Analisi Matematica II Elettronica Comunicazioni IV parte

Docente Prof.ssa Paola Loreti

$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- *Differenziale* di f in x. f differenziabile in x se esiste $p \in \mathbb{R}^n$ tale che
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - ph}{\|h\|} = 0,$$

- $p = Df(x)$. Infatti $h = te_i = (0, \dots, 0, 0, t, 0 \dots, 0)$
$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+te_i) - f(x) - tp_i}{|t|} = 0$$
Abbiamo
$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+te_i) - f(x) - tp_i}{t} = 0$$
e
$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+te_i) - f(x)}{t} = p_i$$
Quindi f ammette derivate parziali e
$$p_i = f_{x_i}$$

n=2

$$\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)-\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$$

$$\to 0$$

per

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0$$

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=$$

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)+o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)$$

Una funzione differenziabile in un punto risulta una funzione approssimabile, a meno di un resto infinitesimo, da una funzione lineare in un intorno abbastanza piccolo di quel punto

- continuità $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$

Teorema del differenziale

Sia f dotata di derivate parziali prime in un aperto A di $\mathbb{R}^2$. Se le derivate parziali prime sono continue in A allora f è differenziabile in A.

Ricordiamo Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$

f è differenziabile in (x, y)

- f ammette derivate parziali prime
- vale

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x+h, y+k) - f(x,y) - f_x(x,y)h - f_y(x,y)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Occorre dimostrare

$$f(x+h,y+k)-f(x,y)-f_x(x,y)h-f_y(x,y)k=o(\sqrt{h^2+k^2})$$

per

$$(h,k)\to(0,0).$$

Consideriamo

$$f(x+h,y+k)-f(x,y+k)+f(x,y+k)-f(x,y)-f_x(x,y)h-f_y(x,y)k$$

Applicando il teorema di Lagrange ad entrambe le derivate parziali prime

$$f(x+h,y+k)-f(x,y+k)=f_x(x_1,y+k)h$$

$$f(x,y+k)-f(x,y)=f_y(x,y_1)k$$

con $x_1\to x$, $y_1\to y$ per $(h,k)\to(0,0)$.

Otteniamo

$$\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}|f_x(x_1,y+k)-f_x(x,y)||h|+\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}|f_y(x,y_1)-f_y(x,y)||k| =$$

$$\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}}|f_x(x_1,y+k)-f_x(x,y)|+\frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}|f_y(x,y_1)-f_y(x,y)|$$

$$\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}}<1 \qquad \frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}<1$$

Ne segue

$$\leq |f_x(x_1, y+k) - f_x(x, y)| + |f_y(x, y_1) - f_y(x, y)|$$

Per l'ipotesi di continuità delle derivate parziali si ha che tende a zero per $(h, k) \to (0, 0)$, dimostrando così la differenziabilità
Notazione $f \in C^k(A)$: f dotata di derivate parziali prime continue; $C^0(A)$ funzioni continue in A.

$$f \in C^k(A) \implies f \in C^{k-1}(A)$$

Il teorema fornisce una condizione sufficiente per la differenziabilità della funzione: la continuità delle derivate parziali prime. Questa condizione non è necessaria per la differenziabilità: ci sono funzioni differenziabili con derivate parziali non continue

$$f(x,y) = x\sqrt[3]{y},$$

- f ammette le derivate parziali prime in $(0,0)$???

$$f_x(x,y) = \sqrt[3]{y}$$

$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 0$$

- le derivate parziali prime non sono entrambe continue in $(0,0)$
Infatti

$$f_y(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{3\sqrt[3]{y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$y = x^{3/2} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{3(x^{3/2})^{2/3}} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-f_x(0,0)h-f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0???$$

$$\left|\frac{f(h,k)-f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| = \frac{|h||\sqrt[3]{k}|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq |\sqrt[3]{k}|$$

Esercizio

$$f(x,y) = (x+a)(y+b)$$

con a e b reali. La funzione risulta differenziabile in $(0,0)$?

I intervallo $\subset \mathbb{R}$, A aperto $\subset \mathbb{R}^n$

$$x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

$$x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in A \;\; \forall t \in I$$

$$f : A \to \mathbb{R}$$

$$F(t) = f(x(t))$$

Teorema di derivazione delle funzioni composte

- $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ derivabile
- f differenziabile in $x(t) \in A$

Allora F risulta derivabile in $t \in I$

$$F'(t) = Df(x(t)) \cdot x'(t)$$

Sia $t \in I$, I intervallo. A aperto $\subset \mathbb{R}^2$. Consideriamo l'applicazione $t \to (x(t), y(t))$. Sia $(x(t), y(t)) \in A$ $f : A \to \mathbb{R}$.

$$F(t) = f(x(t), y(t)),$$

Teorema Assumiamo $x(t)$, $y(t)$ derivabili in $t \in I$. Sia f differenziabile in $(x(t), y(t)) \in A$. Allora F risulta derivabile in t e

$$F'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$$

Derivate direzionali

Per direzione si intende un vettore di modulo unitario.

In $\mathbb{R}^n$ la derivata direzionale rispetto a una direzione λ si definisce come $(x = (x_1, x_2, \ldots, x_n))$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\lambda) - f(x)}{t}$$

In $\mathbb{R}^2$ $\lambda = (\alpha, \beta)$ $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\alpha, y + t\beta) - f(x, y)}{t}$$

Teorema. Assumiamo f differenziabile in $x \in A \subset \mathbb{R}^n$. Allora f ammette derivata direzionale in x rispetto a ogni direzione λ e vale

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x) = Df(x) \cdot \lambda$$

Esercizio Data $f(x, y) = x^2 - y^2$ calcolare la derivata direzionale nel punto $(1, 1)$ lungo la direzione $(1/\sqrt{2}, (1/\sqrt{2})$.

$$f_x = 2x, \qquad f_y = -2y$$

$$f_x(1,1) = 2, \qquad f_y(1,1) = -2$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(1,1) = 2/\sqrt{2} - 2/\sqrt{2} = 0$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Punto $(0,0)$ $\lambda = (\alpha, \beta)$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t\alpha, t\beta) - f(0,0)}{t} = \frac{t^3 \alpha^2 \beta}{t^3(\alpha^2 + \beta^2)} = \frac{\alpha^2 \beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$f_x(0,0) = 0$ $f_y(0,0) = 0$: la formula non vale.
Studio della differenziabilità in $(0,0)$ di f

$$\frac{f(h,k) - f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{h^2 k}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$k = \alpha h \qquad \frac{\alpha h^2 h}{(h^2 + \alpha^2 h^2)\sqrt{h^2 + \alpha^2 h^2}} = \frac{\alpha h^3}{h^2(1+\alpha^2)|h|\sqrt{1+\alpha^2}}$$

Insiemi connessi in $\mathbb{R}^2$

Un insieme aperto A si dice connesso se non esistono due aperti disgiunti non vuoti di $\mathbb{R}^2$ la cui unione sia A.

Teorema Sia A un insieme aperto connesso e sia f dotata di derivate parziali nulle in A. Allora f è costante in A.

Esempio $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\, y > 0\}$

$$f(x, y) = \arctan \frac{x}{y} + \arctan \frac{y}{x}$$

$$f_x(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} = 0$$

$$f_y(x, y) = -\frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{x}{x^2 + y^2} = 0$$

$$f(x, y) = f(1, 1) = \frac{\pi}{2}$$

Minimi e Massimi locali

- Sia A un aperto $\subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Assumiamo che esista $r > 0$ tale che per ogni $x \in A \cap B_r(x_0)$ abbiamo $f(x) \geq f(x_0)$, allora x_0 è un punto di minimo locale e $f(x_0)$ è il minimo locale.
- Sia A un aperto $\subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Assumiamo che esista $r > 0$ tale che per ogni $x \in A \cap B_r(x_0)$ abbiamo $f(x) \leq f(x_0)$, allora x_0 è un punto di massimo locale e $f(x_0)$ è il massimo locale.

Punti di Minimo e massimo locali e assoluti.
Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (German: Weierstrass 31 October 1815–19 February 1897)
Teorema di Weierstrass $n = 1$.
f continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ allora f ammette minimo e massimo assoluto in $[a, b]$.
Esistono x_m and x_M in $[a, b]$ tali che

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \qquad \forall x \in [a, b].$$

A aperto di R^n.
C chiuso. Un insieme C è chiuso se l'insieme complementare in $\mathbb{R}^n$ è aperto
K limitato. Un insieme K è limitato se esiste una costante L tale che $\|x\| < L$ per ogni $x \in K$.
Definizione di min e max locale e globale per funzioni di 2 variabili in X insieme chiuso e limitato.
Esistono (x_m, y_m) e (x_M, y_M) in X tali che

$$f(x_m, y_m) \leq f(x, y) \leq f(x_M, y_M) \qquad \forall (x, y) \in X.$$

Teorema di Weierstrass. Una funzione continua in un insieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^2$ ammette minimo e massimo assoluto.

Condizione necessaria del primo ordine $f \in C^1(A)$, in un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^2$, e $(x_0, y_0) \in A$.
Vale: $(x_0, y_0) \in A$ punto di minimo o massimo relativo per f (estremo) allora $Df(x_0, y_0) = 0$: questo significa

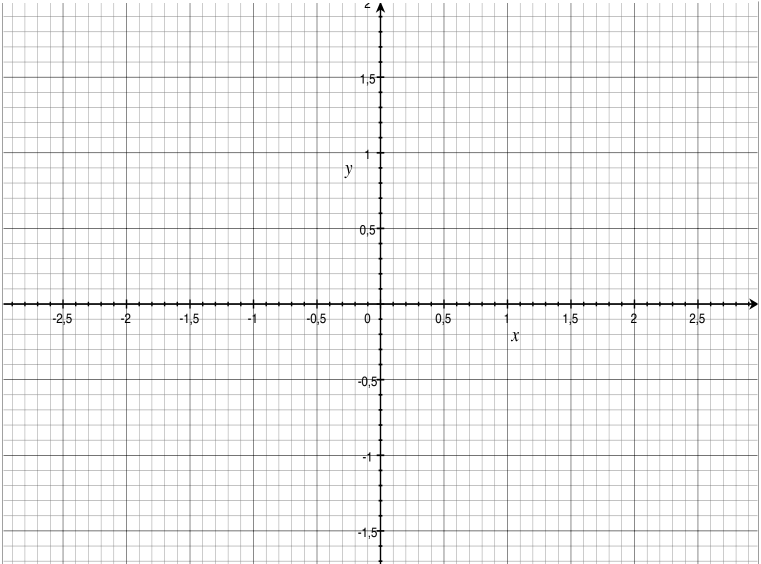
$$f_x(x_0, y_0) = 0 \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

Il viceversa risulta falso: $Df(x_0, y_0) = 0$ non significa che (x_0, y_0) minimizza o massimizza f. Questi punti, detti punti stazionari, potrebbero essere punti di sella oppure un punto di minimo locale oppure un punto di massimo locale.

Minimo e Massimo in insiemi chiusi e limitati: ricerca di minimi e massimi assoluti.
Assumiamo $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e K un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^2$. Sull'insieme K, f assume il minimo e il massimo assoluto.

- Trovare i punti in cui si annulla il gradiente di f all'interno di K (int (K)).
- Trovare i punti in cui si annulla il gradiente di f in K sulla frontiera dell'insieme K.
- Valutare la funzione in tutti questi punti per trovare il minimo e il massimo

Trovare il minimo e il massimo della funzione
$f(x,y) = 1 + x^2 - y^2$ in K, dove K é il trapezio deliminato dai punti $(1,2), (-1,2), (1/4,1/2), (-1/4,1/2)$, con il bordo incluso.
Disegnare l'insieme



- Nell' interno di K

$$f_x(x,y) = 2x \qquad f_y(x,y) = -2y$$

$Df(x,y) = 0 \iff x = 0, y = 0$. Il punto $(0,0)$ non appartiene all'interno di K per tale motivo non lo consideriamo. Studiamo la funzione sul bordo

- Calcolare la funzione nei punti $(1,2), (-1,2), (1/4,1/2), (-1/4,1/2)$

$$f(1,2) = f(-1,2) = -2$$

$$f(1/4,1/2) = f(-1/4,1/2) = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$$

Calcoliamo la funzione sui segmenti del bordo

$$f(x,1/2) = x^2 - \frac{1}{4} + 1 = x^2 + \frac{3}{4} \qquad -1/4 \leq x \leq 1/4$$

$$f(x,2x) = -3x^2 + 1 \qquad 1/4 \leq x \leq 1$$

$$f(x,2) = x^2 - 3 \qquad -1 \leq x \leq 1$$

$$f(x,-2x) = -3x^2 + 1 \qquad -1 \leq x \leq -1/4$$

ponendo $=0$ le derivate troviamo i punti $(0,1/2)$ e $(0,2)$

$$f(0,1/2) = 3/4 \qquad f(0,2) = -3$$

Come conseguenza dobbiamo confrontare

$$f(0,1/2) = 3/4 \quad f(0,2) = -3 \quad f(1,2) = f(-1,2) = -2$$

$$f(1/4,1/2) = f(-1/4,1/2) = \frac{13}{16}$$

Quindi

$$x_m = (0,2) \quad m = -3 \qquad x_M = (1/4,1/2)\ x_M = (-1/4,1/2) \quad M = \frac{13}{16}$$

Minimi e Massimi locali per funzioni $C^2(A)$. A aperto

- Si calcolano i punti in cui si annulla il gradiente
- Si vede il segno della matrice hessiana

Se restringiamo l'analisi alle matrici 2×2 allora abbiamo il seguente

$$Q = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

una matrice simmetrica.

$$|Q| = \det Q = ac - b^2.$$

Allora

$$|Q| > 0 \quad \text{e } a > 0, \implies Q > 0$$

$$|Q| > 0 \quad \text{e } a < 0, \implies Q < 0$$

- $$Q > 0 \iff ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2 > 0,$$

  per ogni $h = (h_1, h_2)$ non nullo.

- $$Q < 0 \iff ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2 < 0,$$

  per ogni $h = (h_1, h_2)$ non nullo.

Data la forma quadratica

$$ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2,$$

essa può essere equivalentemente scritta

$$a\left(h_1 + \frac{b}{a}h_2\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}h_2^2,$$

da questa formula si evince chiaramente il risultato.
Q: matrice Hessiana

$$Hf = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

$$f_{xx}(x_0, y_0)\left(h_1 + \frac{f_{xy}(x_0, y_0)}{f_{xx}(x_0, y_0)}h_2\right)^2 + \frac{f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}(x_0, y_0)^2}{f_{xx}(x_0, y_0)}h_2^2,$$

Se $x_0 \in A \subset \mathbb{R}^n$ è un punto stazionario ($Df(x_0) = 0$), la formula di Taylor fornisce (da dimostrare ($D^2 f$ matrice hessiana))

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{1}{2} D^2 f(x_0) h \cdot h + o(\|h\|^2), \quad h \to 0$$

Se $D^2 f(x_0) h \cdot h > 0$ allora localmente (in un intorno di x_0)

$$f(x) \geq f(x_0).$$

Allora x_0 è un punto di minimo locale.
Se $D^2 f(x_0) h \cdot h < 0$ allora localmente (in un intorno di x_0)

$$f(x) \leq f(x_0).$$

Allora x_0 è un punto di massimo locale.

Teorema di Taylor (con la formula del resto di Lagrange)
Teorema. Assumiamo $f \in C^2(A)$. x, $x+h \in A$, $x+th$ in A con $t \in [0,1]$, h sufficientemente piccolo. Esiste $\theta \in (0,1)$ tale che

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x+\theta h) h_i h_j$$

Da $x(t) = x + th$ con $h \in \mathbb{R}^n$ $t \in [0,1]$ e h piccolo tale che $x + th \in A$.

Poniamo

$$F(t) = f(x + th).$$

Applichiamo la regola di derivazione delle funzioni composte con $x(t) = x + th$, otteniamo

$$F'(t) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x + th)h_i,$$

e

$$F''(t) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x + th)h_i h_j.$$

Applicando la formula di Taylor per $n = 1$

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(\theta)$$

con $\theta \in (0, 1)$.
Da $F(t) = f(x + th)$ otteniamo

$$F(1) = f(x+h) \qquad F(0) = f(x)$$

$$F'(0) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x) h_i \qquad F''(\theta) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x + \theta h) h_i h_j,$$

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x + \theta h) h_i h_j$$

Teorema di Taylor (con il resto di Peano)
La norma di Frobenius di una matrice A definita da

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{i,j}|^2}$$

Assumiamo A matrice $n \times n$ e h in $\mathbb{R}^n$. Allora

$$\|Ah\| \leq \|A\| \, \|h\|$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ \ldots. & \ldots.. & \ldots. & \ldots.. & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \ldots\ldots & a_{in} \\ \ldots. & \ldots.. & \ldots. & \ldots.. & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$Ah = \begin{pmatrix} a_{11}h_1 + a_{12}h_2 + a_{13}h_3 + \ldots\ldots + a_{1n}h_n \\ \\ \\ a_{n1}h_1 + a_{n2}h_2 + a_{n3}h_3 + \ldots\ldots + a_{nn}h_n \end{pmatrix}$$

La norma di Ah

$$\|Ah\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_{i1}h_1 + a_{i2}h_2 + a_{i3}h_3 + ... + a_{in}h_n)^2}$$

$$\|Ah\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}\,\|h\| = \|A\|\,\|h\|$$

Ricordiamo la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$(a_{i1}h_1 + a_{i2}h_2 + ... + a_{in}h_n)^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}h_j\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} h_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)$$

Allora

$$|Ah \cdot h| \leq \|Ah\|\,\|h\| \leq \|A\|\,\|h\|^2$$

Da dimostrare

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x)h_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x)h_i h_j + o(\|h\|^2) \quad h \to 0$$

Da dimostrare

$$\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x+\theta h)h_i h_j = \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x)h_i h_j + o(\|h\|^2) \quad h \to 0$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} (f_{x_i x_j}(x+\theta h) - f_{x_i x_j}(x))h_i h_j = o(\|h\|^2)$$

Grazie alla precedente disuguaglianza (con $A = D^2 f(x+\theta h) - D^2 f(x)$))

$$\frac{\left|\sum_{i,j=1}^{n} (f_{x_i x_j}(x+\theta h) - f_{x_i x_j}(x))h_i h_j\right|}{\|h\|^2} \leq \left\|D^2 f(x+\theta h) - D^2 f(x)\right\|$$

Da $f \in C^2(A)$ si ottiene

$$\lim_{h \to 0} \left\|D^2 f(x+\theta h) - D^2 f(x)\right\| = 0$$

Abbiamo dimostrato

Teorema. Assumiamo $f \in C^2(A)$. x, $x+h \in A$ $x+th$ in A con $t \in [0,1]$, h sufficientemente piccolo allora

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x) h_i h_j + o(\|h\|^2) \quad h \to 0$$

Matrice Hessiana

$$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$$

$$f_x(x) = -2xe^{-(x^2+y^2)}$$
$$f_y(x) = -2ye^{-(x^2+y^2)}$$

Calcoliamo

$$f_{xx} = -2e^{-(x^2+y^2)} + 4x^2e^{-(x^2+y^2)}$$

$$f_{yy} = -2e^{-(x^2+y^2)} + 4y^2e^{-(x^2+y^2)}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 4xye^{-(x^2+y^2)}$$

Matrice Hessiana

$$\begin{pmatrix} -2e^{-(x^2+y^2)} + 4x^2e^{-(x^2+y^2)} & 4xye^{-(x^2+y^2)} \\ 4xye^{-(x^2+y^2)} & -2e^{-(x^2+y^2)} + 4y^2e^{-(x^2+y^2)} \end{pmatrix}$$

Calcolo in $(0,0)$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Determinante $(= 4)$ primo elemento negativo $(= -2)$.
$(0, 0)$ punto di massimo relativo $\quad f(0, 0) = 1$.

Classificare gli eventuali punti stazionari della funzione definita in $\mathbb{R}^2$ da

$$f(x, y) = \cos x + \sin y$$

I punti stazionari della funzione sono dati dal sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\sin x = 0 \\ \cos y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{\pi}{2} + j\pi & j \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Si hanno dunque infiniti punti stazionari, ciascuno di coordinate $(k\pi, \frac{\pi}{2} + j\pi)$, al variare di $k \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{Z}$.

La matrice hessiana in un generico punto (x, y) è

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} -\cos x & 0 \\ 0 & -\sin y \end{pmatrix}.$$

Calcolandola in un generico punto stazionario diventa

$$H\left(k\pi, \frac{\pi}{2} + j\pi\right) = \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} & 0 \\ 0 & (-1)^{j+1} \end{pmatrix}$$

Il determinante della matrice Hessiana in un generico punto stazionario risulta $(-1)^{j+k}$. Dunque, se k e j sono entrambi pari o entrambi dispari, il determinante risulta pari a 1 e dunque positivo; si tratterà di punti di max o min relativo a seconda del segni di $(-1)^{k+1}$: se k è pari si tratta di un punto di max relativo, se k è dispari si tratta di un minimo relativo. Ripetendo se k e j sono entrambi pari si tratta di un massimo relativo. Se invece k e j sono entrambi dispari si tratta di un minimo relativo. Se infine k è pari e j è dispari (o viceversa), abbiamo un punto di sella poichè il valore del determinante è -1.

$n = 2$ Curva: un'applicazione continua da un intervallo I in $\mathbb{R}^2$.

$$\varphi : t \in I \to \varphi(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$$

- Segmento di estremi (x_0, y_0) e (x_1, y_1).

$$\begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \end{cases} \qquad t \in [0, 1]$$

- Circonferenza di centro (x_0, y_0) e raggio r.

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos t \\ y = y_0 + r \sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Distinguere la curva dal sostegno della curva: ecco due curve distinte con lo stesso sostegno

$$\begin{cases} x = \cos t & \qquad t \in [0, 2\pi] \\ y = \sin t \end{cases}$$

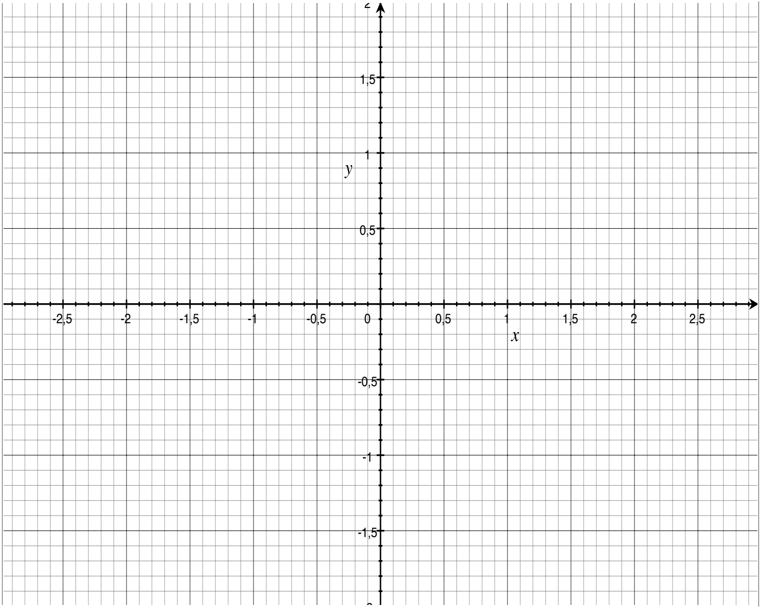
$$\begin{cases} x = \cos t & \qquad t \in [0, 6\pi] \\ y = \sin t \end{cases}$$

Il sostegno della curva φ dunque è l'immagine dell'intervallo I tramite la curva φ: $\varphi(I)$.

$I = [a, b]$

- Definizione di curva semplice: una curva si dice semplice se per $t_1 \neq t_2$ di cui almeno un punto interno a I si ha $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$
- Definizione di curva chiusa: una curva si dice chiusa se $\varphi(a) = \varphi(b)$
- Definizione di curva regolare: Sia $\varphi \in C^1$. La curva si dice regolare se
$$x'(t)^2 + y'(t)^2 > 0 \;\; \forall t \in (a, b)$$

Disegnare (a) una curva chiusa, (b) una curva semplice, (c) una curva non semplice (d) asteroide



Sia $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ la curva. Per definire la poligonale bisogna scegliere i punti sulla curva. Sia quindi ρ una partizione dell'intervallo $[a, b]$

$$\rho = \{t_i \in [a, b] : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$$

La lunghezza della poligonale

$$\sqrt{(x(t_1) - x(t_0))^2 + (y(t_1) - y(t_0))^2}$$

$$+ \cdots + \sqrt{(x(t_n) - x(t_{n-1}))^2 + (y(t_n) - y(t_{n-1}))^2} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}$$

La lunghezza della curva: estremo superiore di questa quantità al variare della partizione. Se tale valore risulta finito, la curva si dice rettificabile.

$$L(\varphi) = \sup_{\rho} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}$$

Scelto un numero finito di punti lungo la curva e connettendo ogni punto al successivo con un segmento, sommiamo le lunghezze dei segmenti e otteniamo la lunghezza del cammino tramite poligonali. Per il singolo segmento utilizziamo la distanza euclidea tra i due estremi. La lunghezza della curva è l'estremo superiore della lunghezza del cammino della poligonale, al variare delle poligonali.
Teorema di rettificabilità delle curve C^1. Sia $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una curva di classe C^1. Allora è rettificabile e vale

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

La seguente curva è chiusa? E' regolare?

$$\begin{cases} x(t) = te^{-t} & t \in [0,4] \\ y(t) = \frac{1}{2}t^2 - t \end{cases}$$

Soluzione:
Per $t = 0$, otteniamo il punto $(0,0)$, mentre per $t = 4$ otteniamo $(4e^{-4}, 4)$. Poiché le posizioni iniziale e finale non coincidono, la curva non è chiusa.
La curva data è di classe C^1

$$\begin{cases} x'(t) = e^{-t}(1-t) \\ y'(t) = t - 1 \end{cases}$$

Tuttavia, poichè al tempo $t = 1$ (interno all'intervallo $[0,4]$), si ha $\big(x'(1), y'(1)\big) = (0,0)$, deduciamo che la curva è non regolare in $[0,4]$ (si puó tuttavia dire che é regolare a tratti).

Circonferenza

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\, dt = 2\pi r$$

Esercizio Data la curva

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{2}\cos t \\ y(t) = \sqrt{2}\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, \pi/4]$$

allora vale

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = \pi/2$$

$\boxed{\text{a}}$ Vero $\qquad$ $\boxed{\text{b}}$ Falso

Esercizio

$$\begin{cases} x = e^t \cos(t) & \qquad t \in [0, \frac{\pi}{4}] \\ y = e^t \sin(t) \end{cases}$$

Calcolare la lunghezza ($L = \sqrt{2}(e^{\frac{\pi}{4}} - 1)$)

Arco di Ellisse $a > 0$, $b > 0$ con $a > b$

$$\begin{cases} x = a\cos(\theta) & \qquad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ y = b\sin(\theta) \end{cases}$$

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}d\theta = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta}d\theta$$

$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$ e la sostituzione $t=\frac{\pi}{2}-\theta$ si ottiene un integrale ellittico che andremo a risolvere per serie.

$$\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2(1-\cos^2\theta)+b^2\cos^2\theta}d\theta = \int_0^{\pi/2} a\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\cos^2\theta}d\theta$$

Poniamo $k^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$.

$$a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}d\theta$$

Ricordiamo se $\alpha\in\mathbb{R}$ e $|x|<1$

$$(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$$

$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!} & k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Si ottiene

$$(1 - k^2 \sin^2\theta)^{\frac{1}{2}} = \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \binom{\frac{1}{2}}{j} k^{2j} \sin^{2j}\theta =$$

$$1 - \frac{1}{2} k^2 \sin^2\theta + \sum_{j=2}^{+\infty} (-1)^j \binom{\frac{1}{2}}{j} k^{2j} \sin^{2j}\theta$$

Osserviamo

$$\binom{\frac{1}{2}}{j} = (-1)^{j-1}\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\dots\frac{2j-3}{2}}{j!} = (-1)^{j-1}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots(2j-3)}{2^j j!} =$$

$$(-1)^{j-1}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots(2j-3)}{2j2(j-1)2(j-2)\ldots 2}$$

$$= (-1)^{j-1}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots(2j-3)}{(2j)!!} = (-1)^{j-1}\frac{(2j-3)!!}{(2j)!!}$$

ove $n!!$ indica
n dispari il prodotto di tutti i dispari tra 1 e n,
n pari il prodotto di tutti i pari tra 2 e n.

$$(1-k^2\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}} =$$

$$a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}d\theta = a\left(1-\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{(2j-3)!!}{(2j)!!}k^{2j}\int_0^{\pi/2}\sin^{2j}\theta d\theta\right)$$

Dimostriamo

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2j}\theta d\theta = \frac{\pi}{2}\frac{(2j-1)!!}{(2j)!!}$$

Per $j = 1$ risulta verificata (scrivere in dettaglio).
Assumendo

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2j}\theta d\theta = \frac{\pi}{2}\frac{(2j-1)!!}{(2j)!!}$$

dimostreremo

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2(j+1)}\theta d\theta = \frac{\pi}{2}\frac{(2j+1)!!}{(2j+2)!!}$$

Infatti

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2j+1}\theta \sin\theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^{2j+1}\theta(-\cos\theta)' d\theta$$

$$= \sin^{2j+1}\theta(-\cos\theta)|_0^{\pi/2} + (2j+1)\int_0^{\pi/2} \sin^{2j}\theta \cos^2\theta d\theta$$

$$= (2j+1)\int_0^{\pi/2} \sin^{2j}\theta(1-\sin^2\theta) d\theta =$$

$$(2j+1)\int_0^{\pi/2} \sin^{2j}\theta d\theta - (2j+1)\int_0^{\pi/2} \sin^{2j+2}\theta d\theta$$

$$(2j+2)\int_0^{\pi/2} \sin^{2j+2}\theta d\theta = (2j+1)\int_0^{\pi/2} \sin^{2j}\theta d\theta$$

Utilizzando l'ipotesi induttiva

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2j+2}\theta d\theta = \frac{(2j+1)}{(2j+2)}\frac{\pi}{2}\frac{(2j-1)!!}{(2j)!!} = \frac{\pi}{2}\frac{(2j+1)!!}{(2j+2)!!}$$

In conclusione

$$L = a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}d\theta = a\frac{\pi}{2}\left(1-\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{2j-1}\left(\frac{(2j-1)!!}{(2j)!!}k^j\right)^2\right)$$

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(t))^2} dt$$

Asteroide: $a > 0$

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

Data la simmetria consideriamo x, y positivi

$$x(t) = t \quad y(t) = f(t) \quad t \in [a, b]$$

$$y = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \quad x \in [0, a]$$

$$y' = \frac{3}{2}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}\left(- \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right) =$$

$$\frac{L}{4} = \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}(-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}})\right)^2} dx =$$

$$\int_0^a \sqrt{1 + (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})x^{-\frac{2}{3}}} dx = \int_0^a \sqrt{a^{\frac{2}{3}} x^{-\frac{2}{3}}} dx =$$

$$a^{\frac{1}{3}} \int_0^a x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{2} a^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} a$$

$$L = 6a$$

Asteroide $a = 1$. La figura richiama l'immagine di una stella che brilla.
Equazioni equazioni parametriche

$$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

è regolare a tratti. Possiamo calcolarne la lunghezza.

$$x'(t) = -3\cos^2 t \sin t \qquad y'(t) = 3\sin^2 t \cos t$$

il cui modulo risulta

$$3\sqrt{\cos^2 t \sin^2 t} = \frac{3}{2}|\sin(2t)|$$

Vale 0 per $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$ ossia la curva non è regolare nei punti corrispondenti ai valori del parametro precedentemente calcolati, che sono i punti $(\pm 1, 0)$,$(0, \pm 1)$.

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2}\sin(2t)dt = -3\cos(2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6$$

Arco di parabola

$$y = \frac{1}{2}x^2 \quad x \in [0, a]$$

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}dx$$

In questo caso

$$L(\varphi) = \int_0^a \sqrt{1 + x^2}dx$$

Occorre ricordare

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$(\sinh(x))' = \cosh(x) \qquad (\cosh(x))' = \sinh(x)$$

$$(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = 1$$

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}(sett\sinh x + x\sqrt{1+x^2}) + c$$

$$sett\sinh x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Si pone $x = \sinh t$ Si ottiene

$$\int \cosh^2 t dt = \frac{1}{2}(\sinh t \cosh t + t) + c$$

Si procede alla sostituzione $t = sett\sinh x$

$$\int_0^a \sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}(a\sqrt{1+a^2} + sett\sinh a)$$

esempio

- forma cartesiana: equazione costituita da tutti i punti $P = (x, y)$ le cui coordinate soddisfano un' equazione.

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

- forma parametrica

$$\begin{cases} x = 1 + \cos\theta \\ y = \sin\theta \qquad \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

- forma polare

$$\rho = \rho(\theta)$$

$$\rho = 2\cos\theta$$

La lunghezza della curva in forma polare

$$L = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} d\theta$$

$$\theta \in [\theta_0, \theta_1]$$

$$\begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta \\ y = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} x'(\theta) = \rho'\cos\theta - \rho\sin\theta \\ y'(\theta) = \rho'\sin\theta + \rho\cos\theta \end{cases}$$

$$(\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta)^2 + (\rho'\sin\theta + \rho\cos\theta)^2 =$$

$$(\rho')^2 + (\rho)^2$$

$$L = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} d\theta$$

Cardiode
Il suo nome esprime la sua forma di un cuore.

$$\rho = a(1+\cos(\theta)) \;\; \theta \in [0, 2\pi] \;\; a > 0$$

$$L = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1+\cos(\theta))^2 + a^2 \sin^2\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} a \sqrt{1+\cos(\theta)} d\theta =$$

(dalla formula di bisezione)

$$\int_0^{2\pi} 2a \left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| d\theta =$$

$$\int_0^{\pi} 4a \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = 8a \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = 8a$$