quad f_x(1, 1) = 2, \quad f_y(1, 1) = -2$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, y) = 2/\sqrt{2} - 2/\sqrt{2} = 0$$

## 17.2 Insiemi connessi in $\mathbb{R}^2$

Un insieme aperto  $A$  si dice connesso se non esistono due aperti disgiunti non vuoti di  $\mathbb{R}^2$  la cui unione sia  $A$ .

**Teorema 17.4.** *Sia  $A$  un insieme aperto connesso e sia  $f$  dotata di derivate parziali nulle in  $A$ . Allora  $f$  è costante in  $A$ ,*

## 18 3-11. Esercizi.

### Esercizio 1.

Per ogni  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile due volte

$$\Delta(fg) = (\Delta f)g + f(\Delta g).$$

$$\Delta(f + g) = \Delta(f) + \Delta(g)$$

a) vera

b) la prima è vera e la seconda è falsa

c) la seconda è vera e la prima è falsa

d) entrambe false

*risposta : (c)*

### Esercizio 2.

Per ogni  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$ .

$$\text{rot}(Df) = 0$$

a) vera

b) falsa

$$F = (F_1, F_2, F_3)$$

$$\text{rot}F = \left( -\frac{\partial F_2}{\partial z} + \frac{\partial F_3}{\partial y}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, -\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial x} \right);$$

*risposta : (a)*

**Esercizio 3.**

Per ogni  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f \in C^4(\mathbb{R}^2)$

$$\Delta(\Delta f) = f_{xxxx} + f_{yyyy}$$

a vera

b falsa

*risposta : (b)*

**Esercizio 4.**

Per ogni  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ .  $D^2 f$  indica la matrice hessiana di  $f$

$$\det(D^2 f) = 0 \iff f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) = f_{xy}^2(x, y)$$

a vera

b falsa

*risposta : (a)*

**Esercizio 5.**

$$\arctan \frac{x}{y} + \arctan \frac{y}{x} = -\frac{\pi}{2} \quad x > 0, y < 0$$

a vera

b falsa

*risposta : (a)*

**Esercizio 6.**

$$\arctan \frac{x}{y} + \arctan \frac{y}{x} = \frac{\pi}{2} \quad x < 0, y < 0$$

a vera

b falsa

*risposta : (a)*

**Esercizio 7** Sviluppare in serie di Taylor intorno a  $x = 0$  la funzione  $f(x) = e^{x^3}$

$$\text{risposta : } f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{k!}$$

**Esercizio 8** Calcolare i punti in cui si annulla il gradiente della funzione

$$f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$$

*risposta : (0, 0)*

**Esercizio 9**

Calcolare la matrice hessiana della funzione

$$f(x, y) = e^{-(x_1^2+x_2^2)}$$

Calcoliamo la matrice hessiana

$$\begin{pmatrix} -2e^{-(x_1^2+x_2^2)} + 4x_1^2e^{-(x_1^2+x_2^2)} & 4x_1x_2e^{-(x_1^2+x_2^2)} \\ 4x_1x_2e^{-(x_1^2+x_2^2)} & -2e^{-(x_1^2+x_2^2)} + 4x_2^2e^{-(x_1^2+x_2^2)} \end{pmatrix}$$

Il punto  $(0, 0)$  è di massimo relativo (e assoluto). Infatti

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

la matrice hessiana calcolata nel punto è definita negativa e la funzione è sempre minore o uguale di uno.

La matrice hessiana

$$e^{-2(x_1^2+x_2^2)} \begin{pmatrix} -2 + 4x_1^2 & 4x_1x_2 \\ 4x_1x_2 & -2 + 4x_2^2 \end{pmatrix}$$

ha determinante

$$e^{-2(x_1^2+x_2^2)} [(-2 + 4x_1^2)(-2 + 4x_2^2) - 16x_1^2x_2] = \\ e^{-2(x_1^2+x_2^2)} (4 - 8(x_1^2 + x_2^2))$$

La matrice è definita negativa se  $1 - 2(x_1^2 + x_2^2) > 0$  e  $-1 + 2x_1^2 < 0$ .

## 18.1 Minimi e Massimi Locali

**Definizione 18.1.** Sia  $A$  un aperto e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , sia  $(x_0, y_0) \in A$ . Se esiste  $r > 0$  tale che comunque preso  $(x, y) \in A \cap B_r(x_0, y_0)$  risulta  $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$  allora  $(x_0, y_0)$  è un punto di minimo locale e  $f(x_0, y_0)$  è minimo locale.

**Definizione 18.2.** Sia  $A$  un aperto e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , sia  $(x_0, y_0) \in A$ . Se esiste  $r > 0$  tale che comunque preso  $(x, y) \in A \cap B_r(x_0, y_0)$  risulta  $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$  allora  $(x_0, y_0)$  è un punto di massimo locale e  $f(x_0, y_0)$  è massimo locale.

Sia  $A$  un aperto e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , sia  $(x_0, y_0) \in A$ . Se  $f$  è derivabile e  $(x_0, y_0)$  è un punto di minimo o di massimo relativo allora  $\text{grad}f(x_0, y_0) = 0$ .

I punti in cui  $\text{grad}f(x_0, y_0) = 0$  si chiamano stazionari

## 19 7-11 La formula dello sviluppo secondo Taylor in $\mathbb{R}^2$

Assumeremo ipotesi di regolarità. Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^2$ , Siano  $(x, y), (x + h, t + k)$  punti di  $A$ : il segmento di estremi  $(x, y), (x + h, t + k)$  sia contenuto in  $A$ .  $f \in C^2(A)$

Dimostreremo la seguente formula

$$f(x + h, y + k) = f(x, y) + f_x(x, y)h + f_y(x, y)k \\ + \frac{1}{2} (f_{xx}(x, y)h^2 + 2f_{xy}(x, y)hk + f_{yy}(x, y)k^2) \\ + o(h^2 + k^2) \quad (h, k) \rightarrow (0, 0)$$

## 19.1 La formula di Taylor in $\mathbb{R}^2$ con il resto di Lagrange

**Teorema 19.1.** Sia  $f \in C^2(A)$ . Siano  $(x, y)$ ,  $(x+h, t+k)$  punti di  $A$ : il segmento di estremi  $(x, y)$ ,  $(x+h, t+k)$  sia contenuto in  $A$ . Esiste  $\theta \in (0, 1)$  tale che

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + f_x(x, y)h + f_y(x, y)k + \frac{1}{2}(f_{xx}(x+\theta h, y+\theta k)h^2 + 2f_{xy}(x+\theta h, y+\theta k)hk + f_{yy}(x+\theta h, y+\theta k)k^2)$$

*Dimostrazione.* Dalla  $(x(t), y(t)) = (x+th, y+tk)$  con  $h$  piccolo e  $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ . Poniamo

$$F(t) = f(x+th, y+tk).$$

Applicando la regola di derivazione delle funzioni composte ove  $x(t) = x+th$ ,  $y(t) = y+tk$ , si ottiene

$$F'(t) = f_x(x+th, y+tk)h + f_y(x+th, y+tk)k$$

applicandola di nuovo

$$F''(t) = f_{xx}(x+th, y+tk)h^2 + 2f_{xy}(x+th, y+tk)hk + f_{yy}(x+th, y+tk)k^2$$

dalla formula di Taylor per funzioni di una variabile reale si ottiene

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(\theta)$$

con  $\theta \in (0, 1)$ .

Sostituendo in  $F(t) = f(x+th, y+tk)$  si ottiene

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + f_x(x, y)h + f_y(x, y)k + f_{xx}(x+\theta h, y+\theta k)h^2 + 2f_{xy}(x+\theta h, y+\theta k)hk + f_{yy}(x+\theta h, y+\theta k)k^2$$

□

## 19.2 La formula di Taylor in $\mathbb{R}^2$ con il resto di Peano

Dimostreremo la seguente formula

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + f_x(x, y)h + f_y(x, y)k + \frac{1}{2}(f_{xx}(x, y)h^2 + 2f_{xy}(x, y)hk + f_{yy}(x, y)k^2) + o(h^2 + k^2) \quad (h, k) \rightarrow (0, 0)$$

*Dimostrazione.*

$$f_{xx}(x+\theta h, y+\theta k)h^2 + 2f_{xy}(x+\theta h, y+\theta k)hk + f_{yy}(x+\theta h, y+\theta k)k^2 - f_{xx}(x, y)h^2 - 2f_{xy}(x, y)hk - f_{yy}(x, y)k^2 = +o(h^2 + k^2) \quad (h, k) \rightarrow (0, 0)$$

$$(f_{xx}(x + \theta h, y + \theta k) - f_{xx}(x, y)) \frac{h^2}{h^2 + k^2}$$

$$(f_{xy}(x + \theta h, y + \theta k) - f_{xy}(x, y)) \frac{hk}{h^2 + k^2}$$

$$(f_{yy}(x + \theta h, y + \theta k) - f_{yy}(x, y)) \frac{k^2}{h^2 + k^2}$$

Per  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$  otteniamo il risultato □

La formula ci permette di dare una condizione sufficiente per la determinazione di massimi e minimi locali.

Sia  $f \in C^2(A)$ , con  $A$  aperto di  $\mathbb{R}^2$  e sia  $(x, y)$  un punto stazionario. Se la matrice *Hessiana* è definita positiva il punto è di minimo locale, se la matrice *Hessiana* è definita negativa il punto è di massimo locale. Pertanto in entrambi i casi il determinante della matrice *Hessiana* risulterà positivo e a seconda che il segno di  $f_{xx}$  nel punto risulti positivo o negativo (rispettivamente di minimo locale o di massimo locale.)

**Esercizio 1** Calcolare la matrice hessiana della funzione

$$f(x, y) = (x - y)e^{-(x^2+y^2)}$$

$$f_x(x, y) = -2x(x - y)e^{-(x^2+y^2)} + e^{-(x^2+y^2)} = (-2x^2 + 2xy + 1)e^{-(x^2+y^2)}$$

$$f_y(x, y) = -2y(x - y)e^{-(x^2+y^2)} - e^{-(x^2+y^2)} = (2y^2 - 2xy - 1)e^{-(x^2+y^2)}$$

$$f_{xx}(x, y) = ((-2x^2 + 2xy + 1)e^{-(x^2+y^2)})_x = (-2x)(-2x^2 + 2xy + 1)e^{-(x^2+y^2)} + (-4x + 2y)e^{-(x^2+y^2)} =$$

$$2(2x^3 - 2x^2y - 3x + y)e^{-(x^2+y^2)}$$

$$f_{yy}(x, y) = ((2y^2 - 2xy - 1)e^{-(x^2+y^2)})_y = (-2y)(2y^2 - 2xy - 1)e^{-(x^2+y^2)} + (4y - 2x)e^{-(x^2+y^2)} =$$

$$2(-2y^3 + 2y^2x - x + 3y)e^{-(x^2+y^2)}$$

$$f_{xx}(x, y) = ((-2x^2 + 2xy + 1)e^{-(x^2+y^2)})_x = (-2x)(-2x^2 + 2xy + 1)e^{-(x^2+y^2)} + (-4x + 2y)e^{-(x^2+y^2)} =$$

$$2(2x^3 - 2x^2y - 3x + y)e^{-(x^2+y^2)}$$

$$f_{xy}(x, y) = ((-2x^2 + 2xy + 1)e^{-(x^2+y^2)})_y = (-2y)(-2x^2 + 2xy + 1)e^{-(x^2+y^2)} + 2xe^{-(x^2+y^2)} =$$

$$2(2x^2y - 2y^2x + x - y)e^{-(x^2+y^2)}$$

calcolare i punti stazionari e classificarli.

## 20 9-11: Esempio di funzione con matrice hessiana con determinante nullo

Al variare di  $a, b$  in  $\mathbb{R}$  con  $a$  non nullo data la funzione

$$f(x, y) = (ax - y)(b - (ax - y)^2),$$

si cercano minimi e massimi locali. Si ha

$$f_x(x, y) = a(b - (2ax - y)^2) - 2a(ax - y)^2 = ab - 3a(ax - y)^2 = 0 \iff |ax - y| = \frac{b}{3}$$

$$f_y(x, y) = -b + (ax - y)^2 + 2(ax - y)(ax - y) = -b + 3(ax - y)^2 = 0 \iff |ax - y| = \frac{b}{3}$$

$$ax - y = \pm \frac{b}{3}$$

$$\boxed{\det H = 0}$$

Sia

$$f(x, y) = g(\alpha x + \beta y)$$

Si pone  $t = ax + by$  e si studia la funzione  $g(t)$

$$g(t) = bt - t^3 \quad g'(t) = b - 3t^2 = 0 \iff t = \pm \frac{b}{3}, \quad g''(t) = b - 6t \quad g''\left(\frac{b}{3}\right) = -2b \quad g''\left(-\frac{b}{3}\right) = 3b$$

. Se  $b > 0$ , si trova che  $t = \frac{b}{3}$  è un punto di massimo relativo e  $t = -\frac{b}{3}$  è un punto di minimo relativo (viceversa se  $b < 0$ ). Del resto se  $t_0 = 1$ ,  $2x_0 - y_0 = t_0$  allora

$$f(x_0, y_0) = g(t_0) = g(2x_0 - y_0) = g(1) \geq g(t) = f(x, y),$$

### 20.1 Punti di sella

Matrice indefinita. Ricordiamo Data la forma quadratica

$$ah^2 + 2bhk + ck^2,$$

essa può essere equivalentemente scritta, per  $a \neq 0$ ,

$$a\left(h + \frac{b}{a}k\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}k^2,$$

da questa formula si evince chiaramente il risultato, perché abbiamo una quantità

$$\left(h + \frac{b}{a}k\right)^2 \geq 0$$

e

$$ac - b^2$$

è il determinante di  $Q$ , assumendo  $\det Q < 0$  allora se  $a > 0$  risulterà

$$a\left(h + \frac{b}{a}k\right)^2 \geq 0$$

e

$$\frac{ac - b^2}{a}k^2 < 0,$$

mentre se  $a < 0$

$$a\left(h + \frac{b}{a}k\right)^2 \leq 0$$

$$\frac{ac - b^2}{a}k^2 > 0,$$

Se l'Hessiana è indefinita, allora  $(x_0, y_0)$  è un punto di sella;

Ricapitolando

**Teorema 20.1** (Fermat).  $(x_0, y_0)$  interno a  $A$ . Se  $(x_0, y_0)$  è un punto di estremo locale per  $f$  (minimo o massimo locale), e  $f$  ammette derivate parziali in  $(x_0, y_0)$  allora

$$Df(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)) = (0, 0).$$

Se  $f \in C^2(A)$  ossia ammette derivate parziali seconde continue in  $A$ , possiamo associare a  $f$  la sua *matrice Hessiana*

$$D^2f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix} \quad (6)$$

e il determinante della matrice Hessiana, è dato da

$$|H| = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

**Teorema 20.2** (Condizioni sufficienti del secondo ordine). Sia  $A \subset \mathbb{R}^2$  e  $f \in C^2(A)$ . Se  $(x_0, y_0) \in A$  e

$$Df(x_0, y_0) = 0$$

$$D^2f(x_0, y_0) > 0, \quad (\text{rispettivamente } D^2f(x_0, y_0) < 0)$$

allora  $(x_0, y_0)$  è un punto di minimo locale di  $f$  in  $A$ . (rispettivamente massimo locale).

Osserviamo che

$$\det H(x_0, y_0) > 0 \text{ e } f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \iff D^2f(x_0, y_0) > 0$$

$\det H(x_0, y_0) > 0$  e  $f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \iff D^2f(x_0, y_0) < 0$   $\det H(x_0, y_0) < 0$  allora  $D^2f(x_0, y_0)$  è indefinita e il punto  $(x_0, y_0)$  è di sella

### Classificare i punti stazionari delle funzioni

- $f(x, y) = x^2 + y^2$
- $f(x, y) = -x^2 - y^2$
- $f(x, y) = x^2 - y^2$
- $f(x, y) = x^3 + y^3 + xy$
- $f(x, y) = x^3 + y^3 - xy$
- 

## 10-11 Esercizi

### Esercizio 1

Data la funzione

$$f(x) = \max\{0, x\}$$

per  $x \in [-\pi, \pi)$  prolungata per periodicità in  $\mathbb{R}$ , determinare le serie di Fourier.

### Risoluzione

Si vede immediatamente che  $f(x) = x$  per  $x \in [0, \pi)$  ed  $f(x) = 0$  se  $x \in [-\pi, 0)$ . Dunque si ha:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \, dx = \frac{\pi^2}{2\pi} = \frac{\pi}{2}$$

analogamente

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \cos(kx) \, dx = \frac{1}{\pi} \left[ x \frac{\sin(kx)}{k} \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin(kx)}{k} \, dx \right] = \\ &= \frac{1}{\pi k^2} \cos(kx) \Big|_0^\pi = \frac{1}{\pi k^2} [(-1)^k - 1] \end{aligned}$$

avendo operato un'integrazione per parti. Analogamente

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \sin(kx) \, dx = \frac{1}{\pi} \left[ -x \frac{\cos(kx)}{k} \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos(kx)}{k} \, dx \right] = \frac{1}{\pi} \left[ -\pi \frac{(-1)^k}{k} \right] = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

poiché  $\cos(k\pi) = (-1)^k$ . Dunque possiamo scrivere la serie di Fourier  $S_f$  associata alla funzione

$$S_f(x) = \frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos((2k-1)x) + \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx).$$

### Esercizio 2

Classificare i punti stazionari della funzione

$$f(x, y) = x^2 e^x + y^2 e^y$$

## Risoluzione

$$f_x(x, y) = (2x + x^2)e^x = 0 \quad , \quad f_y(x, y) = (2y + y^2)e^y$$

che sono verificate se e solo se:

$$(2 + x)x = 0 \quad , \quad (2 + y)y = 0$$

otteniamo i seguenti punti  $(0, 0)$ ,  $(-2, 0)$ ,  $(0, -2)$  e  $(-2, -2)$ .

Per determinare il carattere di tali punti critici calcoliamo le derivate successive:

$$f_{xx} = (2 + 4x + x^2)e^x \quad , \quad f_{yy} = (2 + 4y + y^2)e^y$$

ed ovviamente  $f_{xy} = 0$ . Dunque calcoliamo il determinante dell'Hessiana  $H(x, y)$  in tali punti:

$$\det H(0, 0) = f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - f_{xy}(0, 0)^2 = 4$$

essendo  $f_{xx}(0, 0) = 2 > 0$  si ha che  $(0, 0)$  è un minimo relativo per  $f$ .

Si procede nello stesso modo per gli altri punti, e si ha:

$$\det H(-2, 0) = -4e^{-2} < 0$$

ed

$$\det H(0, -2) = -4e^{-2} < 0$$

da cui ricaviamo che  $(0, -2)$  e  $(-2, 0)$  sono di sella per  $f$ . Per l'ultimo punto critico individuato si ha:

$$\det H(-2, -2) = 4e^{-4} > 0$$

e poiché  $f_{xx}(-2, -2) = -2e^{-2} < 0$  si ha un massimo relativo per  $f$ .

## Esercizio 3

Utilizzando la definizione di limite verificare

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2y^3 + 5x^2 + 5y^2}{x^2 + y^2} = 5$$

## Risoluzione

Bisogna verificare che per ogni  $\epsilon > 0$  esiste un  $\delta$  che dipende da  $\epsilon$  tale che per ogni  $(x, y)$  appartenenti a  $B_\delta = \{(x, y) : x^2 + y^2 < \delta^2\} \setminus \{0, 0\}$  si ha

$$\left| \frac{2y^3 + 5x^2 + 5y^2}{x^2 + y^2} - 5 \right| < \epsilon$$

ovvero

$$\left| \frac{2y^3 + 5x^2 + 5y^2}{x^2 + y^2} - 5 \right| \leq \frac{|2y^3|}{x^2 + y^2} \leq \frac{2|y|(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 2|y|$$

$$2|y| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2} < 2\delta$$

Scegliamo

$$\delta = \frac{\epsilon}{2}$$

**Esercizio** Sviluppare in serie di Taylor intorno a  $x = 0$  la funzione

$$f(x) = \cosh(x^4).$$

**Esercizio** Sviluppare in serie di Taylor intorno a  $x = 0$  la funzione

$$f(x) = e^{x^3}.$$

**Esercizio** Sviluppare in serie di Taylor intorno a  $x = 3$  la funzione

$$f(x) = 1 - \cos((x - 3)^2).$$

**Esercizio** Sviluppare in serie di Taylor intorno a  $x = 0$  la funzione

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}.$$

**Esercizio** Integrare per serie la funzione

$$f(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt.$$

## 21 14-11 Curve e semplici problemi vincolati $n = 2$

Ricordiamo alcune definizioni di base sulle curve. Una curva è un'applicazione continua da un intervallo  $I$  in  $\mathbb{R}^2$ .

Esempio di curva: segmento di estremi  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$ .

$$\begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) & t \in [0, 1] \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \end{cases}$$

Esempio di curva: la circonferenza di centro  $(x_0, y_0)$  e raggio  $r$ .

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos t & t \in [0, 2\pi] \\ y = y_0 + r \sin t \end{cases}$$

Distinguere la curva dal sostegno della curva: ecco due curve distinte con lo stesso sostegno

$$\begin{cases} x = \cos t & t \in [0, 2\pi] \\ y = \sin t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \cos t & t \in [0, 6\pi] \\ y = \sin t \end{cases}$$

Il sostegno della curva  $\phi$  dunque è l'immagine dell'intervallo  $I$  tramite la curva  $\phi$ :  $\phi(I)$ .

$$I = [a, b]$$

Definizione di curva semplice: una curva si dice semplice se per  $t_1 \neq t_2$  e almeno un punto è interno allora  $\phi(t_1) \neq \phi(t_2)$

Definizione di curva chiusa: una curva si dice chiusa se  $\phi(a) = \phi(b)$

Definizione di curva regolare: Sia  $\phi \in C^1$ . La curva si dice regolare se

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 > 0 \quad \forall t \in (a, b)$$

### 21.1 Minimo e Massimo assoluti.

Ci occupiamo di calcolare il massimo e il minimo di funzioni in presenza di un vincolo. Massimizzare la funzione  $f(x, y) = 4xy$  soggetta al vincolo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Equazione del vincolo  $V$ :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Sia  $g$  una funzione regolare (esempio:  $g(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$ ).

Equazione del vincolo  $V$  tramite la funzione  $g$

$$V = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$$

Assumiamo che  $V$  sia il sostegno di una curva regolare semplice di equazioni parametriche

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in I$$

$$\phi(t) = f(x(t), y(t))$$

**Esercizio 21.1.** Massimizzare la funzione  $f(x, y) = 4xy$  soggetta al vincolo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Si tratta di calcolare il massimo di una funzione continua in un insieme compatto pertanto l'esistenza del massimo assoluto è assicurata dal teorema di Weierstrass.

Il problema si può rileggere *Tra tutti i rettangoli inscritti nell'ellisse di equazione  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  trovare quello di area massima.*

La funzione  $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ .

Possiamo calcolare con un metodo di sostituzione ( $2x, 2y$  semi-lato)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \iff y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \iff y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Segue

$$f(x) = 4xy = \frac{4b}{a}x\sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$f'(x) = \frac{4b}{a}\left(\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right) = 0.$$

limitandoci a  $x$  e  $y$  positivi si ricava  $x = a/\sqrt{2}$ ,  $y = b/\sqrt{2}$   $f(a/\sqrt{2}, b/\sqrt{2}) = 2ab$

Alternativamente, limitandoci a  $x$  e  $y$  positivi, esprimendo la curva in forma parametrica

$$\begin{cases} x(t) = a \cos(t) & t \in [0, \pi/2] \\ y(t) = b \sin(t) \end{cases}$$

$$\phi(t) = 4ab \cos(t) \sin(t) = 2ab \sin(2t) \quad t \in [0, \pi/2]$$

$$\phi'(t) = 0 \iff 2 \cos(2t) = 0 \quad t \in [0, \pi/2].$$

Si ha un punto interno  $t = \pi/4$  in cui  $\phi(\pi/4) = 2ab$  mentre  $\phi(0) = \phi(\pi/2) = 0$

## 21.2 Considerazioni generali

Supponiamo che  $t_0 = (x_0, y_0)$  sia un punto di massimo o minimo relativo per la funzione  $\phi(t) = f(x(t), y(t))$ .

In  $t_0 = (x_0, y_0)$  risulta

$$\phi(t_0) = f(x(t_0), y(t_0)).$$

Calcoliamo la derivata di  $\phi$  applicando il teorema di derivazione delle funzioni composte.

$$\phi'(t_0) = f_x(x(t_0), y(t_0))x'(t_0) + f_y(x(t_0), y(t_0))y'(t_0) = 0$$

In corrispondenza di un massimo o di un minimo relativo per  $f$  il gradiente di  $f$  deve essere ortogonale alla curva  $\gamma = (x(t), y(t))$  (ricordiamo  $V = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$  e  $V$  sostegno di una curva regolare semplice  $\gamma$ )

Si può dimostrare il seguente

**Teorema 21.2.** *Siano  $f$  e  $g$  funzioni  $C^1$  e sia  $(x_0, y_0)$  un punto regolare per  $V$ . Allora  $(x_0, y_0)$  è un punto stazionario vincolato a  $V$  se e sole se  $\exists$  un numero reale  $\lambda_0$  tale che*

$$Df(x_0, y_0) + \lambda_0 Dg(x_0, y_0) = 0$$

Definiamo

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y).$$

La funzione  $L$  si chiama funzione Lagrangiana. Dipende anche dalla variabile  $\lambda$ , che prende il nome di moltiplicatore di Lagrange. Risolveremo il sistema

$$\begin{cases} L_x(x, y, \lambda) = 0 \\ L_y(x, y, \lambda) = 0 \\ L_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{cases}$$

L'ultima equazione è l'equazione del vincolo e il sistema diventa

$$\begin{cases} L_x(x, y, \lambda) = f_x(x, y) + \lambda g_x(x, y) = 0 \\ L_y(x, y, \lambda) = f_y(x, y) + \lambda g_y(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

### 21.2.1 Applicazione del metodo dei moltiplicatori di Lagrange

$$\begin{cases} \max_{x,y} 4xy \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x > 0, y > 0 \end{cases}$$

$$L(x, y, \lambda) = \max_{x,y} 4xy + \lambda \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$$

Si calcolano i punti stazionari della funzione  $L$

$$\begin{cases} 4y + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0 \\ 4x + \frac{2\lambda y}{b^2} = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

Si ricava dalla prima equazione

$$\lambda = -\frac{2a^2 y}{x}$$

Sostituendo e semplificando

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x^2 = \frac{a^2}{2}, \end{cases}$$

la cui soluzione positiva è

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Dunque

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad y = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

## 22 16-11

Sia  $\Omega$  un aperto limitato. Ricordiamo

- La condizione al primo ordine non distingue massimi, minimi o punti di sella
- Nel caso di funzioni  $C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  possiamo calcolare i massimi e minimi assoluti della funzione  $f$  confrontando i valori della funzione tra punti interni in cui si annulla il gradiente e il massimo e il minimo valore della funzione sulla frontiera.

Minimi e massimi della funzione

$$f(x, y) = e^{x^2 - y^2 - xy},$$

nel quadrato  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -a \leq x \leq a, -a \leq y \leq a\}$ , con  $a > 0$ .

Minimi e massimi della funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3,$$

nel cerchio di centro l'origine e raggio 2.

Esempio di curva: segmento di estremi  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$ .

$$\begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) & t \in [0, 1] \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \end{cases}$$

In questo caso (segmento di estremi  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$ ) la lunghezza della curva è data da

$$L = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

Data la curva  $\phi$

$$\begin{cases} x = x(t) & t \in [a, b] \\ y = y(t) \end{cases}$$

In generale possiamo suddividere l'intervallo  $[a, b]$  dove varia il parametro  $t$

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b.$$

Se indichiamo con  $S$  la suddivisione

$$L(\phi, S) = \sum_{k=1}^k \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2}$$

Poniamo

$$L(\phi) = \sup_{S \in \mathcal{S}} L(S)$$

Se  $\phi \in C^1$

$$L(\phi) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

Lunghezza della curva data dal grafico di funzione.

1. Arco di parabola

$$y = \frac{1}{2}x^2 \quad x \in [0, a]$$

$$L(\phi) = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

In questo caso

$$L(\phi) = \int_0^a \sqrt{1 + x^2} dx$$

Occorre ricordare

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2}(\operatorname{sett} \sinh x + x\sqrt{1+x^2}) + c$$

$$\operatorname{sett} \sinh x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Si pone  $x = \sinh t$ . Si ottiene

$$\int \cosh^2 t dt = \frac{1}{2}(\sinh t \cosh t + t) + c$$

Si procede alla sostituzione  $t = \operatorname{sett} \sinh x$

$$\int_0^a \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2}(a\sqrt{1+a^2} + \operatorname{sett} \sinh a)$$

2. Circonferenza di centro l'origine e raggio  $r$

$$\begin{cases} x = r \cos(t) & t \in [0, 2\pi] \\ y = r \sin(t) \end{cases}$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = 2\pi r$$

## 23 17/11

**Esercizio 1.** La serie

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n!}$$

per  $x = 1$  risulta

a convergente a  $e^3$

b divergente a  $+\infty$

c convergente a  $\frac{3}{e}$

d nessuna delle precedenti

**Esercizio 2.**

La serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k+1} x^k$$

diverge per ogni  $x$  reale tale che  $x > \frac{1}{64}$

a Vero

b Falso

**Esercizio 3.** Siano  $x, y \in \mathbb{R}$ , e  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f$  pari e  $g$  dispari, entrambe continue. Sia  $a > 0$  allora

$$\int_{-a}^a \int_{-a}^a f(x)g(y) dx dy = 0$$

a Vero

b Falso

**Esercizio 4.** Due curve sono uguali se hanno lo stesso sostegno

- a Vero  b Falso

**Esercizio 5.** Data  $f(x, y) = ax + by$  con  $a, b$  reali non nulli, in un insieme chiuso e limitato  $K$ , il minimo e il massimo della funzione su  $K$  è assunto sul bordo dell'insieme

- a Vero  b Falso

**Esercizio 6.** Data la curva

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{2} \cos t & t \in [0, \pi/4] \\ y(t) = \sqrt{2} \sin t \end{cases}$$

allora vale

$$\int_0^{\pi/4} (x'(t))^2 + (y'(t))^2 dt = \pi/2$$

- a Vero  b Falso

**Esercizio 7.** Vale

$$\cosh(x^4) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{4k}}{(2k)!}$$

- a Vero  b Falso

**Esercizio 8.**

Data  $f(x, y) = x^2 + y^2 + ax + by$  con  $a, b$  reali, il minimo della funzione su  $\mathbb{R}^2$  esiste per ogni valore di  $a, b$ .

- a Vero  b Falso

**Esercizio 9.**

Data  $f(x, y) = ax^2 + by^2 + x + y$  con  $a, b$  reali non nulli, il minimo della funzione su  $\mathbb{R}^2$  esiste per ogni valore di  $a, b$  non nulli.

- a Vero  b Falso

**Esercizio 10.** Classificare gli eventuali punti stazionari della funzione definita in  $\mathbb{R}^2$  da

$$f(x, y) = \cos x + \sin y$$

**Soluzione:**

I punti stazionari della funzione sono dati dal sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\sin x = 0 \\ \cos y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{\pi}{2} + j\pi & j \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Si hanno dunque infiniti punti stazionari, ciascuno di coordinate  $(k\pi, \frac{\pi}{2} + j\pi)$ , al variare di  $k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}$ . La matrice hessiana in un generico punto  $(x, y)$  è

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} -\cos x & 0 \\ 0 & -\sin y \end{pmatrix}.$$

Calcolandola in un generico punto stazionario diventa

$$H(k\pi, \frac{\pi}{2} + j\pi) = \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} & 0 \\ 0 & (-1)^{j+1} \end{pmatrix}$$

Il determinante della matrice Hessiana in un generico punto stazionario risulta  $(-1)^{j+k}$ . Dunque, se  $k$  e  $j$  sono entrambi pari o entrambi dispari, il determinante risulta pari a 1 e dunque positivo; si tratterà di punti di max o min relativo a seconda del segni di  $(-1)^{k+1}$ : se  $k$  è pari si tratta di un punto di max relativo, se  $k$  è dispari si tratta di un minimo relativo. Ripetendo se  $k$  e  $j$  sono entrambi pari si tratta di un massimo relativo. Se invece  $k$  e  $j$  sono entrambi dispari si tratta di un minimo relativo. Infine se  $k$  è pari e  $j$  è dispari (o viceversa), abbiamo un punto di sella poiché il valore del determinante è  $-1$ .

**Esercizio**

$$\begin{cases} x = e^t \cos(t) \\ y = e^t \sin(t) \end{cases} \quad t \in [0, \frac{\pi}{4}]$$

Calcolare la lunghezza ( $L = \sqrt{2}(e^{\frac{\pi}{4}} - 1)$ )

## 24 21/11 Curve

### 24.1 Cardiode

Il suo nome esprime la sua forma di un cuore.

$$\rho = a(1 + \cos(\theta)) \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad a > 0$$

$$L = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} d\theta$$

$$L = 4a \int_0^\pi |\cos t| dt = 8a \int_0^{\pi/2} \cos t dt = 8a$$

## 24.2 Spirale Logaritmica

$$\rho = e^{-b\theta}, \quad \theta \in [0, 2k\pi] \quad k \in \mathbb{N}, \quad b > 0$$

$$L = \int_0^{2k\pi} \sqrt{e^{-2b\theta} + b^2 e^{-2b\theta}} d\theta = \frac{\sqrt{1+b^2}}{b} (1 - e^{-2\pi kb})$$

per  $k \rightarrow +\infty$  otteniamo

$$\frac{\sqrt{1+b^2}}{b}$$

(lunghezza dell'intera spirale)

## 24.3 Spirale di Archimede

$$\rho = a + b\theta \quad \theta \in [0, 2k\pi], \quad k \in \mathbb{N}, \quad a > 0, \quad b > 0$$

$$L = \int_0^{2k\pi} \sqrt{b^2 + b^2\theta^2} d\theta = b \int_0^{2k\pi} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta =$$

$$b \int_0^{2k\pi/b} \sqrt{1 + t^2} dt = \frac{b}{2} \left( \ln(2k\pi + \sqrt{1 + 4k^2\pi^2}) + 2k\pi \sqrt{1 + 4k^2\pi^2} \right)$$

## 24.4 Asteroide

La figura richiama l'immagine di una stella che brilla.

$$\begin{cases} x = \cos^3(t) & t \in [0, 2\pi] \\ y = \sin^3(t) \end{cases}$$

Calcolare la lunghezza ( $L = 6$ )

### 24.4.1 Asteroide

Asteroide.  $a > 0$

$$\begin{cases} x = a \cos^3(t) & t \in [0, 2\pi] \\ y = a \sin^3(t) \end{cases}$$

Calcolare la lunghezza ( $L = 6a$ )

## 24.5 Arco di Ellisse (I quadrante)

$a_1 > 0, a_2 > 0$

$$\begin{cases} x = a_1 \cos(\theta) & \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ y = a_2 \sin(\theta) \end{cases}$$

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2} d\theta = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a_1^2 \sin^2 \theta + a_2^2 \cos^2 \theta} d\theta =$$

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{a_2^2 - (a_2^2 - a_1^2) \sin^2 \theta} d\theta = a_2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{a_2^2 - a_1^2}{a_2^2} \sin^2 \theta} d\theta$$

Poniamo  $k^2 = \frac{a_2^2 - a_1^2}{a_2^2}$ . Osserviamo che grazie alla sostituzione  $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$  si ottiene un integrale ellittico che andremo a risolvere per serie.

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

Ricordiamo se  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $|x| < 1$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

ove

$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} 1 & k=0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!} & k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Si avrà

$$\begin{aligned} (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}} &= \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \binom{\frac{1}{2}}{j} k^{2j} \sin^{2j} \theta = \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^j \binom{\frac{1}{2}}{j} k^{2j} \sin^{2j} \theta = \end{aligned}$$

Osserviamo

$$\begin{aligned} \binom{\frac{1}{2}}{j} &= (-1)^{j-1} \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \dots \frac{2j-3}{2}}{j!} = (-1)^{j-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2j-3)}{2^j j!} = (-1)^{j-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2j-3)}{2j 2(j-1) 2(j-2) \dots 2} \\ &= (-1)^{j-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2j-3)}{(2j)!!} = (-1)^{j-1} \frac{(2j-3)!!}{(2j)!!} \end{aligned}$$

ove  $n!!$  indica

se  $n$  è dispari il prodotto di tutti i dispari tra 1 e  $n$ ,

se  $n$  è pari il prodotto di tutti i pari tra 2 e  $n$ .

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta = \left( \frac{\pi}{2} - \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(2j-3)!!}{(2j)!!} k^{2j} \int_0^{\pi/2} \sin^{2j} \theta d\theta \right)$$

Dimostriamo

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2j} \theta d\theta = \frac{\pi}{2} \frac{(2j-1)!!}{(2j)!!}$$

Per  $j=1$  è verificata (scrivere in dettaglio).

Assumendo

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2j} \theta d\theta = \frac{\pi}{2} \frac{(2j-1)!!}{(2j)!!}$$

dimostriamo

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2(j+1)} \theta d\theta = \frac{\pi}{2} \frac{(2j+1)!!}{(2j+2)!!}$$

Infatti

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi/2} \sin^{2j+1} \theta \sin \theta d\theta &= \int_0^{\pi/2} \sin^{2j+1} \theta (-\cos \theta)' d\theta \\
 &= \sin^{2j+1} \theta (-\cos \theta) \Big|_0^{\pi/2} + (2j+1) \int_0^{\pi/2} \sin^{2j} \theta \cos^2 \theta d\theta \\
 &= (2j+1) \int_0^{\pi/2} \sin^{2j} \theta (1 - \sin^2 \theta) d\theta = (2j+1) \int_0^{\pi/2} \sin^{2j} \theta d\theta - (2j+1) \int_0^{\pi/2} \sin^{2j+2} \theta d\theta \\
 &\quad (2j+2) \int_0^{\pi/2} \sin^{2j+2} \theta d\theta = (2j+1) \int_0^{\pi/2} \sin^{2j} \theta d\theta
 \end{aligned}$$

Utilizzando l'ipotesi induttiva

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2j+2} \theta d\theta = \frac{(2j+1) \pi (2j-1)!!}{(2j+2) 2 (2j)!!} = \frac{\pi (2j+1)!!}{2 (2j+2)!!}$$

In conclusione

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta = \frac{\pi}{2} \left[ 1 - \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2j-1} \left( \frac{(2j-1)!!}{(2j)!!} k^j \right)^2 \right]$$

## 25 24-11 Curve equivalenti. Orientamento. Forme differenziali

Esempio circonferenza

$$\begin{cases} x = \cos(t) & t \in [0, 2\pi] \\ y = \sin(t) \end{cases}$$

Esempio circonferenza

$$\begin{cases} x = \cos(2t) & t \in [0, \pi] \\ y = \sin(2t) \end{cases}$$

Curve equivalenti. Due curve  $\phi_1$  e  $\phi_2$  si dicono equivalenti se esiste un'applicazione  $g : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$  di classe  $C^1$  tale che  $g'(t) \neq 0 \forall t \in [a, b]$  e

$$\phi_1(t) = \phi_2(g(t)).$$

Esempio di prima  $g : [0, 2\pi] \rightarrow [0, \pi] \quad t \rightarrow g(t) = \frac{t}{2}$  Due curve equivalenti non inducono necessariamente lo stesso orientamento Poniamo  $\tau = -t$

$$\begin{cases} x = \cos(\tau) & \tau \in [-2\pi, 0] \\ y = -\sin(\tau) \end{cases}$$

Si tratta della stessa curva percorsa in senso inverso ( $-C$ ). La curva

$$\begin{cases} x = \sin(t) & t \in [0, 2\pi] \\ y = \cos(t) \end{cases}$$

ha lo stesso verso di percorrenza di  $-C$ .

\*La lunghezza di una curva non dipende dalla parametrizzazione e non dipende dall'orientamento\*.

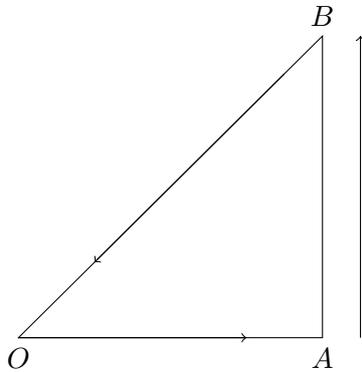
$$L(\phi) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$  curve precedentemente definite.

$$L(\phi_1) = L(\phi_2) = L(\phi_3) = L(\phi_4) = 2\pi$$

\*Dimostrazione generale\*.

### 25.1 Esercizio



Curve regolare a tratti.

Scrivere l'equazione parametrica della curva regolare a tratti rappresentata dal triangolo percorso in senso antiorario.  $A \rightarrow B$

$$\begin{cases} x(t) = 1 & t \in [0, 1] \\ y(t) = t \end{cases}$$

$B \rightarrow O$

$$\begin{cases} x(t) = 1 - t & t \in [0, 1] \\ y(t) = 1 - t \end{cases}$$

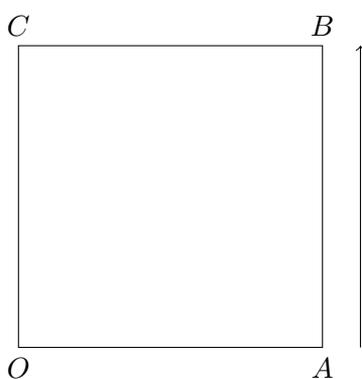
$O \rightarrow A$

$$\begin{cases} x(t) = t & t \in [0, 1] \\ y(t) = 0 \end{cases}$$

La cura può essere descritta

$$\gamma = \begin{cases} \begin{cases} x(t) = 1 & t \in [0, 1] \\ y(t) = t \end{cases} \\ \begin{cases} x(t) = 2 - t & t \in [1, 2] \\ y(t) = 2 - t \end{cases} \\ \begin{cases} x(t) = t - 2 & t \in [2, 3] \\ y(t) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

## 25.2 Esercizio



Curve regolare a tratti.

Scrivere l'equazione parametrica della curva regolare a tratti rappresentata dal triangolo percorso in senso antiorario.  $A \rightarrow B$

$$\begin{cases} x(t) = 1 & t \in [0, 1] \\ y(t) = t \end{cases}$$

$B \rightarrow C$

$$\begin{cases} x(t) = 1 - t & t \in [0, 1] \\ y(t) = 1 \end{cases}$$

$C \rightarrow O$

$$\begin{cases} x(t) = 0 & t \in [0, 1] \\ y(t) = 1 - t \end{cases}$$

$O \rightarrow A$

$$\begin{cases} x(t) = t & t \in [0, 1] \\ y(t) = 0 \end{cases}$$

La curva può essere descritta

$$\gamma = \begin{cases} \begin{cases} x(t) = 1 & t \in [0, 1] \\ y(t) = t \end{cases} \\ \begin{cases} x(t) = 2 - t & t \in [1, 2] \\ y(t) = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x(t) = 0 & t \in [2, 3] \\ y(t) = 3 - t \end{cases} \\ \begin{cases} x(t) = t - 3 & t \in [3, 4] \\ y(t) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Si dice che il punto  $P_1 = \phi(t_1)$  precede il punto  $P_2 = \phi(t_2)$  nel verso indotto dal parametro  $t$  se  $t_1 < t_2$ .

Ascissa curvilinea o lunghezza d'arco di una curva regolare.

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \quad \forall t \in [a, b]$$

funzione crescente, derivabile, con derivata positiva.

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Scriviamo la curva

$$\begin{cases} x = r \cos(t) & t \in [0, 2\pi] \\ y = r \sin(t) \end{cases}$$

tramite l'ascissa curvilinea  $t_0 = 0$

$$s(t) = \int_0^t r d\tau = rt$$

quindi  $t = \frac{s}{r}$  con  $s \in [0, 2\pi r]$ .

$$\begin{cases} x = r \cos(\frac{s}{r}) & s \in [0, 2\pi r] \\ y = r \sin(\frac{s}{r}) \end{cases}$$

Integrale curvilineo di una funzione\*vedere libro\*.

$$\int_{\gamma} f ds$$

Sia  $\gamma$  una curva regolare e sia  $\phi$  la sua rappresentazione parametrica. Sia  $f$  una funzione reale di due variabili reali definita e continua sul sostegno  $\phi([a, b])$

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

### 25.3 Esempio

$$\begin{cases} x = t & t \in [1, e] \\ y = t \ln t \end{cases}$$

$$\int_1^e \sqrt{1 + (\ln t + 1)^2} dt > 0$$

$$f(x, y) = \frac{1}{x}$$

Calcoliamo

$$\int_1^e \frac{1}{t} \sqrt{1 + (\ln t + 1)^2} dt =$$

$$\tau = \ln t + 1, \quad d\tau = \frac{1}{t} dt,$$

$$\int_1^e \frac{1}{t} \sqrt{1 + (\ln t + 1)^2} dt = \int_1^2 \sqrt{1 + (\tau)^2} d\tau =$$

Ricordiamo

$$\int \sqrt{1 + \tau^2} d\tau = \frac{1}{2} (\text{sett} \sinh \tau + \tau \sqrt{1 + \tau^2}) + c$$

$$\text{sett} \sinh = \ln(\tau + \sqrt{1 + \tau^2}).$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \sqrt{1 + (\tau)^2} d\tau &= \frac{1}{2} (\ln(\tau + \sqrt{1 + \tau^2}) + \tau \sqrt{1 + \tau^2}) \Big|_1^2 = \\ &= \frac{1}{2} (\ln(2 + \sqrt{5}) + 2\sqrt{5} - \ln(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

Calcolo del baricentro per curve semplici, regolari a tratti.

$$x_0 = \frac{1}{L} \int_{\gamma} x ds, \quad y_0 = \frac{1}{L} \int_{\gamma} y ds$$

Asteroide

$$\begin{cases} x = \cos^3(t) & t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ y = \sin^3(t) \end{cases}$$

$L = \frac{3}{2}$ . Calcolare il baricentro.

$$x_0 = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos^4 t \sin t dt = \frac{2}{5}$$

$$y_0 = \frac{2}{5}$$

Integrale curvilineo

$$\begin{cases} x = a \cos(t) & t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ y = b \sin(t) \end{cases}$$

$$f(x, y) = xy$$

$$I = ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 \theta} d\theta = ab \int_0^1 z \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)z^2} dz$$

$$= ab \left[ \frac{1}{3(a^2 - b^2)} (b^2 + (a^2 - b^2)z^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = ab(a^2 + ab + b^2) \frac{1}{3(a + b)}$$

( $z = \sin \theta$ )

## 25.4 Forme differenziali

Forme differenziali lineari: 1-forme.  $A$  aperto di  $\mathbb{R}^N$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$

$$\omega = \sum_{i=1}^N a_i(x) dx_i$$

$$N = 3 \quad x, y, z \in \mathbb{R}, \quad \omega = a(x, y, z)dx + b(x, y, z)dy + c(x, y, z)dz$$

$$N = 2 \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad \omega = a(x, y)dx + b(x, y)dy$$

.

La forma  $\omega$  si dice esatta in  $A$  se esiste una funzione differenziabile in  $A$   $f : A \rightarrow \mathbb{R}^N$  tale che

$$N = 2, \quad f_x = a \quad f_y = b$$

$$N = 3 \quad f_x = a \quad f_y = b \quad f_z = c$$

$$N \quad f_{x_i} = a_i$$

$$a(x, y, z)dx + b(x, y, z)dy + c(x, y, z)dz$$

\*Esercizi\* Calcolo di primitive.

Assumiamo che  $a, b, c$  siano  $C^1(A)$ . Se la forma è esatta allora è possibile trovare una funzione  $f$  per cui

$$f_x = a \quad f_y = b$$

Deve risultare

$$f_{xy} = a_y \quad f_{yx} = b_x,$$

Se

$$a_y = b_x$$

la forma si dice chiusa.

$$f_x = a \quad f_y = b \quad f_z = c$$

$$a_y = b_x \quad a_z = c_x \quad b_z = c_y$$

Se la 1 forma è esatta allora è anche chiusa, non essendo vero il viceversa.

## 26 28/11/2017 Integrale curvilineo di funzione. Integrale curvilineo di una forma differenziale

### 26.1 Integrale curvilineo di una forma differenziale

Sia  $A$  un aperto del piano. Sia  $\gamma$  una curva del piano interamente contenuta in  $A$  regolare a tratti di equazioni parametriche  $(x(t), y(t))$  con  $t \in [a, b]$  il cui verso di percorrenza coincida con l'orientamento fissato. Sia  $\omega$  una forma differenziale con coefficienti continui in  $A$ . Allora

$$\int_{\gamma} a(x, y)dx + b(x, y)dy = \int_a^b (a(x(t), y(t))x'(t) + b(x(t), y(t))y'(t)) dt$$

\*Esempi\*

**Teorema 26.1.** *Sia  $A$  un aperto del piano e  $P_0 = (x_0, y_0)$  a  $P_1 = (x_1, y_1)$ . Sia  $\gamma$  una curva del piano interamente contenuta in  $A$  regolare a tratti congiungente due punti di  $A$  nel verso da  $P_0$  a  $P_1$ . Se  $\omega$  è una forma differenziale esatta e continua in  $A$  allora*

$$\int_{\gamma} a(x, y)dx + b(x, y)dy = f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0),$$

ove  $f$  è una qualsiasi primitiva della forma.

In particolare se la curva è regolare a tratti e chiusa, interamente contenuta in  $A$  allora

$$\int_{\gamma} a(x, y)dx + b(x, y)dy = 0$$

\*Esempi\*

**Teorema 26.2.** *Sia  $A$  un aperto del piano e  $P_0 = (x_0, y_0)$  a  $P_1 = (x_1, y_1)$ . Sia  $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$  curve del piano interamente contenute in  $A$  regolari a tratti con  $\gamma$  chiusa. Allora le tre proprietà sono equivalenti*

1.  $a(x, y)dx + b(x, y)dy$  è esatta
2.  $\int_{\gamma} a(x, y)dx + b(x, y)dy = 0$
3. se  $\gamma_1, \gamma_2$  hanno gli stessi estremi e lo stesso verso di percorrenza

$$\int_{\gamma_1} a(x, y)dx + b(x, y)dy = \int_{\gamma_2} a(x, y)dx + b(x, y)dy$$

**Esempio 26.3.**

$$A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

La seguente forma differenziale

$$\frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

è chiusa, ma non è esatta. Infatti se  $\gamma$  è la circonferenza unitaria di centro l'origine

$$\int_{\gamma} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = 2\pi$$

## 26.2 Curve e Forme in $\mathbb{R}^3$

### 27 1-12 Esercizi. Domini normali

**ESERCIZIO** Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale

$$y^2 e^{xy} dx + (e^{xy} + xye^{xy}) dy$$

lungo il segmento di estremi  $P_0 = (0, 0)$  e  $P_1 = (1, 1)$ , orientato da  $P_0$  a  $P_1$ .

**ESERCIZIO** Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{\gamma} (x + y)^2 ds$$

dove  $\gamma$  è il segmento di estremi  $P_0 = (1, 1)$  e  $P_1 = (3, 2)$ .

**Soluzione:**

Il segmento in questione si può parametrizzare come

$$\begin{cases} x(t) = 1 + 2t & t \in [0, 1] \\ y(t) = 1 + t \end{cases}$$

Dunque, per definizione di integrale curvilineo, si ha

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (x + y)^2 ds &= \int_0^1 (x(t) + y(t))^2 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \\ &= \int_0^1 (1 + 2t + 1 + t)^2 \sqrt{5} dt \\ &= 13\sqrt{5}. \end{aligned}$$

**ESERCIZIO** La seguente curva è chiusa? E' regolare?

$$\begin{cases} x(t) = te^{-t} & t \in [0, 4] \\ y(t) = \frac{1}{2}t^2 - t \end{cases}$$

**Soluzione:**

Per  $t = 0$ , otteniamo il punto  $(0, 0)$ , mentre per  $t = 4$  otteniamo  $(4e^{-4}, 4)$ . Poiché le posizioni iniziale e finale non coincidono, la curva non è chiusa.

La curva data è di classe  $C_1$  e il vettore tangente è

$$\begin{cases} x'(t) = e^{-t}(1 - t) \\ y'(t) = t - 1 \end{cases}$$

Tuttavia, poichè al tempo  $t = 1$  (che è interno all'intervallo  $[0, 4]$ ), si ha  $(x'(1), y'(1)) = (0, 0)$ , deduciamo che la curva non è regolare in  $[0, 4]$

## 27.1 Domini normali

## 28 5-11 Integrale doppio su domini normali. Baricentro. Il primo teorema di Guildino

D normale rispetto all'asse  $x$ ,  $\alpha \leq \beta$  funzioni continue

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

E normale rispetto all'asse  $y$   $\gamma \leq \delta$  funzioni continue

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\}.$$

$f$  continua in  $D$

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy$$

$f$  continua in  $E$

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y) dx$$

Per domini normali rispetto ad entrambi gli assi vale

$$\int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y) dx$$

Per un triangolo

$$D = \{(x, y) \in [a, b] \times [a, b] : y \leq x\}$$

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx$$

Formula di inversione di Dirichlet.

### 28.1 Calcolo del baricentro

Se  $D$  è un dominio normale del piano il baricentro è il punto di coordinate

$$x_b = \frac{1}{m(D)} \int \int_D x dx dy$$

$$y_b = \frac{1}{m(D)} \int \int_D y dx dy$$

$$C = (0, r), A = (h, 0)$$

$$x_b = \frac{1}{rh} \int_0^r \int_0^h x dx dy = \frac{1}{2rh} h^2 r = \frac{h}{2}$$

$$y_b = \frac{1}{rh} \int_0^r \int_0^h y dx dy = \frac{r}{2}$$



Baricentro del rettangolo:  $(h/2, r/2)$

a) cilindro.

Il cilindro è il solido ottenuto dalla rotazione di un rettangolo attorno a uno dei suoi lati.

Rotazione intorno a  $OA$

$$V = \pi r^2 h$$

Baricentro del triangolo

Se  $D$  è un dominio normale del piano il baricentro è il punto di coordinate

$$x_b = \frac{1}{m(D)} \int \int_D x dx dy$$

$$y_b = \frac{1}{m(D)} \int \int_D y dx dy$$

$$OA = h, OB = r$$

$$m(D) = rh/2$$

retta passante per A B  $B = (0, r)$   $A = (h, 0)$

$$r = q; 0 = hm + r; m = -\frac{r}{h};$$

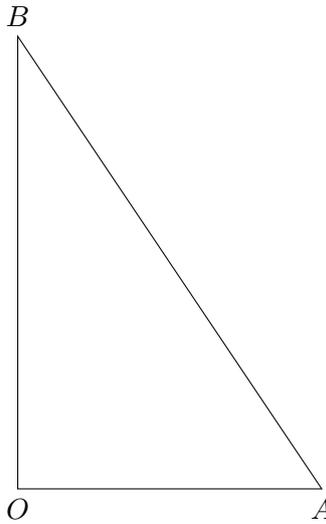
$$y = -\frac{r}{h}x + r$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq h \ 0 \leq y \leq -\frac{r}{h}x + r\}$$

$$x_b = \frac{2}{rh} \int_0^h \int_0^{-\frac{r}{h}x+r} x dx dy =$$

$$x_b = \frac{2}{rh} \int_0^h -\frac{r}{h}x^2 + rxdx = -\frac{2h}{3} + h = \frac{h}{3}$$

$$y_b = \frac{r}{3}$$



b) cono.

Il cono è il solido ottenuto dalla rotazione di un triangolo rettangolo attorno a uno dei cateti. Rotazione intorno a  $OA$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

c) La palla.

La palla è il solido ottenuto dalla rotazione di un semicerchio intorno al diametro

$$V_p = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Problema: calcolare il volume un solido di rotazione mediante la conoscenza del baricentro della figura piana e della curva che genera il solido.

## 28.2 Primo Teorema di Guldino

Il volume generato da una superficie piana che ruota attorno ad un asse è dato dal prodotto dell'area della figura per la lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro.

$$V = 2\pi x_b A$$

oppure

$$V = 2\pi y_b A$$

dipende dall'asse dove ruota.

## 28.3 Calcolo del baricentro

a) cilindro.

Il cilindro è il solido ottenuto dalla rotazione di un rettangolo attorno ad uno dei suoi lati.

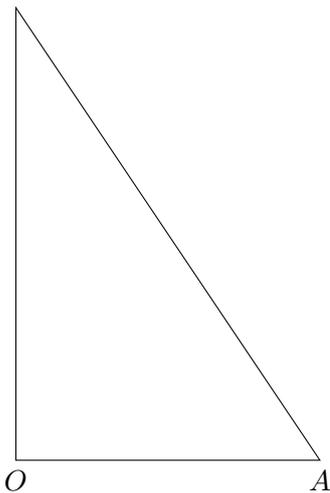
$$V = 2\pi \frac{r}{2}(rh)$$

b) cono.

Il cono è il solido ottenuto dalla rotazione di un triangolo rettangolo attorno a uno dei cateti. Se ruota intorno a  $OA = h$ ,

$$y_b = \frac{r}{3}$$

$$V = \frac{2}{3}\pi r \frac{(rh)}{2}$$



$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

c) La palla di raggio  $r$ .

$$y_b = \frac{4}{3} \frac{r}{\pi}$$

$$V = 2\pi \frac{4}{3} \frac{r}{\pi} \frac{\pi}{2} r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

## 29 7/12 Coordinate polari, cilindriche, sferiche. Matrice jacobiana

### 29.1 Coordinate polari

Coordinate polari.

Vale la formula di derivazione della funzione composta anche quando  $x$  e  $y$  sono a loro volta funzione di due variabili reali.

$$(\rho, \theta) \rightarrow (x(\rho, \theta), y(\rho, \theta))$$

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

$$\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} = \rho$$

Se le funzioni  $x = x(\rho, \theta)$  e  $y = y(\rho, \theta)$  sono derivabili e  $f$  è differenziabile vale

$$f_\rho(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta)) = f_x(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta))x_\rho + f_y(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta))y_\rho$$

$$f_\theta(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta)) = f_x(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta))x_\theta + f_y(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta))y_\theta$$

Applichiamo la derivazione al caso di coordinate polari

$$f_\rho = f_x \cos \theta + f_y \sin \theta$$

$$f_\theta = -f_x \rho \sin \theta + f_y \rho \cos \theta.$$

Si ricava  $f_x^2 + f_y^2 = f_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} f_\theta^2$  In caso di regolarità  $C^2$  possiamo calcolare

$$\begin{aligned} f_{\rho\rho}(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta)) &= f_\rho(f_x(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta))x_\rho + f_y(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta))y_\rho) = \\ &= f_{xx}(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta))(x_\rho)^2 + f_{xy}(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta))x_\rho y_\rho + f_x(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta))x_{\rho\rho} + \\ &= f_{yx}(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta))y_\rho x_\rho + f_{yy}(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta))(y_\rho)^2 + f_y(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta))y_{\rho\rho} = \end{aligned}$$

Nel caso  $x_{\rho\rho} = y_{\rho\rho} = 0$

$$f_{xx}(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta))(x_\rho)^2 + 2f_{xy}(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta))x_\rho y_\rho + f_{yy}(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta))(y_\rho)^2$$

$$\text{polari } f_{\rho\rho} = f_{xx}(\cos \theta)^2 + 2f_{xy} \cos \theta \sin \theta + f_{yy}(\sin \theta)^2$$

$$f_{\theta\theta}(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta)) = f_{xx}(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta))(x_\theta)^2 + f_{xy}(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta))x_\theta y_\theta + f_{yy}(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta))(y_\theta)^2 +$$

$$f_x(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta))x_{\theta\theta} + f_y(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta))y_{\theta\theta}$$

$$\text{polari } f_{\theta\theta} = f_{xx}\rho^2 \sin^2 \theta - 2f_{xy}\rho^2 \cos \theta \sin \theta + f_{yy}\rho^2 \cos^2 \theta + \theta - f_x \rho \cos \theta - f_y \rho \sin \theta$$

$$\frac{1}{\rho^2} f_{\theta\theta} + \frac{1}{\rho} f_\rho = f_{xx} \sin^2 \theta - 2f_{xy} \cos \theta \sin \theta + f_{yy} \cos^2 \theta$$

Da cui

$$\frac{1}{\rho^2} f_{\theta\theta} + \frac{1}{\rho} f_\rho + f_{\rho\rho} = f_{xx} + f_{yy}$$

## 29.2 Coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \sin \phi \\ y = \rho \sin \theta \sin \phi \\ z = \rho \cos \theta \end{cases}$$

$$\det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} = \rho^2 \sin \phi$$

## 29.3 Coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, z)} = \rho$$

## 29.4 Esercizi

**Esercizio 1.** Per ogni  $x$  reale

$$1 - \cos x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} x^{2n}.$$

a Vero

b Falso

**Esercizio 2.** L'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{n+2} (1-x^2)^n.$$

è dato da  $\{x \in \mathbb{R} : -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$

a Vero

b Falso

**Esercizio 3.**

La forma differenziale lineare

$$e^y \cos x dx + e^y \sin y dy$$

è esatta in  $\mathbb{R}^2$ .

a Vero

b Falso

**Esercizio 4.**

Dato  $z \in \mathbb{C}$

$$\sin(2z) = 2 \sin(z) \cos(z)$$

a Vero

b Falso

**Esercizio 5.**

Data la funzione  $f(x, y) = x^2 - \cos x + y^2 - \cos y$ , il punto  $(x, y) = (0, 0)$  è un punto in cui si annulla il gradiente

a Vero

b Falso

**Esercizio 6.** Per  $x$  reale con  $|x| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)x^n = 2 \frac{1}{(1-x)^3}$$

(suggerimento: si ha per  $|x| < 1$   $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$  derivare due volte ambo i membri)

- a Vero  b Falso

**Esercizio 7.**

L'integrale curvilineo di  $f(x, y) = 1$  esteso a una curva  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\phi \in C^1$  fornisce la lunghezza della curva.

- a Vero  b Falso

**Esercizio 8.**

Sia  $f(x, y) = e^{2y}(2 \sin^2 x - 1) + 2x + 2y + 1$ .  $f$  è armonica in  $\mathbb{R}^2$

- a Vero  b Falso

**Esercizio 9.**

La cardiode di equazione polare  $\rho = 2(1 + \cos \theta)$  con  $\theta \in [0, 2\pi]$  ha lunghezza 2

- a Vero  b Falso

**Esercizio 10.** Data l'elica cilindrica di equazioni parametriche ( $a > 0$ ,  $b > 0$ )

$$x(t) = a \cos t, \quad y(t) = a \sin t, \quad z(t) = bt, \quad t \geq 0$$

vale

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^k \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt = +\infty$$

- a Vero  b Falso

### 30 12/12: Formule di Gauss Green

Nel caso bidimensionale ci poniamo il problema analogo al Teorema fondamentale del Calcolo Integrale. Data una funzione  $f \in C[a, b]$  e  $F$  una sua primitiva vale

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Notiamo che  $F$  verifica  $F' = f$ . Legame tra la derivata di  $F$  e i valori della funzione  $F$  sulla frontiera dell'insieme  $[a, b]$ .

**Teorema 30.1.** *Sia  $D$  un dominio regolare e  $f \in C^1(D)$ . Valgono le formule*

$$\int \int_D f_x dx dy = \int_{+\partial D} f dy$$
$$\int \int_D f_y dx dy = - \int_{+\partial D} f dx$$

**Corollario 1.** *Formula per il calcolo dell'area*

$$m(D) = \int \int_D dx dy = \int_{+\partial D} x dy$$
$$m(D) = \int \int_D dx dy = - \int_{+\partial D} y dx$$

Sia  $D$  il cerchio di centro l'origine e raggio 1,  $m(D) = \pi$ ,  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$  con  $t \in [0, 2\pi]$

$$\int_{+\partial D} x dy = \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}(t + \cos t \sin t)|_0^{2\pi} = \pi$$

Sia  $D$  il cerchio di centro l'origine e raggio 1,  $m(D) = \pi$ ,  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$  con  $t \in [0, 2\pi]$

$$- \int_{+\partial D} y dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \frac{1}{2}(t - \cos t \sin t)|_0^{2\pi} = \pi$$
$$m(D) = \frac{1}{2} \int_{+\partial D} -y dx + x dy$$

Calcolo dell'area dell'ellisse di centro l'origine e assi  $a$  e  $b$ .  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$  con  $t \in [0, 2\pi]$

$$m(D) = \frac{1}{2} \int_{+\partial D} -y dx + x dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab \sin^2 t + ab \cos^2 t = \pi ab$$

#### 30.1 Verifica della formula di Gauss Green in un rettangolo $R$

Verifica delle formule di Gauss Green in un rettangolo

$$R = [a, b] \times [c, d].$$

Verifichiamo la formula

$$\int \int_D f_x dx dy = \int_{+\partial D} f dy.$$

Infatti sui segmenti paralleli all'asse  $x$  il contributo dell'integrale di linea è nullo mentre scrivendo le equazioni parametriche degli altri segmenti si ottiene

$$\int_{+\partial D} f dy = \int_c^d (f(b, y) - f(a, y)) dy$$

$$\int \int_D f_x dx dy = \int_c^d \left( \int_a^b f_x(x, y) dx \right) dy = \int_c^d (f(b, y) - f(a, y)) dy$$

Generalizzare a un dominio regolare normale.