Analisi Matematica II VI parte

Teorema della divergenza. Formula di Stokes.
Consideriamo la frontiera del dominio D e assumiamo che sia costituita da una curva regolare a tratti. Sia

$$x = x(t), y = y(t) \quad t \in [a, b]$$

la rappresentazione parametrica della curva e assumiamo che il verso di percorrenza indotto dalla rappresentazione coincida con l'orientamento positivo della frontiera ∂D

curva regolare: tangente e normale alla curva

- Tangente a una curva regolare in un punto $P = (x(t_0), y(t_0))$.

$$\tau = \left(\frac{x'(t_0)}{\sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}}, \frac{y'(t_0)}{\sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}} \right)$$

- Normale a una curva in un punto $P = (x(t_0), y(t_0))$.

$$\mathbf{n} = \left(\frac{y'(t_0)}{\sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}}, -\frac{x'(t_0)}{\sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}} \right)$$

Nel caso della circonferenza $\mathbf{n} = (\cos t, \sin t)$ ed orientato all'esterno del cerchio di centro $(0,0)$ e raggio 1 di cui la circonferenza costituisce la frontiera.

Considerando uno spazio euclideo a tre dimensioni, **i** **j**e **k** relativi agli assi x, y e z, la divergenza di un campo vettoriale C^1

$$\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$$

la funzione scalare:

$$div\mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

$n = 2$

$$div\mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = F_1 \frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} - F_2 \frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}$$

Calcoliamo l'integrale curvilineo della funzione $F \cdot n$

$$\int_a^b \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \int_a^b \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt =$$

$$\int_a^b \left(\frac{F_1 y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + (y'(t)^2}} - \frac{F_2 x'(t)}{\sqrt{(x'(t)^2 + y'(t)^2}} \right) \sqrt{(x'(t)^2 + y'(t)^2} dt =$$

$$\int_a^b \Big(F_1 y'(t) - F_2 x'(t) \Big) dt = \int_{+\partial D} F_1 dy - F_2 dx$$

D'altra parte dalle formule di Gauss Green

$$\int\int_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\right) dxdy = \int_{+\partial D} -F_2 dx + F_1 dy$$

Abbiamo cosi dimostrato nel caso di frontiera costituita da una curva regolare regolare a tratti

Teorema della divergenza Sia D un dominio regolare del piano e $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ di classe $C^1(D)$. Si ha

$$\int\int_D div(\mathbf{F}) dxdy = \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$$

Ancora dalle formule di Gauss Green

$$\int\int_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\right) dxdy = \int_{+\partial D} -F_2 dx + F_1 dy \qquad (F)$$

dimostriamo la **Formula di Stokes**

$$\int\int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy = \int_{+\partial D} F_1 dx + F_2 dy$$

dim. Si applica la formula (F) con $(-F_2, F_1)$

$$\int\int_D \left(-\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy = \int_{+\partial D} -F_1 dx - F_2 dy$$

Cambiamento di variabili in un integrale doppio.
Consideriamo

$$\int\int_D f(x,y)dxdy$$

con D dominio regolare di $\mathbb{R}^2$ e f funzione continua in D, a valori reali. Sia T un dominio regolare di $\mathbb{R}^2$; sia $\phi : T \to \mathbb{R}^2$ costituita da una coppia (ϕ_1, ϕ_2) di funzioni a valori in $\mathbb{R}$. Supponiamo $\phi(T) = D$, le funzioni $\phi_1,\ \phi_2$ di classe $C^1(T)$ e ϕ invertibile.

Sia $\phi : T \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. La matrice jacobiana della funzione ϕ in $u = (u_1, \dots, u_n)$ la matrice delle derivate parziali prime della funzione calcolate in u.

$$\mathrm{J}\,\phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \phi_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_m}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \phi_m}{\partial u_n} \end{bmatrix}, \qquad (\mathrm{J}\,\phi)_{ij} = \frac{\partial \phi_i(u)}{\partial u_j}.$$

Se $m = n$ allora la matrice jacobiana una matrice quadrata. Si puo' in tal caso calcolare il suo determinante, noto come jacobiano.
$n = 2$: indichiamo ora con u, v le variabili indipendenti di ϕ. La matrice jacobiana di ϕ la matrice quadrata di ordine 2 avente come righe i gradienti delle componenti ϕ_1 e ϕ_2.

- coordinate polari.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \rho \geq 0 \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

$$\phi(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$

Osserviamo che nel passaggio a coordinate polari nel piano ϕ non iniettiva in quanto tutti i punti dell'asse θ si trasformano in $(0,0)$.

$$\mathrm{J}\,\phi = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{bmatrix},$$

il cui determinante vale ρ.

Vale la seguente formula

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_{\phi^{-1}(D)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$$

Nel piano ρ, θ otteniamo, cambiando in coordinate polare,

$$T = \{(\rho,\theta) : \rho \in [0,2],\ \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}$$

Calcoliamo

$$\int\int_D x^2 dxdy$$

$$\int_0^2 \rho^3 d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta = 4\frac{1}{2}(\theta + \cos\theta\sin\theta)|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi$$

$$\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy,$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2+y^2 \leq 9, y \geq 0\}$$

$$T = \{(\rho,\theta) : 2 \leq \rho \leq 3, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

Ne segue

$$\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy = \int\int_T \rho^2 d\rho d\theta =$$

$$\int_0^\pi d\theta \int_2^3 \rho^2 d\rho = \int_0^\pi \frac{1}{3}\rho^3|_2^3 = \frac{19}{3}\pi$$

Calcolare

$$\int\int_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,1]\ -x\le y\le x\}$$

$$\int\int_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_{-x}^{x}(x^2+y^2)\mathrm{d}y = \int_0^1 x^2y+\frac{1}{3}y^3|_{-x}^{x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 2x^3+\frac{2}{3}x^3\mathrm{d}x = \frac{8}{3}\int_0^1 x^3\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$$

$$T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \theta\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]\quad 0\le\rho\le\frac{1}{\cos\theta}\}$$

$$\int\int_T (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}}\rho^3 d\rho = \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^4\theta}d\theta =$$

$$\frac{1}{4}(\frac{1}{3}\tan^3 x+\tan x|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}) = \frac{1}{4}(\frac{2}{3}+2) = \frac{1}{4}\frac{8}{3} = \frac{2}{3}$$

Coordinate polari L'integrale da calcolare è

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x.$$

Il suo quadrato si può scrivere come

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \mathrm{d}y\right) = \int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{+\infty} \rho e^{-\frac{\rho^2}{2}} \mathrm{d}\rho$$

che può essere integrato ottenendo

$$I^2 = -\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \left[e^{-\frac{\rho^2}{2}}\right]_{\rho=0}^{\rho=+\infty} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 2\pi$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}.$$

In tre dimensioni. Coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$$

dove θ varia tra 0 e 2π, ϕ varia tra 0 e π ; $\rho \geq 0$
Lo jacobiano della trasformazione

$$\begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & -\rho \sin \phi \sin \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \rho \sin \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \sin \theta \\ \cos \phi & 0 & -\rho \sin \phi \end{vmatrix} = -\rho^2 \sin \phi$$

$$= \cos \phi \begin{vmatrix} -\rho \sin \phi \sin \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \rho \sin \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \sin \theta \end{vmatrix} - \rho \sin \phi \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & -\rho \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \rho \sin \phi \cos \theta \end{vmatrix}$$

$$= \cos^2 \phi \sin \phi (-\rho^2 \sin^2 \theta - \rho^2 \cos^2 \theta) - \rho \sin^3 \phi (\rho \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta) =$$
$$-\rho^2 \cos^2 \phi \sin \phi - \rho^2 \sin^3 \phi = -\rho^2 \sin \phi$$

Il sistema di coordinate cilindriche un sistema di coordinate che estende il sistema bidimensionale polare aggiungendo una terza coordinata, che misura l'altezza di un punto dal piano base.
Le tre coordinate cilindriche possono essere convertite in coordinate cartesiane con le formule

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos\theta \\ y &= \rho \sin\theta \\ z &= z. \end{aligned}$$

Il determinante jacobiano vale ρ:

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho(\cos\theta)^2 + \rho(\sin\theta)^2 = \rho.$$

Integrali per sostituzione

($n = 2$, $n = 3$) Si puo' usare la sostituzione quando si integra funzioni in più variabili.

$$(x_1, \dots, x_n) = \phi(u_1, \dots, u_n)$$

deve essere C^1 invertibile con determinante jacobiano

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \dots x_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)} \neq 0$$

$$\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = |\det(\mathrm{D}\,\phi)(u_1, \dots, u_n)|\,\mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_n$$

Teorema di cambiamento di variabili negli integrali doppi

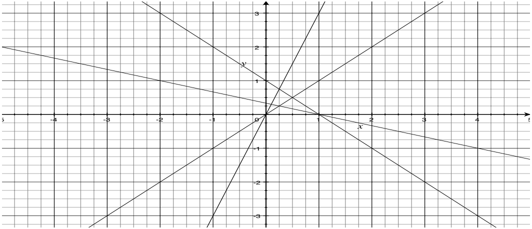
Siano T, D due domini regolari di $\mathbb{R}^2$ e $\phi : T \to D$ un'applicazione invertibile di classe C^1 con con determinante jacobiano $\neq 0$ in T. Allora per ogni funzione continua $f : D = \phi(T) \to \mathbb{R}$ vale

$$\int\int_D f(x, y) dxdy = \int\int_T f(x(u, v), y(u, v))|det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}|dudv$$

Calcolare

$$\int\int_D \frac{x}{y} dxdy$$

ove D il dominio racchiuso dalle rette $y = x$, $y = 3x$, $y = \frac{1-x}{3}$, $y = 1 - x$.



Cambiamento di variabili

$$u = \frac{y}{x}, \quad v = \frac{y}{1-x}$$

$$T = \{(u, v) : 1 \leq u \leq 3, \quad \frac{1}{3} \leq v \leq 1\}$$

Da $u = \frac{y}{x}$, $\quad v = \frac{y}{1-x}$ si ottiene

$$ux = y \quad v(1-x) = y \implies (u+v)x = v \implies x = \frac{v}{u+v}$$

$$x = \frac{v}{u+v} \qquad y = \frac{uv}{u+v}$$

$$\begin{vmatrix} -\frac{v}{(u+v)^2} & -\frac{v}{(u+v)^2} + \frac{1}{u+v} \\ \frac{v}{u+v} - \frac{uv}{(u+v)^2} & \frac{u}{u+v} - \frac{uv}{(u+v)^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{v}{(u+v)^2} & \frac{u}{(u+v)^2} \\ \frac{v^2}{(u+v)^2} & \frac{u^2}{(u+v)^2} \end{vmatrix} = -\frac{uv}{(u+v)^3}$$

$$\int_{\frac{1}{3}}^{1} vdv \int_{1}^{3} \frac{1}{(u+v)^3} du = \int_{\frac{1}{3}}^{1} (-\frac{1}{2}\frac{1}{(u+v)^2})|_1^3 vdv =$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{3}}^{1} (\frac{v+3-3}{(3+v)^2} - \frac{v+1-1}{(1+v)^2}) dv = -\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{dv}{(3+v)} + \frac{3}{2}\int_{1}^{3} \frac{dv}{(3+v)^2} +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{dv}{(1+v)} - \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{dv}{(1+v)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(3+v)|_{\frac{1}{3}}^{1} - \frac{3}{2}\frac{1}{3+v}|_{\frac{1}{3}}^{1} + \frac{1}{2}\ln(1+v)|_{\frac{1}{3}}^{1} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+v}|_{\frac{1}{3}}^{1} =$$

$$\frac{1}{20}(-1 + 10\ln\frac{5}{4})$$

III recupero e IV Recupero.
Dato il dominio D normale rispetto all'asse x

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$$

scrivere D come dominio normale rispetto all'asse y.
Calcolare l'integrale doppio della funzione $f(x, y) = xy$
r

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq \sqrt{y}\}$$

$$\int\int_D xy \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_0^1 y dy \int_y^{\sqrt{y}} x \mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 y x^2|_y^{\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2}\int_0^1 y(y - y^2) dy = \frac{1}{2}(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{24}$$

$$\int\int_D xy \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_0^1 x dx \int_{x^2}^{x} y dy =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x(x^2 - x^4) dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^3 - x^5) dx = \frac{1}{2}(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}) = \frac{1}{24}$$

Dato il triangolo T del piano di vertici $(0,0),(1,0),(1,1)$

$$T = \{(x,y) \in [0,1] \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq x\}$$

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times [0,1] : y \leq x \leq 1\}$$

calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_T e^{x^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Considerazione sulla scelta della rappresentazione del dominio.
Se consideriamo T normale rispetto all'asse x l'integrale si svolge nel seguente modo

$$\int\int_T e^{x^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 e^{x^2} \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}y = \int_0^1 xe^{x^2} dx$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (2x)e^{x^2} dx = \frac{1}{2}e^{x^2}|_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)$$

Dato il dominio D

$$D = \{(x, y) \in [0, 1] \times [3, 4]\}$$

calcolare

$$\int\int_D \frac{1}{(x+y)^2} \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

$$\int\int_D \frac{1}{(x+y)^2} \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_3^4 \frac{1}{(x+y)^2} \mathrm{d}y = \int_0^1 \left(-\frac{1}{x+y}\right)\Big|_3^4 \mathrm{d}x =$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} \mathrm{d}x =$$

$$\ln 4 - \ln 5 - \ln 3 + \ln 4 = \ln 16 - \ln 15$$

Dato il dominio D

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$$

calcolare

$$\int\int_D (x + y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

r : $7/20$

$$\int\int_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^2} (x+y)\mathrm{d}y =$$

$$\int_0^1 [xy + \frac{1}{2}y^2]|_0^{x^2} \mathrm{d}x =$$

$$\int_0^1 (x^3 + \frac{1}{2}x^4)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{10}x^5|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{10} = \frac{7}{20}$$

Esercizio: calcolare

$$I = \int\int_D (x-y)^2 \cos(x+y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$$|x+y| \le \frac{\pi}{2}, \quad |x-y| \le 1$$

Disegnare D
Calcolare l'integrale.

$$u = x + y \quad v = x - y$$

$y = u - x \quad y = x - v \qquad u - x = x - v$

$$x = \frac{1}{2}(u + v)\ ,\ y = \frac{1}{2}(u - v)$$

$$T = \{(u, v) : |u| \leq \frac{\pi}{2}, \quad |v| \leq 1\}$$

Disegnare T.
Modulo del determinante della matrice jacobiana: $\frac{1}{2}$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u du \int_{-1}^{1} v^2 \mathrm{d}v =$$

$$\sin u|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} v^3|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}\pi$$

Esercizio. Calcolare

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x.$$

risposta $\sqrt{\pi}$

Calcolare, risolvendo l'integrale doppio, l'area dell'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$m(D) = \int\int_D dxdy = \int_{-a}^{a} dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy =$$

$$\int_{-a}^{a} y|_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dx = 2\frac{b}{a}\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}dx =$$

$$\frac{b}{a}(a^2 \arcsin\frac{x}{a})|_{-a}^{a} + x\sqrt{a^2-x^2}|_{-a}^{a} = \pi ab$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}(a^2 \arcsin\frac{x}{a}) + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + c$$

Calcolare, risolvendo l'integrale doppio e utilizzando sostituzioni, l'area della porzione di piano del primo quadrante racchiusa dagli assi e dall'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$m(D) = \int\int_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \ \ x \geq 0, \quad y \geq 0\}$$

$$u = \frac{x}{a}, \quad v = \frac{y}{b} \implies \quad x = au \ \ , \ y = bv$$

$$T = \{u^2 + v^2 \leq 1, \ \ u \geq 0, \quad v \geq 0\}$$

$$I = \int_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = ab \int\int_T \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Trasformando in coordinate polari

$$I = \int\int_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \rho d\rho = \frac{\pi}{4} ab$$

Esercizio: calcolare

$$I = \int\int_D x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$$D = \{\frac{1}{4}x^2 + y^2 \leq 1, \;\; x \geq 0, \quad y \geq 0\}$$

Disegnare D

$$u = \frac{x}{2}, \quad v = y \quad x = 2u \;\;, \;\; y = v$$

$$T = \{u^2 + v^2 \leq 1, \;\; u \geq 0, \quad v \geq 0\}$$

Disegnare T.

Calcolare il modulo del determinante della matrice jacobiana

$$I = \int\int_D x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int\int_T (4u^2)dudv$$

Trasformando in coordinate polari

$$8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho = 8\frac{\pi}{4}\frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Esercizio Data la curva di equazioni parametriche $(cost, sent, t)$ con $t \in [0, \pi]$

- Calcolarne la lunghezza

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

$$L = \int_0^\pi \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t + 1} dt = \sqrt{2}\pi$$

- l'integrale curvilineo della funzione $f(x, y, z) = y$.

$$I = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

$$I_f = \sqrt{2} \int_0^\pi \sin t dt = -\sqrt{2} \cos(t)|_0^\pi = 2\sqrt{2}$$

Data la forma differenziale

$$\omega = (xy + \frac{z}{1+x^2})dx + (\frac{1}{2}x^2 + yz)dy + (\frac{1}{2}y^2 + \arctan x)dz$$

- stabilire se la forma risulta esatta in $\mathbb{R}^3$.

$$\omega = a(x,y,z)dx + b(x,y,z)dy + c(x,y,z)dz$$

- la forma risulta chiusa

$$a_y = b_x \quad a_z = c_x \quad b_z = c_y$$

$$a_y = x \;\; b_x = x \quad a_z = \frac{1}{1+x^2} \quad c_x = \frac{1}{1+x^2} \quad b_z = y \quad c_y = y$$

L'insieme: $\mathbb{R}^3$

- In caso affermativo, calcolare una primitiva

$$\begin{cases} f_x(x,y,z) = xy + \frac{z}{1+x^2} \\ f_y(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + yz \\ f_z(x,y,z) = \frac{1}{2}y^2 + \arctan x \end{cases}$$

$$f(x,y,z) = \int xy + \frac{z}{1+x^2}\,dx + \varphi(y,z)$$

Ne segue

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 y + z \arctan x + \varphi(y,z)$$

Sostituendo nella seconda e nella terza

$$f_y(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + \varphi_y(y,z) = \frac{1}{2}x^2 + yz; \quad \varphi(y,z) = \frac{1}{2}y^2 z + \psi(z)$$

$$f_z(x,y,z) = \arctan x + \frac{1}{2}y^2 + \psi'(z) = \frac{1}{2}y^2 + \arctan x$$

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 y + z \arctan x + \frac{1}{2}y^2 z$$

Integrale triplo.
D dominio del piano xy. L'insieme T dei punti dello spazio definito dalle condizioni

$$(x, y) \in D \qquad \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)$$

Dominio normale rispetto al piano xy

$$\int\int\int_T f(x, y, z) \mathrm{dxdydz} = \int\int_D \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z) \mathrm{dxdydz}$$

- Ipotesi di continuità delle funzioni

Sia T il dominio definito dalle limitazioni

$$(x, y) \in D \quad 0 \le z \le 1 - x - y$$

con D triangolo del piano (x, y)

$$D = \{x \ge 0,\ \ y \ge 0,\ \ x + y \le 1\},$$

calcolare

$$Vol(T) = \int\int\int_T dxdydz$$

$$\int\int\int_T dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y)dy = \int_0^1 (y - xy - \frac{1}{2}y^2)|_0^{1-x} dx =$$

$$\int_0^1 (1-x-x(1-x)-\frac{1}{2}(1-x)^2)dx = \int_0^1 (1-2x+x^2-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2})dx =$$

$$\int_0^1 (\frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}x^2)dx = \frac{1}{6}$$

Integrando la funzione $f(x,y,z) = 1$ su un cubo di spigolo unitario si ottiene

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 1\,dx\,dy\,dz = 1$$

Se abbiamo una funzione scalare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y,z) = x + y + z$$

si puo' calcolare

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (x+y+z)\ dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{1}{2} + y + z\right)\ dy\,dz =$$

$$\int_0^1 (1+z)\ dz = \frac{3}{2}$$

L'integrale di volume della funzione costante 1, fornisce il volume della regione $T \subseteq \mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{Vol}(T) = \iiint_T dx\,dy\,dz$$

Regione dello spazio racchiusa dalla sfera di centro l'origine e raggio R.
In coordinate sferiche il volume della sfera di raggio R

$$\iiint_S \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

$$\begin{aligned}\text{Volume} &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \sin\phi \, \mathrm{d}\phi \int_0^R \rho^2 \, \mathrm{d}\rho \\ &= 2\pi \frac{R^3}{3} \int_0^{\pi} \sin\phi \, \mathrm{d}\phi = \frac{2}{3}\pi R^3 \Big[-\cos\phi \Big]_0^{\pi} = \frac{4}{3}\pi R^3\end{aligned}$$

Volume dell'ellissoide
Volume della regione di spazio racchiuso da

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$u=\frac{x}{a}\quad v=\frac{y}{b}\quad w=\frac{z}{c}$$

$$x=au\quad y=vb\quad z=cw$$

Volume regione spazio contenuto nella sfera

$$\{(u,v,w): u^2+v^2+w^2=1\}$$

$$\text{Volume}=abc\iiint_T du\,dv\,dw$$

In coordinate sferiche il volume della sfera di raggio 1

$$\text{Volume}=abc\iiint_T \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi=abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\phi\,\mathrm{d}\phi\int_0^1\rho^2\,\mathrm{d}\rho$$

$$=abc2\pi\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\sin\phi\,\mathrm{d}\phi=\frac{2}{3}abc\pi\Big[-\cos\phi\Big]_0^{\pi}=\frac{4}{3}\pi abc$$

Miscellanea di esercizi con elementi di teoria

Curve in forma polare

$$\theta \in [\theta_0, \theta_1]$$

$$\begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta \\ y = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} x'(\theta) = \rho'\cos\theta - \rho\sin\theta \\ y'(\theta) = \rho'\sin\theta + \rho\cos\theta \end{cases}$$

$$(\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta)^2 + (\rho'\sin\theta + \rho\cos\theta)^2 =$$

$$(\rho')^2 + (\rho)^2$$

$$L = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}\, d\theta$$

Cardiode
Il suo nome esprime la sua forma di un cuore.

$$\rho = a(1+\cos(\theta)) \;\; \theta \in [0, 2\pi] \;\; a > 0$$

$$L = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1+\cos(\theta))^2 + a^2 \sin^2\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} a \sqrt{1+\cos(\theta)} d\theta =$$

(dalla formula di bisezione)

$$\int_0^{2\pi} 2a \left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| d\theta =$$

$$\int_0^{\pi} 4a \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = 8a \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = 8a$$

Cardioide (forma polare) Consideriamo $\rho = 1 - \cos\theta \quad \theta \in [0, 2\pi]$

$$L = \int_a^b \sqrt{[\rho(\theta)]^2 + \left[\frac{d\rho(\theta)}{d\theta}\right]^2} d\theta$$

$$L = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - cos\theta} d\theta = 2\int_0^{2\pi} \left|\sin\frac{\theta}{2}\right| d\theta = 8$$

Formula dell'area di un settore piano utilizzando le formule di Gauss Green.
Settore individuato da $\theta \in [\alpha, \beta]$ $\quad 0 \leq \rho \leq \rho(\theta)$ $\rho(\theta)$ funzione positiva e continua in $[\alpha, \beta]$.

$$\begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta \\ y = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

con $\theta \in [\alpha, \beta]$, osserviamo che al crescere di $\theta \in [\alpha, \beta]$ la curva percorsa in senso antiorario (orientamento positivo della curva).
Sia $\rho \in C^1$ a tratti, allora

$$xdy - ydx =$$

$$[(\rho(\theta)\cos\theta)(\rho'(\theta)\sin\theta + \rho(\theta)\cos\theta) - \rho\sin\theta(\rho'(\theta)\cos\theta - \rho(\theta)\sin\theta)]d\theta =$$

$$\rho^2(\theta)d\theta$$

Formula dell'area (Gauss Green)

$$m(D) = \int\int_D dxdy = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)d\theta$$

Calcolare l'area del dominio racchiuso dalla cardioide.
Applichiamo la formula

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 - cos\theta)^2 d\theta = \frac{3}{2}\pi$$

- Commento su integrale doppio.
- Esercizio. Calcolare l'area del dominio racchiuso dalla cardioide
$$\rho = 2a(1 - \cos\theta)$$
$\theta \in [0, 2\pi]$, al variare di a reale positivo.
- Esercizio. Data la porzione di cardiode con $y \geq 0$ (θ varia tra 0 e π), calcolare il volume del solido di rotazione (di 2π) intorno all'asse x .

Esercizio. Data la funzione

$$f(x,y) = xy,$$

calcolare l'integrale doppio esteso a D

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x \leq 0, \;\; y \geq 0\}$$

$$(x-1)^2 + y^2 \leq 1 \qquad y \geq 0$$

corrisponde al semicerchio chiuso di centro $(1,0)$ e raggio 1 con $y \geq 0$.
Disegnare D

Scriviamo l'insieme come insieme normale rispetto all'asse x

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2,\ \ 0 \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}\}$$

$$\int\int_D xydxdy = \int_0^2 xdx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} ydy =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^2 x(2x - x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (2x^2 - x^3)dx = \frac{1}{2}(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4|_0^2) = \frac{2}{3}$$

Esercizio. Data la funzione

$$f(x,y) = xy,$$

calcolare l'integrale doppio esteso all'insieme

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x \leq 0, \;\; y \geq 0\}$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1, \;\; y \geq 0\}$$

Cerchio chiuso di centro $(1,0)$ e raggio 1 con $y \geq 0$: trasformiamo in coordinate polari

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad 0 \leq \rho \leq 2\cos\theta$$

Nel caso in esame (semicerchio)

$$\{0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \;\; 0 \leq \rho \leq 2\cos\theta\}$$

$$\int\int_D xy dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho^3 d\rho =$$

$$\frac{2^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos^5\theta d\theta = -4\frac{1}{6}\cos^6\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

Esercizio. Data la funzione

$$f(x,y) = xy,$$

calcolare l'integrale doppio esteso all'insieme

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \ \ y \geq 0\}$$

corrisponde al semicerchio chiuso di centro $(1,0)$ e raggio 1 con $y \geq 0$

Cambiamento di coordinate

$$\begin{cases} x = 1 + \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

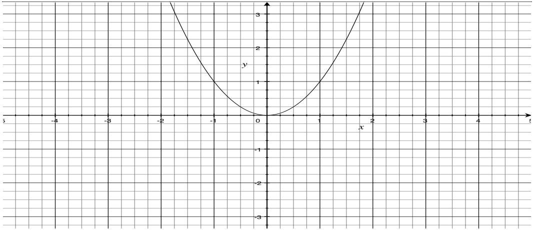
$$0 \leq \theta \leq \pi, \ \ 0 \leq \rho \leq 1$$

$$\int\int_D xydxdy = \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^1 (1+\rho\cos\theta)\rho^2 d\rho =$$

$$\int_0^1 (1+\rho\cos\theta)\rho^2 d\rho = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cos\theta$$

$$\int_0^\pi \sin\theta(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cos\theta)d\theta = -\frac{1}{3}\cos\theta|_0^\pi + \frac{1}{4}\frac{1}{2}\sin^2\theta|_0^\pi = \frac{2}{3}$$

Calcolare il volume del solido generato dalla rotazione di 2π intorno all'asse x della curva descritta dal grafico della funzione $f(x) = x^2$ per $0 \leq x \leq 1$.



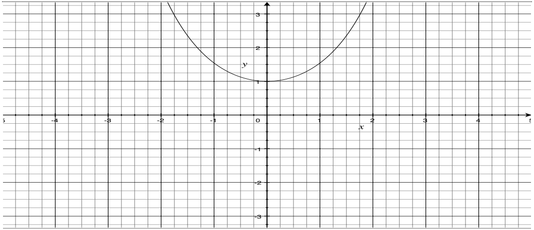
$$V = 2\pi \int \int_D y dx dy$$

Se D il rettangoloide di base $[a, b]$ determinato da una funzione f continua e non negativa.

$$V = 2\pi \int_a^b dx \int_0^{f(x)} y dy = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

$$V = \pi \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}\pi$$

Calcolare il volume del solido generato dalla rotazione 2π intorno all'asse x della curva descritta dal grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, per $0 \leq x \leq 1$



$$V = \pi \int_0^1 \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 dx =$$

$$\frac{\pi}{4}(\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + 2x)|_0^1 =$$

$$\frac{\pi}{4}(\frac{1}{2}(e^2 - e^{-2}) + 2) = \frac{\pi}{8}(e^2 - e^{-2}) + \frac{\pi}{2}$$

Disegnare l'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2y \leq 0, y \geq x\}$$

Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D x dx dy$$

Cambio in coordinate polari

$$\int\int_D x dx dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \cos\theta \int_0^{2\sin x} \rho^2 d\rho d\theta = \frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin^3\theta\cos\theta d\theta =$$

$$\frac{8}{3}\frac{1}{4}\sin^4\theta|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = -\frac{8}{3}\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = -\frac{8}{3}\frac{1}{4}\frac{4}{16} = -\frac{1}{6}$$

Calcolare l'integrale doppio della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2},$$

alla regione di piano D limitata da $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 9$.
Disegnare D

$$\int\int_D \sqrt{x^2 + y^2}dxdy = \int_0^{2\pi}\int_2^3 \rho^2 d\rho = 2\pi\frac{1}{3}\rho^3|_2^3 = \frac{38\pi}{3}$$

- Calcolare l'integrale doppio della funzione

  $$f(x,y) = x^2 + y^2,$$

  alla regione di piano D limitata da $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 9$

Sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $p > 0$. Data la funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^p}$$

valutare per quali p l'integrale della funzione nel cerchio di centro (x_0, y_0) e raggio R risulta finito.
Trasformiamo in coordinate polari e consideriamo $0 < r < R$ (faremo poi tendere r a 0^+)

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_r^R \rho^{-2p} \rho d\rho = 2\pi \int_r^R \rho^{-2p+1} d\rho =$$

$$\frac{2\pi}{-2p+2}(R^{-2p+2} - r^{-2p+2}) = \frac{\pi}{1-p}(R^{-2(p-1)} - r^{-2(p-1)})$$

per $-2p+1 \neq -1$ $p \neq 1$. Se $p = 1$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_r^R \rho^{-1} d\rho = 2\pi(\ln R - \ln r)$$

r. $p < 1$

$$\omega = \frac{1}{e^{x+y}+1}dx - \frac{e^{x+y}}{e^{x+y}+1}dy$$

La forma esatta in $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{a}$ vero $\boxed{b}$ falso

Calcolare una primitiva

$$F(x,y) = -\int \frac{e^{x+y}}{e^{x+y}+1}dy + \varphi(x)$$

$$F(x,y) = -\ln(e^{x+y}+1) + \varphi(x)$$

$$F_x(x,y) = -\frac{e^{x+y}}{e^{x+y}+1} + \varphi'(x) = \frac{1}{e^{x+y}+1}$$

$$\varphi'(x) = 1 \quad \varphi(x) = x$$

$$F(x,y) = x - \ln(e^{x+y}+1)$$

Determinare l'intervallo di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{|x-2|}{5} \right)^n$$

Posto

$$y = |x-2|,$$

si ottiene

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{y}{5} \right)^n$$

Il raggio di convergenza risulta uguale a 5. Quindi

$$|x-2| < 5, \quad -3 < x < 7$$

- Studiare il comportamento agli estremi dell'intervallo

La curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \ln t \end{cases}$$

$t \in [1, 2]$ regolare.

$\boxed{\text{a}}$ vero $\boxed{\text{b}}$ falso

Considerando uno spazio euclideo a tre dimensioni, con versori **i**, **j** e **k** relativi agli assi x, y e z, la divergenza di un campo vettoriale continuo e differenziabile

$$\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$$

la funzione scalare:

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Il laplaciano di un campo scalare la divergenza del suo gradiente:

$$\text{div}(\nabla f) = \Delta f = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Siano u e v definite in $\mathbb{C}$ appartenenti alla classe C^2 la parte reale e la parte immaginaria di una funzione complessa che soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann allora u e v verificano la condizione

$$\Delta u = 0 \quad \Delta v = 0$$

$\boxed{\text{a}}$ vero $\boxed{\text{b}}$ falso

calcolare le derivate seconde delle equazioni di Cauchy-Riemann e confrontarle, ricordando che: $u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x,$

$$\begin{cases} u_{xx} = v_{yx} \\ u_{xy} = v_{yy} \\ u_{yx} = -v_{xx} \\ u_{yy} = -v_{xy}. \end{cases}$$

Sommando la prima e l' ultima e sottraendo la seconda e la terza e utilizzando il teorema di Schwarz sull'invertibilità delle derivate parziali:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ v_{xx} + v_{yy} = 0. \end{cases}$$

Esempio

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

$$u(x,y) = e^x \cos y \qquad v(x,y) = e^x \sin y$$

- Verificare

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ v_{xx} + v_{yy} = 0. \end{cases}$$

Programma ed esercizi

Richiami sulle serie geometriche. Serie di potenze: definizione e prime proprietà. Criteri per la determinazione del raggio di convergenza. Serie di potenze ed equazione di Bessel di ordine zero. Serie di potenze: integrazione termine a termine e derivazione termine a termine.

Criterio di Cauchy
Se esiste il limite (anche $+\infty$)

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l,$$

allora

$$r = \frac{1}{l}$$

Criterio di D'Alembert
Sia $a_n \neq 0$, per ogni n. Se esiste il limite (anche $+\infty$)

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l,$$

allora

$$r = \frac{1}{l}.$$

Se $l = +\infty$ allora $r = 0$, se $l = 0$ allora $r = +\infty$

Studiare a convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{4^n + 9^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n + 9^n}{4^{n+1} + 9^{n+1}} = \frac{1}{9}$$

Il raggio di convergenza risulta uguale a 9.
$x = \pm 9$ Non risulta verificata la condizione $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Integrazione per serie
Per $a > 0$ calcoliamo

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x} d\,x = \int_0^a \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n} dx$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!(2n+1)} a^{2n+1}.$$

Introduciamo la funzione degli errori introdotta da Gauss

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} t^{2n} dt =$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(2n+1)} x^{2n+1}.$$

Serie di Taylor: resto integrale e di Lagrange, condizioni di convergenza. Funzioni analitiche in senso reale. Serie di potenze in $\mathbb{C}$. Esempi di funzioni complesse. Derivata di funzioni complesse. Condizioni di Cauchy-Riemann.
Esercizio. Scrivere la serie di Mac Laurin delle funzioni

$$\sinh x, \qquad \cosh x$$

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Polinomi trigonometrici, ortonormalità, serie di Fourier. Calcolo della serie di Fourier. Disuguaglianza di Bessel. Nucleo di Dirichlet. Teorema di convergenza puntuale. Serie di Fourier in forma complessa.

Teorema di Convergenza Puntuale

Convergenza Puntuale

Teorema Sia f una funzione periodica regolare a tratti su $\mathbb{R}$. Per ogni x reale la serie di Fourier converge alla media aritmetica tra il limite destro e il limite sinistro:

$$\frac{1}{2}\left[f(x_+) + f(x_-)\right],$$

e a $f(x)$ nei punti di continuità

Calcolo di somme di serie.

- $$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

  prolungata in modo periodico in $\mathbb{R}$.
  La serie di Fourier risulta

  $$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$$

  In $x = 0$ risulta $S = \frac{1}{2}$
  In $x = \frac{\pi}{2}$ si ottiene

  $$f(\frac{\pi}{2}) = 1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

  e

  $$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Esercizio Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} a & x \in [-\pi, 0) \\ b & x \in [0, \pi) \end{cases}$$

a$\neq b$, ripetuta per periodicità in $\mathbb{R}$

(a)

$$a_k = 0 \quad \forall k \geq 1$$

$\boxed{\text{a}}$ vero $\boxed{\text{b}}$ falso

(b) stabilire una condizione su $a, b \in \mathbb{R}$ per cui $a_k = 0, \ \forall k \geq 0$.

Funzioni di due o più variabili. Elementi di topologia in Rn. Limiti e continuità. Derivate parziali. Derivate successive. Teorema di Schwarz (dimostrazione in dimensione 2). Gradiente. Differenziabilità. Funzioni composte. Derivate direzionali. Formula di Taylor. Massimi e minimi relativi. Funzioni con gradiente nullo in un connesso (senza dimostrazione). Alcuni problemi di massimo e minimo vincolato in dimensione due.

Esercizio

Massimizzare $f(x, y) = 4xy$ soggetto al vincolo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a > 0, b > 0$$

$$x \geq 0, \qquad y \geq 0$$

Osserviamo se $x = 0$ o $y = 0$ allora $f(x, y) = 0$. Stiamo risolvendo un problema di massimizzazione: consideriamo x e y positivi.

$$\begin{cases} x(t) = a\cos(t) & t \in [0, \pi/2] \\ y(t) = b\sin(t) \end{cases}$$

$$F(t) = 4ab\cos(t)\sin(t) = 2ab\sin(2t) \quad t \in [0, \pi/2]$$

$$F'(t) = 0 \iff \cos(2t) = 0 \quad 2t = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad t_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$x_0 = x(t_0) = a\sqrt{2}/2 \qquad y_0 = y(t_0) = b\sqrt{2}/2$$

- Calcolare il massimo.

Curve e forme differenziali nel piano. Curve regolari nel piano. Lunghezza di una curva. Curve orientate. Integrale curvilineo di una funzione. Integrale curvilineo di una forma differenziale. Forme differenziali esatte. Forme differenziali chiuse. Curve e forme differenziali nello spazio.

- Fornire un esempio di forma differenziale chiusa ma non esatta.

Esercizio. Calcolare l'area della superficie generata dalla rotazione di 2π della curva $y = \sin x$, con $0 \leq x \leq \pi$ e dagli assi.

$$x = t \quad y = \sin t \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$A = 2\pi \int_0^\pi \sin t \sqrt{1 + \cos^2 t} dt =$$

$$-2\pi \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2 t} d \cos t =$$

$$-\pi(\cos t \sqrt{1 + \cos^2 t} + \ln(\cos t + \sqrt{1 + \cos^2 t})|_0^\pi =$$

$$2\pi(\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1))$$

$\boxed{\text{a}}$ vero $\boxed{\text{b}}$ falso

Forme in $\mathbb{R}^3$

$$\omega = a(x,y,z)dx + b(x,y,z)dy + c(x,y,z)dz$$

Condizione di forma chiusa

$$a_y = b_x \quad a_z = c_x \quad b_z = c_y$$

Esercizio. La forma $\omega = xzdx + xyzdy + 3z^2dz$ risulta chiusa in $\mathbb{R}^3$

$\boxed{a}$ vero $\boxed{b}$ falso

Se $F = (F_1, F_2, F_3)$ e' un campo vettoriale di classe C^1 in un aperto A di $\mathbb{R}^3$,

$$rot(F) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

Integrali doppi e tripli. Integrali su domini normali. Formule di riduzione degli integrali doppi. Formule di Gauss-Green. Teorema della divergenza. Formula di Stokes. Cambiamento di variabili negli integrali doppi. Coordinate polari, sferiche, cilindriche. Integrali tripli.
Calcolare l'integrale doppio della funzione

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2,$$

alla regione di piano D limitata da $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 25$.

$$\int\int_D (x^2 + y^2)^2 dxdy = \int_0^{2\pi} \int_1^5 \rho^5 d\rho = 2\pi \frac{1}{6}(15625 - 1) =$$

$$\frac{\pi}{3} 15624 = 5208\pi$$