ANALISI MATEMATICA I

Paola Loreti

Dipartimento di Scienze di Base, e Applicate per l'Ingegneria, Via Scarpa n.16, 00161 Roma, Italy

Indice

CAPITOLO 1

Continuazione

Vedere nota precedente

CAPITOLO 2

Richiami

1. Sulla definizione di limite

- Limiti per $x \to +\infty$ di $f(x)$ (dominio di f superiormente illimitato)

$$\forall \epsilon > 0\, \exists k > 0 : \forall x \in X, x > k \qquad |f(x) - l| < \epsilon \iff \lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

Esempio di funzione che ammette un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

$$f(x) = \arctan x \qquad \lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

La retta $y = \frac{\pi}{2}$ èper $x \to +\infty$ è un asintoto orizzontale per la funzione.

$$\forall M > 0\, \exists k > 0 : \forall x \in X, x > k \qquad f(x) > M \iff \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Esempio di funzione

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty,\ n \in \mathbb{N}$$

$$\forall M > 0\, \exists k > 0 : \forall x \in X, x > k \qquad f(x) < -M \iff \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

Ricordiamo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = +\infty,\ n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty,\ n \in \mathbb{N}$$

- Limiti per $x \to -\infty$ di $f(x)$ (dominio di f inferiormente illimitato)

$$\forall \epsilon > 0\, \exists k > 0 : \forall x \in X, x < -k \qquad |f(x) - l| < \epsilon \qquad \iff \lim_{x \to -\infty} f(x) = l.$$

Esempio di asintoto orizzontale per $x \to -\infty$

$$f(x) = \arctan x \qquad \lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

-

$$\forall M > 0\, \exists k > 0 : \forall x \in X, x < -k \qquad f(x) > M \iff \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Esempio di funzione

$$f(x) = |x|\,, \quad \lim_{x \to -\infty} |x| = +\infty$$

$$\forall M > 0\, \exists k > 0 : \forall x \in X, x < -k \qquad f(x) < -M \iff \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$f(x) = x^3 \qquad \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty.$$

Rispetto alle successioni, il concetto di limite per $x \to x_0$ di $f(x)$ è nuovo. Per avvicinarci a x_0 da punti x dobbiamo assumere x_0 punto di accumulazione per il dominio di f (ossia che in un qualunque intorno di x cadano infiniti punti del dominio di f da cui ci possiamo avvicinare)

- Si ha

$$\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \forall x \in X,\ 0 < |x - x_0| < \delta \qquad |f(x) - l| < \epsilon \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

-

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X, 0 < |x - x_0| < \delta \qquad f(x) > M \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

-

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X, 0 < |x - x_0| < \delta \qquad f(x) < -M \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

- Limite destro

$$\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \forall x \in X,\ 0 < x - x_0 < \delta \qquad |f(x) - l| < \epsilon \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$$

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X, 0 < x - x_0 < \delta \qquad f(x) > M \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$$

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X, 0 < x - x_0 < \delta \qquad f(x) < -M \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$$

- Limite sinistro

$$\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \forall x \in X,\ -\delta < x - x_0 < 0 \qquad |f(x) - l| < \epsilon \iff \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$$

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X, -\delta < x - x_0 < 0 \qquad f(x) > M \iff \lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$$

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X, -\delta < x - x_0 < 0 \qquad f(x) < -M \iff \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$$

Se la funzione ammette limite allora

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

e viceversa. Per funzioni che non sono definite rispettivamente a sinistra o a destra di x_0 si può passare al limite solo da una direzione. Si distingue talvolta il limite sinistro dal limite destro.

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

Caso di non esistenza di limite per $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Non esistono i seguenti limiti

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}, \qquad \lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}}, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \sin x, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \cos x.$$

2. Simbolo di Landau: o piccolo

Il simbolo *o piccolo* $o(x)$ significa

$$\lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x} = 0.$$

Valgono le seguenti proprietà

- $$o(x^n) + o(x^n) = o(x^n)$$

  Perchè
  $$\lim_{x\to 0} \frac{o(x^n) + o(x^n)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x^n)}{x^n} + \lim_{x\to 0} \frac{o(x^n)}{x^n} = 0.$$

- $$o(x^n) - o(x^n) = o(x^n)$$

  Perchè
  $$\lim_{x\to 0} \frac{o(x^n) - o(x^n)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x^n)}{x^n} + \lim_{x\to 0} \frac{-o(x^n)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x^n)}{x^n} + \lim_{x\to 0} \frac{o(x^n)}{x^n} = 0$$

- $$co(x^n) = o(cx^n) = o(x^n),\ c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

  Perchè
  $$c \lim_{x\to 0} \frac{o(x^n)}{x^n} = 0.$$
  Perchè
  $$\lim_{x\to 0} \frac{o(cx^n)}{x^n} = 0.$$

- $$o(x^n)o(x^m) = o(x^{n+m})$$

  Perchè
  $$\lim_{x\to 0} \frac{o(x^n)o(x^m)}{x^{n+m}} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x^n)}{x^n} \lim_{x\to 0} \frac{o(x^m)}{x^m} = 0$$

- $$o(o(x^n)) = o(x^n)$$

  Perchè
  $$\lim_{x\to 0} \frac{o(o(x^n))}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{o(o(x^n))}{o(x^n)} \frac{o(x^n)}{x^n} = 0.$$

2.1. Alcuni Limiti.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \sin x = x + o(x)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \qquad \lim_{x\to -\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^b} = 0 \quad b > 0 \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^b}{e^x} = 0 \quad b > 0$$

CAPITOLO 3

Continuità e Derivabilità

1. Continuità

Sia dato un punto x_0 nell'insieme di definizione di una funzione f, con x_0 punto di accumulazione per il dominio di f.
f si dice continua in x_0 se il suo limite per $\to x_0$ coincide con il suo valore in $f(x_0)$, ovvero con $f(x_0)$. In simboli:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

cioè l'operazione di limite in x_0 commuta con la funzione f

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x).$$

Posto $h = x - x_0$, anche

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0),$$

e

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + o(1) \qquad \text{per} h \to 0$$

ove

$$\lim_{h \to 0} o(1) = 0.$$

Se x_0 è isolato nel dominio di f, allora f risulta continua in x_0.

2. Minimo e massimo assoluti per funzioni continue

Data $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ il minimo m e il massimo (assoluti) M di f, se esistono, sono valori del codominio di f, verificanti

$$f(x) \geq m \qquad f(x) \leq M, \qquad \forall x \in [a, b]$$

Teorema 2.1. Teorema di Weierstrass *Una funzione continua su un insieme chiuso e limitato assume il massimo e il minimo assoluti.*

Il punto di minimo e di massimo assoluti della funzione di una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato sono da cercare o negli estremi dell'intervallo $\{a\}$ e $\{b\}$ o nell'interno dell'intervallo (a, b).

3. Teorema degli zeri

Teorema 3.1. *Una funzione continua su un insieme chiuso e limitato* $[a, b]$ *tale* $f(a)f(b) < 0$ *ammette almeno un punto interno* x_0 *a* $[a, b]$ *in cui* $f(x_0) = 0$.

4. Il teorema dei valori intermedi

Vale il teorema dei valori intermedi.

Teorema 4.1. *Una funzione continua su un insieme chiuso e limitato assume tutti i valori compresi tra il minimo m e il massimo assoluti M.*

Dimostrazione. Sia $p \in [m.M]$, Se p vale m o M il teorema è dimostrato. Prendiamo $p \in (m, M)$. Sia x_m e x_M tale che

$$f(x_m) = m \qquad f(x_M) = M$$

Allora

$$F(x) = f(x) - p,$$

è una funzione continua su un insieme chiuso e limitato, che vale

$$F(x_m) = f(x_m) - p < 0,$$

$$F(x_M) = f(x_M) - p > 0,$$

si ha che esiste (teorema degli zeri) un punto ξ per cui

$$F(\xi) = f(\xi) - p = 0,$$

ossia

$$f(\xi) = p$$

□

CAPITOLO 4

Derivate

1. Rapporti incrementali.

Sia $x \in I(f)$, sia Δx un incremento positivo, tale che $x + \Delta x$ sia ancora in $I(f)$, consideriamo

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- $$f(x) = c \qquad \frac{\Delta f}{\Delta x} = 0.$$
- $$f(x) = x \qquad \frac{\Delta f}{\Delta x} = 1.$$
- $$f(x) = x^2 \qquad \frac{\Delta f}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$
- $$f(x) = x^3 \qquad \frac{\Delta f}{\Delta x} = 3x^2 + (\Delta x)^2 + 3x\Delta x.$$
- $$f(x) = x^n \qquad \frac{\Delta f}{\Delta x} =$$

$$\frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x - x)}{\Delta x}(x+\Delta x)^{n-1}+x(x+\Delta x)^{n-2}+\ldots x^{n-2}(x+\Delta x)+(x)^{n-1}$$

- $$f(x) = e^x \qquad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$
- $$f(x) = \log x \qquad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\log(x + \Delta x) - \log x}{\Delta x} = \log(1 + \frac{1}{x}\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}$$
- $$f(x) = \sin x \qquad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2\cos(x + \frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$
- $$f(x) = \cos x \qquad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \frac{-2\sin(x + \frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

1.1. Derivata. Data una funzione f definita in un intorno di x_0, diciamo $I(f)$, f si dice derivabile nel punto x_0 se esiste ed è finito il limite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Seguendo la notazione di Lagrange il valore del limite si indica con $f'(x_0)$ e si chiama derivata prima della funzione in x_0. Sia $x\in I(f)$, sia Δx un incremento positivo, tale che $x+\Delta x$ sia ancora in $I(f)$, consideriamo

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Se esiste ed è finito il limite

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

f si dice derivabile in x_0 e il valore del limite si indica con $f'(x_0)$.

Le due condizioni sono equivalenti.

Con la notazione *o piccolo*

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)h+o(h),\ h\to 0$$

Se la funzione $f(x)$ è derivabile in ogni punto di un dato intervallo (a,b), allora si dice che essa derivabile in (a,b), e la funzione $f'(x)$ che associa ad ogni punto x la derivata di f in x è la funzione derivata di f. Possiamo pensare la derivata come un operatore che associa, in ipotesi di esistenza, ad una funzione la sua derivata.

Osserviamo che

- $$f(x)=c \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=0.$$
- $$f(x)=x \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=1.$$
- $$f(x)=x^2 \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=2x+\Delta x=2x$$
- $$f(x)=x^3 \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=3x^2+(\Delta x)^2+3x\Delta x=3x^2$$
- $$f(x)=x^n \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}=$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x-x)}{\Delta x}(x+\Delta x)^{n-1}+x(x+\Delta x)^{n-2}+\dots x^{n-2}(x+\Delta x)+(x)^{n-1}=nx^{n-1}$$
- $$f(x)=e^x \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^x(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x}=e^x$$
- $$f(x)=\log x \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{\log(x+\Delta x)-\log x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\log(1+\frac{1}{x}\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}=\frac{1}{x}$$

- $$f(x) = \sin x \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos x$$
- $$f(x) = \cos x \qquad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin(x + \frac{\Delta x}{2}) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = -\sin x$$

La derivata è un operatore lineare, cioè la derivata di una combinazione lineare di funzioni derivabili è la combinazione lineare delle derivate delle singole funzioni, e la derivata del prodotto di uno scalare per una funzione il prodotto dello scalare per la derivata della funzione:
$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$
$$(cf(x))' = cf'(x)$$

Dimostrazione. Dimostriamo l'asserto per $x = x_0$. Infatti se f e g sono derivabili in x_0, per $h \to 0$
$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + o(h) \qquad g(x_0 + h) - g(x_0) = g'(x_0)h + o(h)$$
Dunque
$$f(x_0 + h) + g(x_0 + h) - (f(x_0) + g(x_0)) = f'(x_0)h + g'(x_0)h + o(h) + o(h) =$$
$$f'(x_0)h + g'(x_0)h + o(h).$$
Da cui $f + g$ è derivabile in x_0 e vale l'asserto. Inoltre
$$cf(x_0 + h) - cf(x_0) = cf'(x_0)h + co(h) = cf'(x_0)h + o(h).$$
Da cui cf è derivabile in x_0 e vale l'asserto. □

Geometricamente la derivata di una funzione f in un punto x_0 è il valore del coefficiente angolare, cioè la tangente trigonometrica dell'angolo formato dalla retta tangente un punto della curva di equazione $y = f(x)$ e il semiasse positivo delle x. Valgono le regole di derivazione
$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$
$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

Dimostrazione. Dimostrare per esercizio □

2. La derivata e la formula di Eulero

Ricordiamo la formula di Eulero $\rho = \lambda + i\theta$ $\lambda, \theta \in \mathbb{R}$

$$e^{\rho} = e^{\lambda + i\theta} = e^{\lambda}\big(\cos\theta + i\sin\theta\big),$$

per $x \in \mathbb{R}$

$$e^{(\lambda+i\theta)x} = e^{\lambda x}\big(\cos\theta x + i\sin\theta x\big),$$

Calcoliamo la derivata rispetto a x

$$D(e^{\lambda x}\cos\theta x) = e^{\lambda x}\big(\lambda\cos\theta x - \theta\sin\theta x\big)$$

e anche

$$D(e^{\lambda x}\sin\theta x) = e^{\lambda x}\big(\lambda\sin\theta x + \theta\cos\theta x\big)$$

Mettendo insieme

$$D(e^{(\lambda+i\theta)x}) = D\big(e^{\lambda x}\big(\cos\theta x + i\sin\theta x\big)\big) =$$

$$D\big(e^{\lambda x}\cos\theta x\big) + iD\big(e^{\lambda x}\sin\theta x\big) =$$

$$e^{\lambda x}\big(\lambda\cos\theta x - \theta\sin\theta x + i\lambda\sin\theta x + i\theta\cos\theta x\big)$$

$$(\lambda + i\theta)e^{\lambda x}\big(\cos\theta x + i\sin\theta x\big) =$$

$$(\lambda + i\theta)e^{\lambda x}e^{i\theta x} = (\lambda + i\theta)e^{(\lambda+i\theta)x}.$$

La formula generalizza in $\mathbb{C}$ la notevole proprietà in $\mathbb{R}$, e dimostra (verficare per induzione) che

$$D^n e^{\rho x} = \rho^n e^{\rho x} \qquad \rho \in \mathbb{C}$$

3. Minimi e massimi interni per funzioni derivabili:Teorema di Fermat

Nello studio di funzione ha interesse definire i minimi e massimi relativi. Sono punti di minimo e massimo in cui la disuguaglianza è verificata in un intorno del punto e potrebbe non essere verificata in tutto l'intervallo Data $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ il minimo relativo m e il massimo relativo M di f, se esistono, sono valori del codominio di f, verificanti

$$\exists r > 0 : f(x) \geq m \qquad f(x) \leq M, \qquad \forall x \in I_r(x) \subset [a,b],$$

ove $I_r(x)$ è un intorno di x di ampiezza $2r$. Si cercano massimi e minimi relativi in insiemi aperti. Data $f : I = (a,b) \to \mathbb{R}$ il minimo m e il massimo M relativo di f, se esistono, sono valori del codominio di f, verificanti per r positivo e sufficientemente piccolo

$$f(x) \geq m \qquad \forall x \in \{|x - x_0| < r\} \cap (a,b),\ f(x_0) = m$$

$$f(x) \leq M \qquad \forall x \in \{|x - x_1| < r\} \cap (a,b),\ f(x_1) = M$$

Teorema 3.1. Teorema di Fermat *Sia f una funzione derivabile in (a,b) e sia $x_0 \in (a,b)$ punto di massimo o di minimo relativo interno. Allora esiste $x_0 \in (a,b)$ tale che $f'(x_0) = 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che x_0 sia un punto di massimo relativo interno all'intervallo. Per h piccolo si ha

$$f(x_0 + h) \geq f(x_0).$$

Pertanto per h piccolo

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \qquad h > 0, \qquad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \qquad h < 0$$

Per la derivabilità di f si avrà $f'(x_0) = 0$. □

4. Teorema di Rolle e Lagrange

Teorema 4.1. Teorema di Rolle *Sia f una funzione continua in $[a, b]$, derivabile in (a, b) e sia $f(a) = f(b)$. Allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Il punto in cui è assunto massimo e il punto in cui è assunto il minimo potrebbero trovarsi negli estremi. Dall'ipotesi $m = M$ segue che la funzione è costante. Altrimenti almeno uno dei due è interno e l'asserto segue dal teorema di Fermat.

□

Teorema 4.2. Teorema di Lagrange *Sia f una funzione continua in $[a, b]$, derivabile in (a, b). Allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che*

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)$$

.

DIMOSTRAZIONE. Si introduce la funzione ausiliaria

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

La funzione g è una funzione continua in $[a, b]$, e derivabile in (a, b). Inoltre $g(a) = g(b)$. Applicando il teorema di Rolle esisterà un punto x_0 tale che

$$g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

da cui l'asserto

□

5. Monotonia: crescenza e descrescenza

Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ diciamo che

- f è crescente $\iff$ $f(x_1) \leq f(x_2)$ $x_1 < x_2,\ x_1, x_2 \in I$
- f è strettamente crescente $\iff$ $f(x_1) < f(x_2)$ $x_1 < x_2,\ x_1, x_2 \in I$
- f è decrescente $\iff$ $f(x_1) \geq f(x_2)$ $x_1 < x_2,\ x_1, x_2 \in I$
- f è strettamente decrescente $\iff$ $f(x_1) > f(x_2)$ $x_1 < x_2,\ x_1, x_2 \in I$

$f(x) = \lfloor x \rfloor$ è crescente $f(x) = x$ è strettamente crescente, $f(x) = e^x$ è strettamente crescente per ogni x reale, $f(x) = e^{-x}$è strettamente decrescente per ogni x reale, $f(x) = x^2$ è strettamente crescente per $x \geq 0$ è strettamente decrescente $x \leq 0$; in $x = 0$ la funzione cambia la monotonia:

$x = 0$ è un punto critico o stazionario, cambiando da descrescente per valori più piccoli a crescente per valori più grande il punto è di minimo relativo.

Sussiste il seguente teorema di monotonia

Teorema 5.1. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile in I con $f'(x) > 0 \forall x \in I$ allora f è strettamente crescente. Se f è strettamente crescente e derivabile in I allora $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in I$*

Dimostrazione.

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + o(1) \qquad \text{per} h \to 0$$

Si ha

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0$$

per h piccolo. Inoltre

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0 \qquad h > 0,$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} < 0 \qquad h < 0$$

Ossia

$$h > 0,\ x + h > x,\ f(x+h) > f(x)$$

$$h < 0,\ x + h < x,\ f(x+h) < f(x),$$

la funzione è strettamente crescente. Dimostare l'altra implicazione come esercizio. Osserviamo che la funzione $f(x) = x^3$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$ ma in $x = 0$ la sua derivata prima vale 0. □

Analogo risultato per gli altri casi.

6. Primitive

Definizione 6.1. *Una funzione F è una primitativa di una funzione f continua in $[a, b]$ se F è derivabile $F'(x) = f(x)$ in $[a, b]$.*

La caratterizzazione delle funzioni primitive assume allora un ruolo fondamentale. Data una funzione primitiva di f ne esistono altre che non siano un'addizione di F con una qualisiasi constante? Osserviamo che mentre dire che se F è primitiva di f, allora $F + c$ è ancora primitiva è una conseguenza banale del fatto che la derivata di una constante è zero, non è banale dire che tutte le funzioni primitive sono fatte cosi'.

Teorema 6.2. *Se F e G sono due primitive di f in $[a, b]$ allora $F = G + c$.*

La dimostrazione si basa su una conseguenza del teorema di Lagrange

Teorema 6.3. *Se f ha derivata nulla in (a, b) allora f è una costante.*

Utilizzando questo risultato se F e G sono due primitive di f in $[a, b]$ allora $(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$ allora $(F - G)(x) = c$ e $F = G + c$.

7. Concavità e Convessità

Definizione 7.1. *C è un insieme convesso $\iff$ $x, y \in C$ implica $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$ con $\lambda \in [0,1]$.*

I segmenti (a, b), le semirette $(-\infty, b)$ e $(a, +\infty)$ sono sottoinsiemi aperti e convessi di $\mathbb{R}$.

Definizione 7.2. *Sia C un insieme convesso di $\mathbb{R}$. Una funzione $f : C \to \mathbb{R}$ è convessa se*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \quad \forall x, y \in C, \lambda \in [0,1].$$

$f : C \to \mathbb{R}$ è concava se $-f$ è convessa.

Teorema 7.3. *Disuguaglianza discreta di Jensen Sia C convesso. Sia $p \in \mathbb{N}$, $f : C \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Allora per ogni sottoinsieme $\{x_1, \ldots, x_p\} \subset C$, dove $\lambda_i \geq 0$, $1 \leq i \leq p$ e $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$, si ha*

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \in C,$$

e

$$f(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i f(x_i).$$

Analogo risultato vale per le funzioni concave

Teorema 7.4. *Sia C convesso. Sia $p \in \mathbb{N}$, $f : C \to \mathbb{R}$ una funzione concava. Allora per ogni sottoinsieme $\{x_1, \ldots, x_p\} \subset C$, dove $\lambda_i \geq 0$, $1 \leq i \leq p$ e $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$, si ha*

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \in C,$$

e

$$f(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i) \geq \sum_{i=1}^p \lambda_i f(x_i).$$

Come applicazione del risultato prendiamo $f(x) = \ln x$, e $\lambda_i = \frac{1}{p}$, per $i = 1, \ldots, p$, $x_i > 0$ per $i = 1, \ldots, p$

$$\ln(\frac{1}{p}\sum_{i=1}^p x_i) \geq \frac{1}{p}\sum_{i=1}^p \ln x_i,$$

ossia

$$\ln(\frac{1}{p}\sum_{i=1}^p x_i) \geq \ln(\prod_{i=1}^p x_i)^{\frac{1}{p}},$$

e,

$$e^{\ln(\frac{1}{p}\sum_{i=1}^p x_i) \geq e^{\ln(\prod_{i=1}^p x_i)^{\frac{1}{p}}}},$$

che fornisce la disuguaglianza tra la media aritmetica e geometrica

$$\frac{1}{p}\sum_{i=1}^p x_i \geq (\prod_{i=1}^p x_i)^{\frac{1}{p}},$$

Teorema 7.5. *Caratterizzazione C^1. Sia I un aperto convesso. f una funzione derivabile in I. Allora*

- *f è convessa in I* $\iff f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\ \forall x, x_0 \in I$

Teorema 7.6. *Caratterizzazione C^2. Sia I un aperto convesso. f una funzione derivabile due volte in I. Allora*

- *f è convessa in I* $\iff f''(x) \geq 0\ \forall x \in I$

Esempi di funzioni convesse sono

$$f(x) = x^2,$$

$$f(x) = e^x$$

Esempi di funzioni concave sono

$$f(x) = -x^2,$$

$$f(x) = \ln x$$

8. Teorema di De l'Hopital

La regola di de l'Hopital è un procedimento che permette di calcolare limiti di quozienti di funzioni reali di variabile reale che danno luogo alle forme indeterminate

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty}.$$

Ricordiamo le forme indeterminate riconducibile alle precedenti

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty \lim_{x\to x_0} f(x)g(x) \qquad \boxed{0 \cdot \infty}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{1/g(x)} = \frac{g(x)}{1/fg(x)}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty \lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} \qquad \boxed{1^\infty}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{\frac{\ln f(x)}{1/g(x)}}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} \qquad \boxed{0^0}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{\frac{\ln f(x)}{1/g(x)}}$$

Siano f e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b), sia $g(x)$, $g'(x)$ e diverse da 0 in ogni punto di tale intervallo, tranne al più in $x_0 \in (a, b)$. Sia inoltre

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

Se esiste

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

- $$\lim_{x\to 1} x^{\frac{10}{1-x}}.$$

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{10}{1-x}} = \lim_{x\to 1} e^{\log x^{\frac{10}{1-x}}}$$

Possiamo allora calcolare il limite per $x \to 1$

$$\frac{10}{1-x}\log x$$

Quindi applicando de l'Hopital, il valore del limite è e^{-10}.

9. Preliminari

Si osservi

$$D^k(x-x_0)^n = \begin{cases} n(n-1)(n-2)....(n-k+1)(x-x_0)^{n-k} & k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases}$$

Si ha

$$D^k \sum_{i=0}^{n} a_i(x-x_0)^i = \sum_{i=k}^{n} i(i-1)(i-2)....(i-k+1)a_i(x-x_0)^{i-k}$$

10. La formula di Taylor

Data f derivabile n volte, fissato x_0 ci poniamo il problema dell'esistenza di un polinomio di grado non superiore a n

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x-x_0)^i,$$

che abbia la proprietà

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

Premettiamo alla dimostrazione il seguente
Lemma

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \iff$$

$$\begin{cases} f(x_0)-P_n(x_0)=0, \\ f'(x_0)-P_n'(x_0)=0, \\ .... \\ .... \\ f^n(x_0)-P_n^n(x_0)=0, \end{cases}$$

Dimostrazione. Supponiamo che valga

$$\begin{cases} f(x_0)-P_n(x_0)=0, \\ f'(x_0)-P_n'(x_0)=0, \\ .... \\ .... \\ f^n(x_0)-P_n^n(x_0)=0, \end{cases}$$

allora, applicando ripetutamente il teorema di De l'Hopital, si ha

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-P_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=.....=\frac{f^n(x_0)-P_n^n(x_0)}{n!}=0$$

Viceversa, supponiamo ora

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n}=0,$$

e che per assurdo

$$f^k(x_0)-P_n^k(x_0)\neq 0,$$

per qualche $k\leq n$.

Applicando ripetutamente il teorema di De l'Hopital, si ha

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^k}=\frac{f^k(x_0)-P_n^k(x_0)}{k!}\neq 0$$

Ma

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^k}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n}(x-x_0)^{n-k}=0,$$

una contraddizione.

Dopo aver dimostrato il lemma, per trovare il polinomio imponiamo

$$f^k(x_0)-\sum_{i=k}^{n}i(i-1)(i-2)....(i-k+1)a_i(x-x_0)^{i-k}=0\ \ k=0,..n$$

In $x=x_0$ si annullano tutti i termini eccetto il termine corrispondente a $i=k$

$$f^k(x_0)-k!a_k=0\ \ k=0,...,n$$

ossia

$$a_k=\frac{f^k(x_0)}{k!},\ \ k=0,...,n$$

e

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^i(x_0)}{i!}(x-x_0)^i,$$

Vale

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n}=0,$$

ossia

$$f(x)-P_n(x)=o((x-x_0)^n)\qquad \text{per } x\to x_0$$

Il polinomio di Taylor risponde al problema di approssimare una funzione con un polinomio.

Per le funzioni $\sin x$ e $\cos x$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4),\quad x\to 0$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3),\quad x\to 0$$

10.1. Osservazione. Per studiare i massimi e i minimi relativi possiamo guardare il segno della derivata seconda. Infatti se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$ dalla formula

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2),$$

dunque se $f'(x_0) = 0$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2) > 0,$$

per x sufficientemente vicino a x_0 e $f(x) - f(x_0) \geq 0$ ossia localmente $f(x) \geq f(x_0)$, e x_0 è un punto di minimo relativo.

11. Serie di Taylor

In generale non è valido un risultato di convergenza della serie alla funzione f, anche se la funzione è derivabile infinite volte. Ad esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

è derivabile infinite volte in $x = 0$, e la sua serie di Taylor in $x = 0$ (Serie di Mac Laurin) è la funzione identicamente nulla.

12. Lo sviluppo di Mac Laurin

Data f derivabile n volte, Il polinomio di Mac Laurin è dato da

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(0)}{k!} x^k$$

Vale

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n)$$

12.1. Sviluppo di e^x. Dimostrare per induzione che

$$D^n e^x = e^x.$$

Osserviamo che

$$D^n e^x \Big]_{x=0} = 1$$

Allora

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + o(x^n)$$

12.2. Sviluppo di $\sin x$. Dimostrare per induzione che

$$D^n \sin x = \sin\big(x + n\frac{\pi}{2}\big).$$

Osserviamo che

$$D^n \sin x\Big]_{x=0} = \sin\big(n\frac{\pi}{2}\big).$$

Allora

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

12.3. Sviluppo di $\cos x$. Dimostrare per induzione che

$$D^n \cos x = \cos\big(x + n\frac{\pi}{2}\big).$$

Osserviamo che

$$D^n \cos x\Big]_{x=0} = \cos\big(n\frac{\pi}{2}\big).$$

Allora

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1})$$

12.4. Sviluppo di $\log(1+x)$. Dimostrare per induzione che

$$D^n \log(1+x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(1+x)^n}$$

Si ha

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{k!} \left[\frac{1}{(1+x)^n}\right]_{x=0} x^k + o(x^n)$$

Allora

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} x^k + o(x^n)$$

12.5. Serie. Vale pe ogni $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

12.6. Dimostrazione della formula di Eulero. Per $z \in \mathbb{C}$, si ha

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Poichè $z = x + iy$ si ha

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!} =$$

$$e^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Osserviamo che le potenze dell'unità immaginaria i si ripetono periodicamente (sono cicliche con periodo 4):

$$i^0 = 1 \; i^1 = i \; i^2 = -1 \; i^3 = -i$$

Per $|x| < 1$, vale

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} x^k.$$

La convergenza si può estendere al caso $x = 1$ (teorema di Abel) e vale

$$\log 2 = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}.$$

13. Esercizi

Esercizio 13.1. *Data* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *$I$ non vuoto, x_0 punto di accumulazione per I.*

(i) *Dare la definizione di* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$
(ii) *Dare la definizione di* $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.
(iii) *Fare un esempio di una funzione f tale che* $\lim_{x \to 1} f(x)$ *non esiste.*

Sia $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. *Allora*

$\boxed{a}$ $\lim_{x \to +\infty} \sin(f(x)) = 0$ $\boxed{b}$ $\lim_{x \to +\infty} f(\sin(x)) = 0$

$\boxed{c}$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$

Esercizio 13.2. (i) *Dare la definizione di derivabilità per $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in x_0*

(ii) *Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = x^2$ in $x_0 = 1$.*

(iii) *Dare la definizione di derivabilità parziale rispetto alla variabile x per $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in (x_0, y_0)*
(iv) *Calcolare la derivabilità parziale rispetto alla variabile x di* $f(x, y) = \arctan xy$

r. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è derivabile in x_0 se esiste finito

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$y-1=2(x-1)\qquad y=2x-1$$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è derivabile parzialmente in (x_0,y_0) se esiste finito

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

$$\frac{y}{1+x^2y^2}$$

Esercizio 13.3. *Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é derivabile allora*

$\boxed{a}$ *f potrebbe non essere continua* $\boxed{b}$ *f^2 é derivabile* $\boxed{c}$ *$|f|$ é derivabile*

r. (a) Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é derivabile allora f è continua. (b) f^2 é derivabile (prodotto di due funzioni derivabili) (c) x, $|x|$ (non derivabile in $x=0$). La risposta è b.

Esercizio 13.4. *Data*

$$f(x)=1-x^{\frac{1}{x}}$$

il punto di minimo di f

$\boxed{a}$ *non esiste* $\boxed{b}$ $x_{min}=1/e$

$\boxed{c}$ $x_{min}=e$; $\boxed{d}$ $x_{min}=1$

Esercizio 13.5. *Data la funzione*

$$f(x)=\ln x+\ln(x-1)-\frac{1}{x}$$

(i) *Determinare l'insieme di definizione*
(ii) *Studiare i limiti agli estremi dell'insieme di definizione*
(ii) *Calcolare la derivata prima.*

14. Applicazione per la classificazione dei punti critici

Sia f una funzione derivabile n volte, e x_0 un punto tale che

$$f'(x_0)=0$$

Se

$$f''(x_0)\begin{cases} >0,\ \text{punto di minimo}\\ <0\ \text{punto di massimo}\\ =0\begin{cases} f'''(x_0)\neq 0,\ \text{punto è di flesso}\\ f'''(x_0)=0\begin{cases} f^{(iv)}\begin{cases} >0\ \text{punto di minimo}\\ <0\ \text{punto di massimo}\\ =0.....\end{cases}\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

Dimostrare come esercizio utilizzando la formula di Taylor.

CAPITOLO 5

Studio di funzioni

1. Studio di funzioni

(1) Insieme di definizione.
(2) Insieme dei punti singolari interni all'insieme di definizione..
(3) Studio del segno
(4) Comportamento asintotico di f.
(5) Insieme di derivabilità di f e calcolo della $f'(x)$.
(6) Studio dell'insieme ove la funzione f non è derivabile (punti angolosi, cuspidi).
(7) Intervalli di monotonia.
(8) Insieme ove la funzione è derivabile due volte e ivi calcolo della $f''(x)$.
(9) Convessità e concavità.
(10) I punti di massimo relativo, minimo relativo e i flessi.
(11) Estremo superiore ed inferiore dei valori assunti dalla f, specificando se si tratta di massimo o minimo.
(12) tracciare il grafico

2. Grafici di funzioni elementari

FIGURA 1. Grafico di $f(x) = \sin x$ $f(x) = \sin 2x$ $f(x) = \sin(\frac{1}{2}x)$

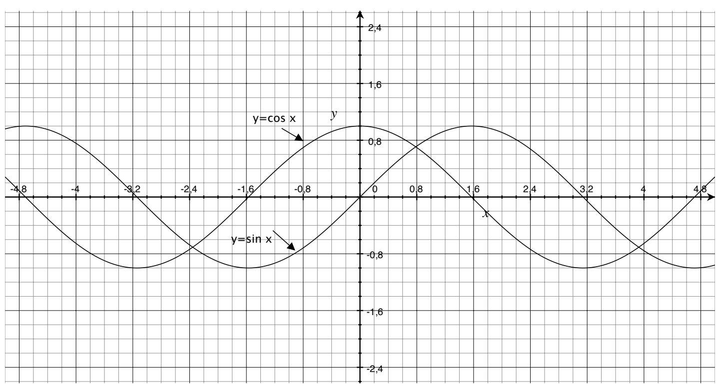


FIGURA 2. Grafico di $f(x) = \sin x$, grafico di $f(x) = \cos x$

Calcolare
$$\int_0^{2\pi} |\cos x - \sin x| dx.$$

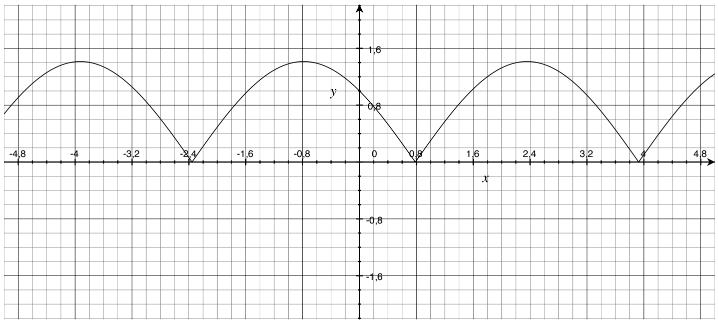


FIGURA 3. Grafico di $f(x) = |\cos x - \sin x|$

3. La funzione esponenziale

$$f(x) = e^x$$

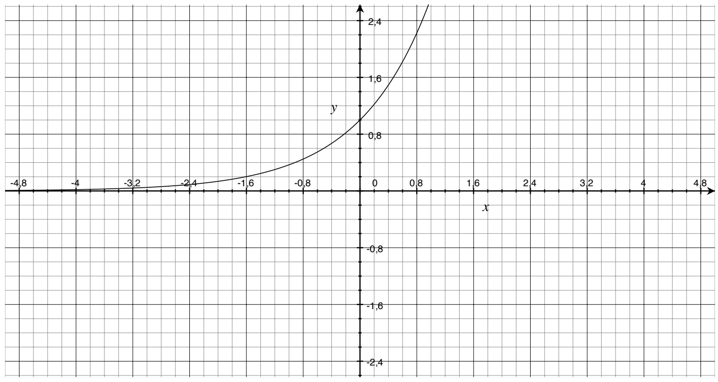


FIGURA 4. Grafico di $f(x) = e^x$.

(1) Insieme di definizione. $\mathbb{R}$.
(2) Insieme dei punti singolari. $\{\emptyset\}$
(3) Studio del segno. Sempre positiva
(4) Comportamento asintotico di f. $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
(5) Insieme di derivabilità di f e calcolo della $f'(x)$. $\mathbb{R}$, $\quad f'(x) = e^x$
(6) Studio dell'insieme ove la funzione f non è derivabile (punti angolosi, cuspidi). $\{\emptyset\}$
(7) Intervalli di monotonia. $f'(x) > 0$ in $\mathbb{R}$ da cui si evince che la funzione è crescente.
(8) Insieme ove la funzione è derivabile due volte e ivi calcolo della $f''(x)$. $\mathbb{R}$, $\qquad f''(x) = e^x$
(9) $f''(x) > 0$ in $\mathbb{R}$, da cui si evince che l'intervallo di convessità è $\mathbb{R}$
(10) I punti di massimo, minimo relativo e i flessi. $\{\emptyset\}$
(11) Estremo superiore ed inferiore dei valori assunti dalla f, specificando se si tratta di massimi o minimi. $\inf_{\mathbb{R}} f(x) = 0, \quad \sup_{\mathbb{R}} f(x) = +\infty$.

4. La Funzione logaritmo

$$f(x) = \ln x$$

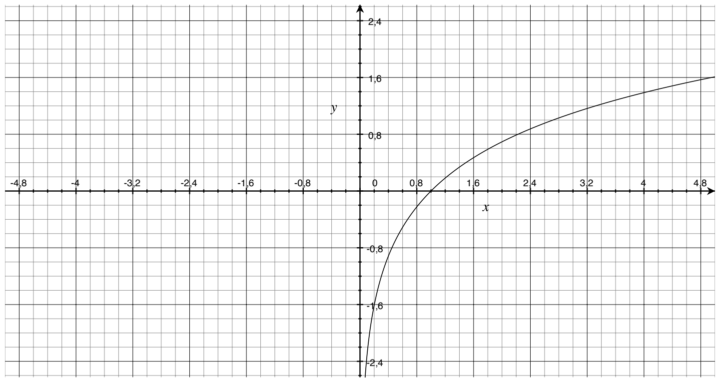


FIGURA 5. Grafico di $f(x) = \ln x$.

(1) Insieme di definizione. $(0, +\infty)$.
(2) Studio del segno. Positiva per $x > 1$
(3) Comportamento asintotico di f.

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

(4)

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

(5) Insieme di derivabilità di f e calcolo della $f'(x)$ $\mathbb{R}$ $\quad f'(x) = \frac{1}{x}$
(6) Studio dell'insieme ove la funzione f non è derivabile (punti angolosi, cuspidi). $\{\emptyset\}$
(7) Intervalli di monotonia. $f'(x) > 0$ in $\mathbb{R}$ da cui si evince che la funzione è sempre crescente.
(8) Insieme ove la funzione è derivabile due volte e ivi calcolo della $f''(x)$. $(0, \infty)$, $\qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$
(9) I punti di massimo, minimo relativo e i flessi. $\{\emptyset\}$
(10) Convessità e di concavità. $f''(x) < 0$ in $(0, \infty)$, da cui si evince che l'intervallo di concavità è $(0, \infty)$
(11)

$$\inf f(x) = -\infty, \qquad \sup f(x) = +\infty.$$

5. La funzione seno cardinale

La funzione sinc normalizzata è cosi definita

$$\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} & x \neq 0, \\ 1 & x = 0, \end{cases} \tag{1}$$

la funzione sinc non-normalizzata,

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \neq 0, \\ 1 & x = 0, \end{cases} \tag{2}$$

La funzione sinc non-normalizzata assume il valore zero per multipli, non

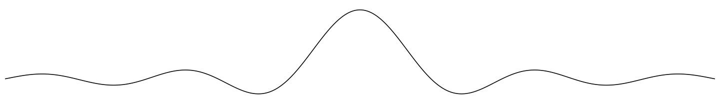


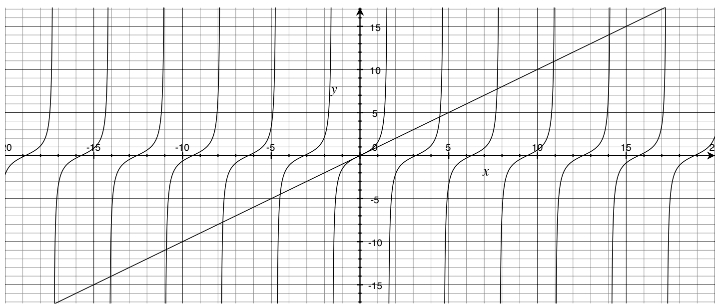
FIGURA 6. Grafico di $f(x) = \text{sinc}x$ normalizzata

nulli, di π; quella normalizzata per valori interi, sempre diversi da zero. Ci occupiamo d'ora in poi della funzione sinc non normalizzata La funzione sinc è continua e

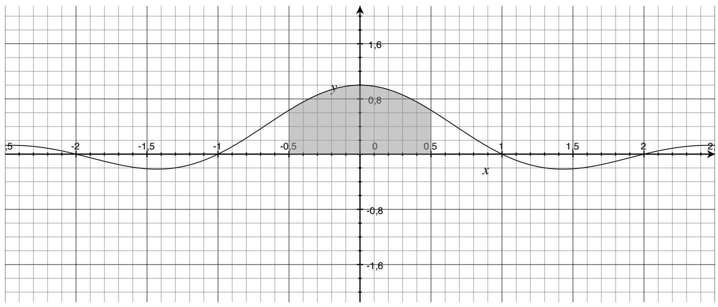
$$\frac{d}{dx}\text{sinc}(x) = -\frac{\sin x}{x^2} + \frac{\cos x}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\text{sinc}(x) = 0 \iff \tan x = x$$

Grafico di $f(x) = \tan x$ e $f(x) = x$ La funzione sinc non è elementarmente



integrabile. Tuttavia si può dimostrare



$$\int_0^{+\infty} \mathrm{sinc} x dx = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{+\infty} |\mathrm{sinc} x| dx = +\infty$$

$$a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\mathrm{sinc} x|\, dx = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx$$

Ponendo

$$t = x - n\pi$$

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{|\sin(t+n\pi)|}{t+n\pi} dx = \int_0^{\pi} \frac{|\sin t|}{t+n\pi} dx$$

Poichè $\frac{1}{t+n\pi} \geq \frac{1}{\pi+n\pi}$

$$\int_0^{N\pi} |\mathrm{sinc} x| dx = \sum_0^{N-1} a_n \geq \sum_0^{N-1} \frac{2}{(1+n)\pi},$$

che mostra la divergenza

6. Esercizi

Esercizio 6.1. *Studiare e disegnare il grafico della funzione*

$$f(x) = \ln(x^2 - 2|x| - 3).$$

r. *Occorre risolvere i problemi*

$$x \geq 0, \qquad x^2 - 2x - 3 > 0$$

e

$$x < 0, \qquad x^2 - +2x - 3 > 0.$$

Da cui

$$x \geq 0, \qquad x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) > 0$$

e

$$x < 0, \qquad x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1) > 0.$$

Quindi si ha

$$x > 3$$

e

$$x < -3.$$

Insieme di definizione:

$$(-\infty - 3) \cup (3, +\infty).$$

Intersezioni con gli assi nei punti $x = 1 + \sqrt{5}$ *e* $x = -1 - \sqrt{5}$.

Inoltre abbiamo

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = -\infty,$$

mentre

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$

Inoltre per $x > 3$

$$f'(x) = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x - 3}$$

è positiva nell'insieme di definizione per $x > 3$, pertanto in tale intervallo la funzione è crescente. Inoltre la derivata seconda

$$f''(x) = \frac{2(x^2 - 2x - 3)}{(x^2 + 2x - 3)^2} - \frac{(2x - 2)^2}{(x^2 - 2x \ - 3)^2}$$

è negativa, pertanto la funzione è concava.

Analogamente per $x < -3$

$$f'(x) = \frac{2x + 2}{x^2 + 2x - 3}$$

è positiva nell'insieme di definizione, per $x < -3$, pertanto in tale intervallo la funzione è crescente.

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + 2x - 3)}{(x^2 + 2x - 3)^2} - \frac{(2x + 2)^2}{(x^2 + 2x \ - 3)^2}$$

è negativa, pertanto la funzione è concava.

Da cui il grafico

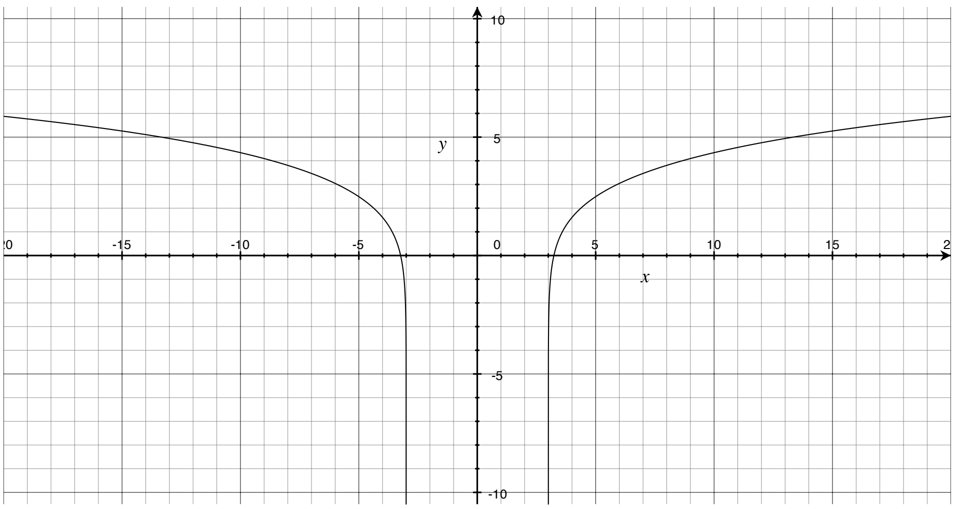


FIGURA 7. Grafico di $f(x) = \ln(x^2 - 2|x| - 3)$

Esercizio 6.2. *Studiare e disegnare il grafico della funzione*

$$f(x) = \frac{1 + \ln(x - e)^2}{x - e}.$$

r. *Insieme di definizione:*

$$x \neq e$$

asintoto verticale.

Abbiamo

$$\lim_{x \to e^+} \frac{1 + \ln(x - e)^2}{x - e} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to e^-} \frac{1 + \ln(x-e)^2}{x-e} = +\infty.$$

Inoltre

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \ln(x-e)^2}{x-e} = 0,$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1 + \ln(x-e)^2}{x-e} = 0.$$

Da cui $y = 0$ *è un asintoto orizzontale.*

Si assuma $x > e$. *Calcolando la derivata si ha* $x = \sqrt{e} + e$ *è un punto di massimo relativo.*

Si assuma $x < e$ *allora* $x = -\sqrt{e} + e$ *è un punto di minimo relativo. Si ha un flesso per* $x = 2e$ *e per* $x = 0$.

Disegnare il grafico.

Esercizio 6.3. *Studiare e disegnare il grafico della funzione*

$$f(x) = x^x e^{-x}.$$

r. *La funzione è definita per* $x > 0$. *Inoltre*

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1,$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Studiamo la derivata prima.

$$f(x) = e^{x \ln x} e^{-x} = e^{x \ln x - x}.$$

Da cui

$$f'(x) = x^x e^{-x}(x \ln x - x)' = x^x e^{-x}(\ln x + 1 - 1).$$

Dunque la derivata prima si annulla per $x = 1$. *In tal punto la funzione vale* e^{-1}. *Calcoliamo la derivata seconda:*

$$f''(x) = x^x e^{-x}((\ln x)^2 + \frac{1}{x}).$$

Pertanto la funzione non presenta flessi e risulta convessa nel suo insieme di definizione. Quindi $x = 1$ *risulta essere un punto di minimo.*

Da cui il grafico della funzione.

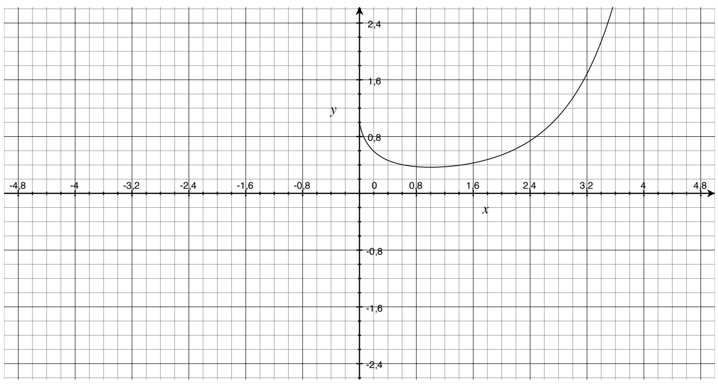


Figura 8. Grafico di $f(x) = x^x e^{-x}$

Esercizio 6.4. *Studiare e disegnare il grafico della funzione*

$$f(x) = \sqrt{|x^2 - 2| - 2}.$$

r. *Basta studiare la funzione per $x > 0$, essendo una funzione pari. La funzione è definita per $x > 2$. In $x = 2$ vale zero, è sempre crescente e concava.*

Da cui il grafico della funzione.

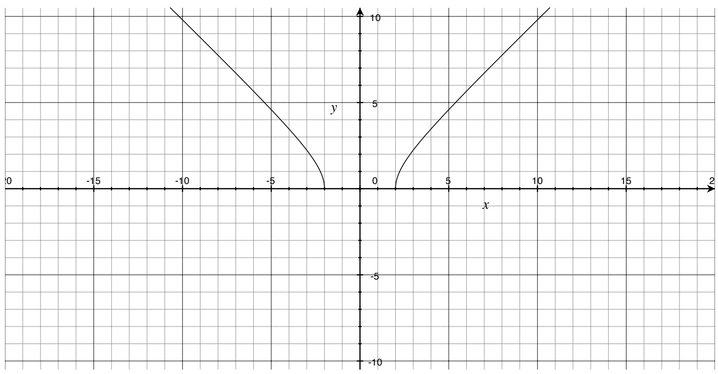


FIGURA 9. Grafico di $f(x) = \sqrt{|x^2 - 2| - 2}$

Esercizio 6.5. *Studiare e disegnare il grafico della funzione*

$$f(x) = \ln(x \ln x).$$

r. *La funzione è definita in $I = (1, +\infty)$ e ivi di classe C^∞.*

Abbiamo

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty.$$

Poichè f è derivabile in I, si ha per $x > 1$

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln x}(\ln x + 1)$$

Quindi f è crescente in $(1, +\infty)$ e non ha punti di massimo o minimo in tale intervallo.

Per $x > 1$ calcoliamo la derivata seconda che risulta negativa pertanto la funzione è concava:

$$f''(x) = \frac{1}{(x \ln x)^2}\left(\frac{1}{x} x \ln x - (1 + \ln x)^2\right).$$

Quindi f è concava in I. Da cui il grafico della funzione

Esercizio 6.6. *Studiare e disegnare il grafico della funzione*

$$f(x) = |x| \ln |x|.$$

(Si richiede di studiare in particolare la regolarità della funzione in $x = 0$).

r. *La funzione è definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, continua e pari. Si ha*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

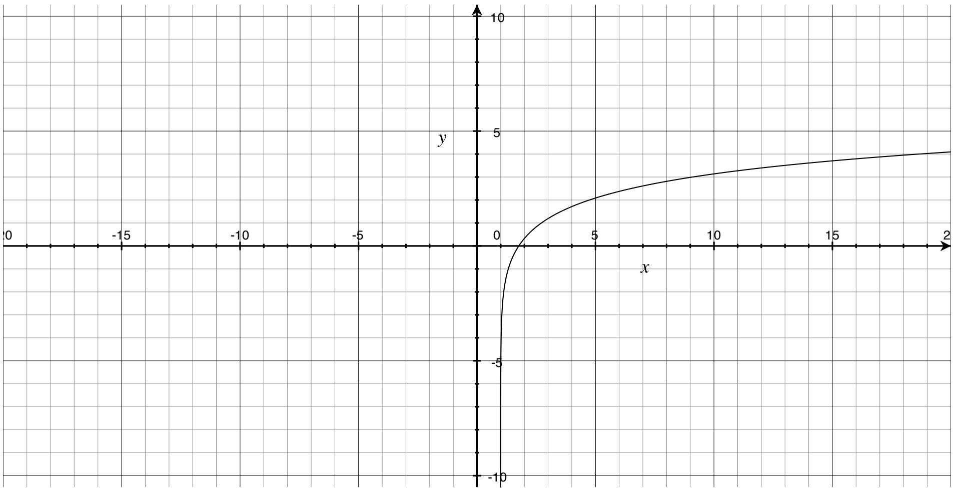


FIGURA 10. Grafico di $f(x) = \ln(x \ln x)$

Il punto $x = 0$ è una singolarità eliminabile.

Studiamo la funzione per $x > 0$. Si ha

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = x\frac{1}{x} + \ln x = 1 + \ln x.$$

Abbiamo

$$f'(x) = 0$$

se e solo se

$$x = \frac{1}{e}.$$

Il valore della funzione in $x = \frac{1}{e}$ è dato da $-\frac{1}{e}$.

Inoltre

$$f''(x) = \frac{1}{x}$$

è sempre positiva per x positivo, pertanto la funzione è convessa e il punto $x = \frac{1}{e}$ è un punto di minimo. La funzione risulta prolungabile con continuità in $x = 0$, mentre

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty,$$

mentre

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = +\infty.$$

Pertanto il punto $x = 0$ è un punto di cuspide. Dalla parità segue il grafico della funzione

Esercizio 6.7. *Studiare e disegnare il grafico della funzione*

$$f(x) = (x^2 + x)e^{-2|x|}.$$

In particolare esaminare la continuità e la derivabilità nel punto $x = 0$.

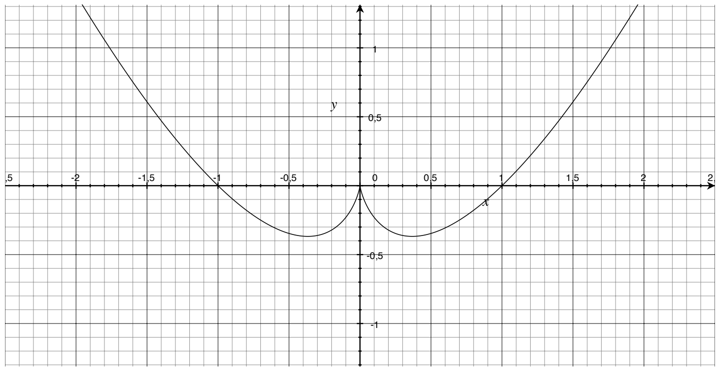


FIGURA 11. Grafico di $f(x) = |x| \ln |x|$.

r. *La funzione è definita in* $\mathbb{R}$, *si annulla in* $x = 0$, *e* $x = -1$. *Supponiamo* $x > 0$. *Allora*

$$f(x) = (x^2 + x)e^{-2x}.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

La derivata prima della funzione è

$$f'(x) = (2x+1)e^{-2x} - 2(x^2+x)e^{-2x},$$
$$f'(x) = (2x+1-2x^2-2x)e^{-2x},$$
$$f'(x) = (1-2x^2)e^{-2x}.$$

Quindi la derivata prima, nell'intervallo considerato, si annulla in $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ *Dallo studio del segno della derivata segue che la funzione ha in* $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ *un punto di massimo relativo.*

La derivata seconda vale

$$f''(x) = (-4x)e^{-2x} - 2(1-2x^2)e^{-2x},$$
$$f''(x) = (4x^2 - 4x - 2)e^{-2x}.$$

La derivata seconda si annulla, nell'intervallo considerato, per

$$x = \frac{2+2\sqrt{3}}{4}.$$

Per $0 < x < \frac{2+2\sqrt{3}}{4}$ *la derivata seconda è negativa, pertanto la funzione è concava, mentre è positiva per* $x > \frac{2+2\sqrt{3}}{4}$, *pertanto la funzione è convessa in tale intervallo.*

Per $x < 0$ *si ha*

$$f(x) = (x^2 + x)e^{2x}.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

La derivata prima della funzione è

$$f'(x) = (2x+1)e^{2x} + 2(x^2+x)e^{2x},$$
$$f'(x) = (2x+1+2x^2+2x)e^{2x},$$

$$f'(x) = (2x^2 + 4x + 1)e^{2x}.$$

Quindi la derivata prima, nell'intervallo considerato, si annulla in $x = \frac{-4-2\sqrt{2}}{4}$ *e in* $x = \frac{-4+2\sqrt{2}}{4}$.

Dallo studio del segno della derivata segue che la funzione ha in $x = \frac{-4-2\sqrt{2}}{4}$ *un punto di massimo relativo, mentre in* $x = \frac{-4+2\sqrt{2}}{4}$ *un punto di minimo relativo. La derivata seconda vale*

$$f''(x) = 2(2x^2 + 6x + 3)e^{2x}.$$

La derivata seconda si annulla per

$$x = \frac{-6 - 2\sqrt{3}}{4},$$
$$x = \frac{-6 + 2\sqrt{3}}{4}.$$

Per $\frac{-6+2\sqrt{3}}{4} < x < 0$ *la derivata seconda è positiva, pertanto la funzione è convessa, tra le due radici la funzione è concava, mentre per* $x < -\frac{-6-2\sqrt{3}}{4}$ *la funzione è convessa. La funzione è continua e derivabile in* $x = 0$*, mentre non esiste la derivata seconda in* $x = 0$.

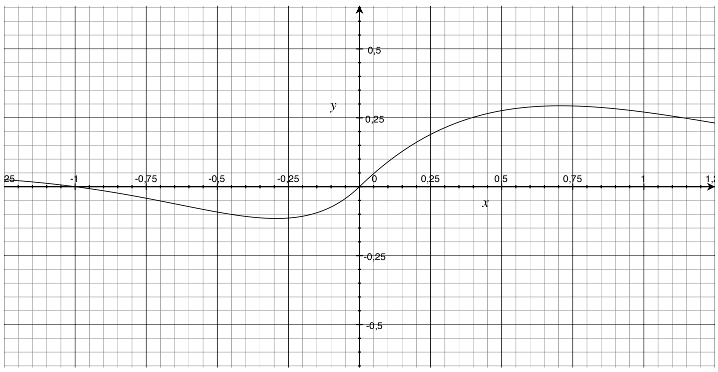


FIGURA 12. Grafico di $f(x) = (x^2 + x)e^{-2|x|}$.

Esercizio 6.8. *Studiare e disegnare il grafico della funzione*

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

r. *La funzione è definita per* $x > 0$ *e ivi continua e derivabile. Abbiamo*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

e

$$f(1) = 0,$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0,$$
$$f'(x) = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}(1 - \frac{1}{2}\ln x).$$

Da cui, risolvendo $f'(x) = 0$*, troviamo*

$$2 = \ln x,$$

$$x = e^2$$

e

$$f(e^2) = \frac{2}{e}.$$

Abbiamo

$$f''(x) = \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}(\frac{3}{4}\ln(x) - 2),$$

$$f''(e^2) < 0,$$

dunque il punto è di un punto di massimo relativo. Inoltre

$$x = e^{\frac{8}{3}}$$

è un punto di flesso.

Inoltre f è crescente per in $(0, e^2)$, decrescente in $(e^2, +\infty)$, concava per $(0, e^{\frac{8}{3}})$, convessa per $x > e^{\frac{8}{3}}$.

Da cui il grafico della funzione.

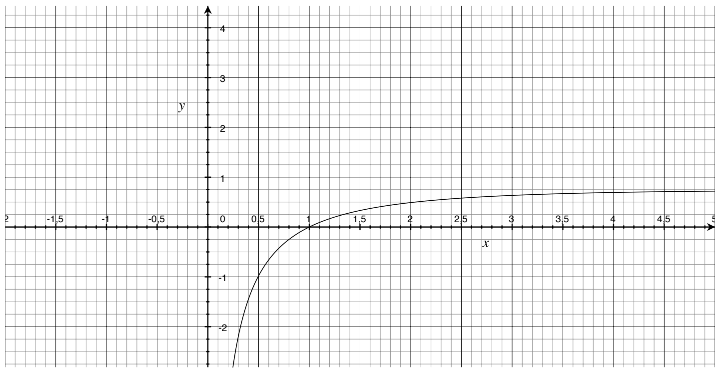


FIGURA 13. Grafico di $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Esercizio 6.9. *Studiare e disegnare il grafico della funzione*

$$f(x) = \sqrt{|x^3 - 1|}.$$

r. *La funzione è definita per ogni x reale, è continua, è inoltre derivabile in ogni punto $x \neq 1$.*

$$f(x) = 0 \qquad se \qquad x = 1.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

Si ha

$$x^3 - 1 > 0 \qquad se \qquad x > 1$$

.

Assumiamo $x > 1$. Calcoliamo la derivata

$$f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 - 1}}.$$

La funzione è crescente in $(1, +\infty)$. *Inoltre*

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = +\infty.$$

La derivata seconda è data da

$$f''(x) = \frac{3}{4(x^3-1)^{\frac{3}{2}}}(-3x^4 + 4x(x^3-1)),$$

$$f''(x) = \frac{3}{4(x^3-1)^{\frac{3}{2}}}(x^4 - 4x)),$$

$$f''(x) = \frac{3}{4(x^3-1)^{\frac{3}{2}}}x(x^3 - 4)),$$

$$f''(x) = 0 \qquad se \qquad x = 4^{\frac{1}{3}} = 1.5874.$$

Per $x > 4^{\frac{1}{3}} = 1.5874$ *la funzione è convessa, mentre per* $1 < x < 1.5874$, *la funzione è concava.*

Assumiamo $x < 1$.

$$f'(x) = \frac{-3x^2}{2\sqrt{1-x^3}}.$$

La funzione è decrescente in $(-\infty, 1)$. *Si ha*

$$f'(x) = 0 \qquad se \qquad x = 0.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = -\infty.$$

La derivata seconda è data da

$$f''(x) = \frac{3}{4(1-x^3)^{\frac{3}{2}}}(-3x^4 - 4x(1-x^3)),$$

$$f''(x) = \frac{3}{4(1-x^3)^{\frac{3}{2}}}(x^4 - 4x)),$$

$$f''(x) = \frac{3}{4(x^3-1)^{\frac{3}{2}}}x(x^3 - 4)).$$

Nell'intervallo di interesse

$$f''(x) = 0 \qquad x = 0.$$

Per $x > 0$ *e* $x < 1$ *la funzione è concava, mentre per* $-\infty < x < 0$, *la funzione è convessa. Pertanto la funzione ha due punti di flesso* $x = 0$ *con* $f(0) = 1$, *e* $x = 4^{\frac{1}{3}} = 1.5874$ *con* $f(1.5874) = 0.766421$.

Il punto $x = 1$ *è un punto di cuspide.*

Inoltre $f(1) < f(x)$, *per ogni* x *in* $\mathbb{R}$, *quindi* $x = 1$ *è un punto di minimo assoluto.*

Da cui il grafico della funzione.

Esercizio 6.10. *Studiare e disegnare il grafico della funzione*

$$f(x) = \sqrt{\sin x - \cos x}.$$

r. *La funzione è periodica pertando verrà studita in* $[0, 2\pi]$. *Insieme di definizione:*

$$\sin x \geq \cos x$$

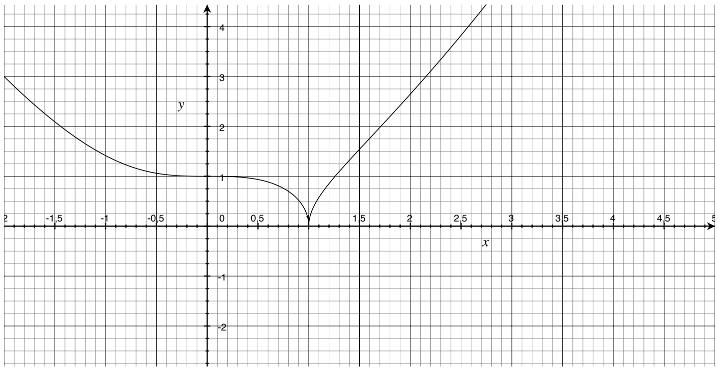


FIGURA 14. Grafico di $f(x) = \sqrt{|x^3 - 1|}$.

Limitandoci a $[0, 2\pi]$*, abbiamo*

$$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}.$$

In $x = \frac{\pi}{4}$ *e in* $\frac{5\pi}{4}$*.*

Inoltre la derivata prima vale

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{\sin x - \cos x}}.$$

Quindi

$$f'(x) = 0$$

per $x = \frac{3}{4}\pi$*. Inoltre*

$$f(\frac{3}{4}\pi) = \sqrt{2}.$$

La derivata seconda vale

$$\frac{1}{2(\sin x - \cos x)^{\frac{3}{2}}}(-(-\cos x + \sin x)^2 - \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)^2).$$

Essendo negativa, il punto è di massimo e la funzione concava.

Da cui il grafico.

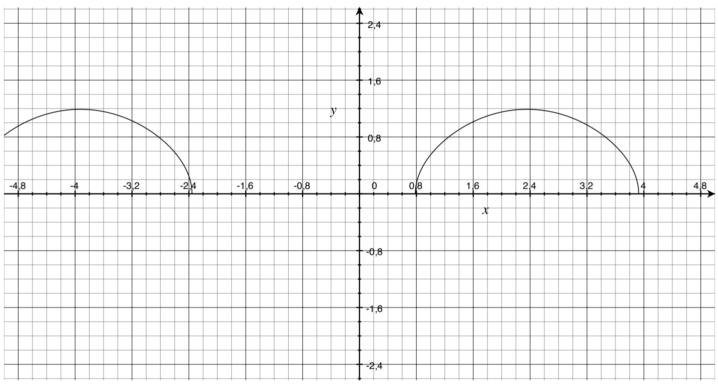


FIGURA 15. Grafico di $f(x) = \sqrt{\sin x - \cos x}$

Esercizio 6.11. *Studiare e disegnare il grafico della funzione*

$$f(x) = \ln|x^4 - 1|.$$

r.. *La funzione è pari, la studiamo quindi in* $[0, +\infty)$. *Restringendoci a tale intervallo la funzione è ovunque definita eccetto* $x = 1$.

$$\lim_{x\to 1^+} \ln|x^4 - 1| = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^-} \ln|x^4 - 1| = -\infty,$$

$$\lim_{x\to +\infty} \ln|x^4 - 1| = +\infty,$$

$$f(0) = 0.$$

Inoltre, se $x > 1$, $x^4 - 1 > 0$, *si ha*

$$f(x) = \ln|x^4 - 1| = \ln(x^4 - 1),$$

$$f'(x) = \frac{4x^3}{x^4 - 1} > 0$$

per $x > 1$. *Poichè* $f'(x) > 0$ *in* $(1, +\infty)$ *la funzione è crescente.*

Abbiamo

$$f''(x) = \frac{12x^2(x^4 - 1) - 16x^6}{(x^4 - 1)^2} = \frac{-4x^6 - 12x^2}{(x^4 - 1)^2} < 0,$$

quindi la funzione è concava.

Per $0 \leq x < 1$ *la funzione vale*

$$f(x) = \ln|x^4 - 1| = \ln 1 - x^4,$$

$$f'(x) = \frac{-4x^3}{1 - x^4} \leq 0$$

per $0 \leq x < 1$, *essendo* 0 *se* $x = 0$. *Per cui la funzione è decrescente in* $(0, 1)$.

Abbiamo

$$f''(x) = \frac{-12x^2(1 - x^4) - 16x^6}{(1 - x^4)^2} = \frac{-4x^6 - 12x^2}{(1 - x^4)^2} < 0,$$

quindi la funzione è concava.

Il punto $x = 0$ *è un punto di massimo relativo.*

Per simmetria si ottiene il grafico della funzione.

Esercizio 6.12. *Studiare e disegnare il grafico della funzione*

$$f(x) = \tan x^2 + e^{-x^2}$$

nell'intervallo $(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}})$.

r. *Si ha che la funzione è pari, pertanto basterà studiarla in* $(0, \sqrt{\frac{\pi}{2}})$. *Si ha*

$$f(0) = 1$$

Inoltre

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

Calcoliamo la derivata prima della funzione:

$$f'(x) = 2x\left(\frac{1}{\cos^2 x^2} - e^{-x^2}\right).$$

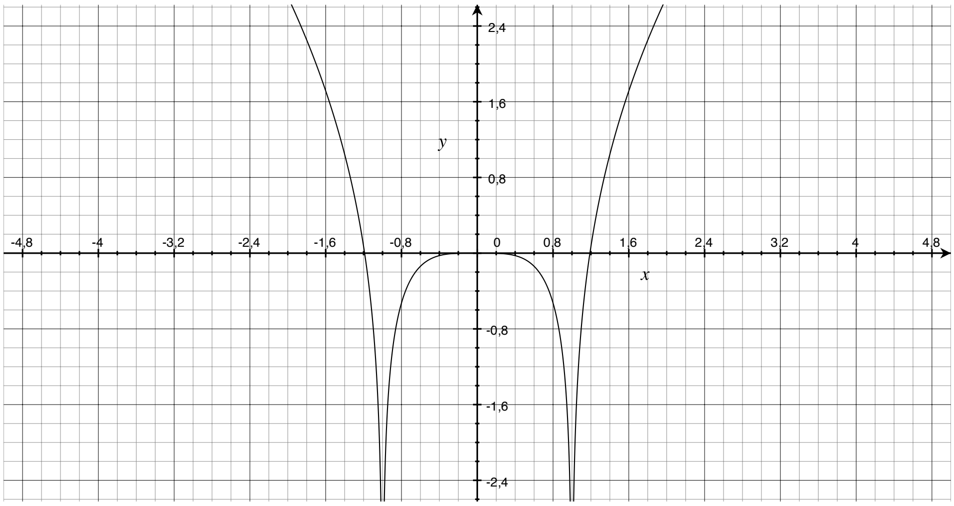


FIGURA 16. Grafico di $f(x) = \ln|x^4 - 1|$

Calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = 2\left(\frac{1}{\cos^2 x^2} - e^{-x^2}\right) + 4x^2\left(\frac{2\sin x^2}{\cos^3 x^2} + e^{-x^2}\right).$$

In $(0, \sqrt{\frac{\pi}{2}})$ *la derivata prima è positiva, pertanto la funzione è crescente. Per studiare la convessità possiamo operare in due modi.*

a) Ricordare che:

Siano f*,* g *due funzioni positive definite in un intervallo di* $\mathbb{R}$*. È semplice far vedere che se* f *e* g *risultano crescenti (non decrescenti) anche la funzione prodotto*

$$h(x) = f(x) \cdot g(x)$$

risulta crescente (non decrescente).

b) Calcolare la derivata seconda .

Applicando uno dei due punti al nostro caso si ha
a) in $(0, \frac{\sqrt{\pi}}{2})$ *la funzione* $f(x) = 2x$ *è positiva, anche*

$$g(x) = \frac{1}{\cos^2 x^2} - e^{-x^2}$$

è positiva, inoltre le funzioni in tale intervallo risultano crescenti. Pertanto la convessità segue dalla proprietà di monotonia della derivata.
b) Osservando che la derivata seconda in $(0, \frac{\sqrt{\pi}}{2})$ *è positiva.*

Il punto $x = 0$ *risulta un punto di minimo assoluto. Disegnare il grafico*

7. Derivate parziali prime e seconde

Data una funzione f definita in un intorno di $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, f si dice derivabile parzialmente rispetto a x nel punto (x_0, y_0) se esiste ed è finito il limite
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$
Il valore del limite si indica con $f_x(x_0, y_0)$ e si chiama derivata parziale prima rispetto a x della funzione in (x_0, y_0).
f si dice derivabile parzialmente rispetto a y nel punto (x_0, y_0) se esiste ed è finito il limite
$$\lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$
I valore del limite si indica con $f_y(x_0, y_0)$ e si chiama derivata parziale prima rispetto a y della funzione in (x_0, y_0).
f si dice derivabile parzialmente rispetto a x o rispetto a y in un aperto A se è derivabile parzialmente in ogni punto di A.

Le derivate parziali definiscono allora funzioni su cui possiamo eventualmente ripetere l'operazione
$$f_{xx} \qquad f_{xy} \qquad f_{yx} \qquad f_{yy}.$$

7.1. Forme quadratiche in $\mathbb{R}^2$ e la matrice Hessiana. Una matrice Q si dice *non negativa* (rispettivamente, *non positiva*) se la forma z^TQz ($z = (x, y)$ is semidefinita positiva (rispettivamente negativa) cioè se
$$z^TQz = \sum_{i,j=1}^{2} q_{i,j}x_iy_j \geq 0$$
$$\text{(rispettivamente, } z^TQz \leq 0,)\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$
Una matrice Q si dice *positiva* (rispettivamente, *negativa*) se la forma z^TQz è *positiva* (rispettivamente, *negativa*)
$$z^TQz = \sum_{i,j=1}^{2} q_{i,j}x_iy_j > 0\ (z^TQz < 0)\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x, y \neq 0.$$

Esempio 7.1. *Un esempio di matrice positiva è data da*
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$
poichè $x^2 + y^2 > 0$, per $(x, y) \neq (0, 0)$. Un esempio di matrice non negativa è data da
$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$
mentre una matrice indefinita è data da
$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Se restringiamo l'analisi alle matrici 2×2 allora abbiamo il seguente

Teorema 7.2. *Sia*

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \tag{6}$$

una matrice simmetrica.

$$|Q| = \det Q = q_{11}q_{22} - (q_{12})^2.$$

Allora

$$|Q| > 0 \quad \text{e } q_{11} > 0, \implies Q > 0$$

$$|Q| > 0 \quad \text{e } q_{11} < 0, \implies Q < 0$$

Se detQ < 0*, allora* Q *è indefinita.*

Dimostrazione. Data la forma quadratica

$$ax^2 + 2bx + c,$$

essa può essere equivalentemente scritta

$$a\left(x - \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a},$$

da questa formula si evince chiaramente il risultato. □

8. Massimi e minimi interni per funzioni C^2

Diciamo che (x_0, y_0) è un punto interno a Ω se esiste $\delta > 0$ tale che $B(x_0, y_0), \delta) \subset \Omega$. Si ha il *Teorema di Fermat*

Teorema 8.1 (Fermat)**.** *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *e* $(x_0, y_0 \in \Omega$ *un punto di minimo di* f *in* Ω*. Se* f *ammette derivate parziali in* (x_0, y_0) (x_0, y_0) *è un punto interno a* Ω*, allora*

$$Df(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)) = 0.$$

Sef ammette derivate parziali seconde in Ω, possiamo associare a f la sua *matrice Hessiana*

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} \tag{7}$$

e il determinante della matrice Hessiana, assumendo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y),$$

è dato da

$$|H| = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y})^2$$

Teorema 8.2 (Condizioni sufficienti del secondo ordine)**.** *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *e* $f \in C^2(\Omega)$*. Se* $(x_0, y_0) \in \Omega$ *è in* Ω *e*

$$Df(x_0, y_0) = 0$$

$$D^2 f(x_{0y0}) > 0, \qquad \textit{(rispettivamente } D^2 f(x_0, y_0) < 0\textit{)}$$

allora (x_0, y_0)*è un punto di minimo locale (rispettivamente di massimo locale) di* f *in* Ω*.*

9. Esercizi

Esercizio 9.1. *Trovare eventuali punti in cui si annullano le derivate prime di* $f(x, y) = e^x(x + 1) + y^{3/2}$.