1 - Calcolare l'integrale

$$\iint_D (x - |y|)\ dxdy\,,$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\,,\ x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$.

....

In primo luogo si osservi che il dominio assegnato è normale rispetto all'asse $x = 0$, e quindi per la formula di riduzione per gli integrali doppi si ha

$$\iint_D (x - |y|)\ dxdy = \int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x - |y|)\ dx = 2\int_0^{\sqrt{3}/2} dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x - y)\ dx\,.$$

Si noti ora che

$$2\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x - y)\ dx = \Big[x^2 - 2xy\Big]_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} = 1 - y^2 - 2y\sqrt{1-y^2} - (1 - \sqrt{1-y^2})^2 + 2y(1 - \sqrt{1-y^2})\,.$$

In conclusione si ha

$$\iint_D (x - |y|)\ dxdy = \int_0^{\sqrt{3}/2} (-4y\sqrt{1-y^2} - 1 + 2\sqrt{1-y^2} + 2y)\ dy = -\frac{5}{12} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3}\,,$$

tenendo conto di

$$-4\int_0^{\sqrt{3}/2} y\sqrt{1-y^2}\ dy = \frac{4}{3}\Big[(1-y^2)^{3/2}\Big]_0^{\sqrt{3}/2} = -\frac{7}{6}\,,$$

$$\int_0^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-y^2}\ dy = \int_0^{\pi/3} \cos^2 t\ dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} (\cos(2t) + 1)\ dt = \frac{1}{2}\Big[\frac{\operatorname{sen}(2t)}{2} + t\Big]_0^{\pi/3} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3}\Big)\,.$$

---

2 - Sia f la funzione periodica di periodo 2π ottenuta prolungando per periodicità su $\mathbf{R}$ la funzione $x \in [-\pi, \pi] \to \cosh x$. Determinare la serie di Fourier di f.

....

I coefficienti della serie di Fourier sono dati da

$$a_0 = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi}\,,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}(-1)^k\ \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{k^2 + 1}\,, \qquad b_k = 0\,, \qquad k \in \mathbf{N}\,.$$

In conclusione, la serie di Fourier richiesta e' data da

$$\frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\ \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{k^2 + 1}\cos kx\,.$$

---

3 - Dire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \operatorname{sen} x + y^3 \operatorname{sen}(2x) \\ \\ y(\pi) = \alpha \end{cases} \tag{1}$$

è definita nell'intervallo $\Big[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\Big]$.

....

In primo luogo si osservi che la funzione

$$f(x,y) = y \operatorname{sen} x + y^3 \operatorname{sen}(2x)\,, \qquad (x,y) \in \mathbf{R}^2\,,$$

è di classe C^∞ in $\mathbf{R}^2$, e di conseguenza valgono le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale per l'equazione differenziale $y' = f(x,y)$. Pertanto, per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ il problema di Cauchy (1) ammette una ed una sola soluzione definita in un intorno di π che, in generale, dipenderà da α.
Si noti ora che

$$y' = y \operatorname{sen} x + y^3 \operatorname{sen}(2x) \tag{2}$$

è un'equazione differenziale di Bernoulli. La retta di equazione $y = 0$ è la soluzione di (1) per $\alpha = 0$. Grazie al teorema di unicità, ogni altra soluzione $y(x)$ di (2) non si annulla mai. Pertanto, ponendo $z = y^{-2}$, l'equazione (2) è trasformata nell'equazione lineare

$$z' = -2z \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen}(2x)\,. \tag{3}$$

L'integrale generale dell'equazione omogenea associata a (3) è dato da

$$z(x) = Ce^{2\cos x}\,, \qquad C \in \mathbf{R}\,.$$

Per individuare un integrale particolare di (3), occorre determinare una primitiva della funzione $-2e^{-2\cos x} \operatorname{sen}(2x)$. Infatti, integrando due volte per parti, si ottiene

$$-2\int e^{-2\cos x} \operatorname{sen}(2x)\, dx = -2\cos x\, e^{-2\cos x} - 2\int \operatorname{sen} x\, e^{-2\cos x}\, dx = -2\cos x\, e^{-2\cos x} - e^{-2\cos x}\,.$$

In definitiva, l'integrale generale dell'equazione (3) è dato da

$$z(x) = Ce^{2\cos x} - 2\cos x - 1\,, \qquad C \in \mathbf{R}\,.$$

Imponendo la condizione $z(\pi) = \alpha^{-2}$, si ricava $C = (\alpha^{-2} - 1)e^2$. Si osservi ora che se $C > 0$, si ha $z(x) > 0$ per ogni $x \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$, e di conseguenza per ogni $|\alpha| < 1$ la soluzione $y(x)$ di (1) è definita almeno nell'intervallo $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$. Inoltre, se $0 < \alpha < 1$ la soluzione è data da

$$y(x) = ((\alpha^{-2} - 1)e^{2+2\cos x} - 2\cos x - 1)^{-1/2}\,,$$

mentre per $-1 < \alpha < 0$ la soluzione è data da

$$y(x) = -((\alpha^{-2} - 1)e^{2+2\cos x} - 2\cos x - 1)^{-1/2}\,.$$

Per $|\alpha| = 1$ si ha

$$z(x) = -2\cos x - 1 > 0\,, \qquad x \in \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right),$$

e quindi, essendo $z(2\pi/3) = z(4\pi/3) = 0$, si ha la soluzione $y(x)$ di (1) è definita nell'intervallo aperto $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$. Inoltre, per $\alpha = 1$ la soluzione è data da

$$y(x) = (-2\cos x - 1)^{-1/2}\,,$$

mentre per $\alpha = -1$ la soluzione è data da

$$y(x) = -(-2\cos x - 1)^{-1/2}\,.$$

Infine, se $|\alpha| > 1$ si ha $z(2\pi/3) = z(4\pi/3) = (\alpha^{-2} - 1)e < 0$, mentre $z(\pi) = \alpha^{-2} > 0$, e quindi $y = z^{-1/2}$ è definita solo in un intorno di π strettamente contenuto in $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$.

La soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -2y \operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen}(2x) \\ \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

è data da

$$y(x) = -e^{2\cos x + 2} - 2\cos x - 1\,.$$

....

1 - Verificare che la forma differenziale

$$(-\sin x + xy^2e^x + \frac{1}{2}x^2y^2e^x)dx + x^2ye^x dy$$

è esatta e trovare le primitive.

....

Posto $a(x,y) = -\sin x + xy^2e^x + \frac{1}{2}x^2y^2e^x$ e $b(x,y) = x^2ye^x$, si ha

$$\frac{\partial a}{\partial y} = 2xye^x + x^2ye^x = \frac{\partial b}{\partial x}\,, \qquad (x,y) \in \mathbf{R}^2\,,$$

cioè la forma differenziale assegnata è chiusa in tutto $\mathbf{R}^2$; di conseguenza la forma differenziale è anche esatta. Pertanto una primitiva è data da

$$f(x,y) = \int_0^x a(t,1)\ dt + \int_1^y b(x,t)\ dt = \int_0^x \ \left(-\sin t + te^t + \frac{1}{2}t^2e^t\right)\ dt + x^2e^x \int_1^y \ t\ dt = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2y^2e^x\,.$$

In conclusione, tutte e sole le primitive della forma differenziale assegnata sono le funzioni

$$\cos x + \frac{1}{2}x^2y^2e^x + C\,, \qquad C \in \mathbf{R}\,.$$

---

2 - Determinare una funzione $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivabile, verificante

$$g(0) = 1\,; \qquad g(t) > 0, \qquad g'(t) > 0 \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

e tale che se γ è una curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = g(t)\cos t \\ \\ y(t) = g(t)\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, \pi/2]\,,$$

si abbia

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = 3g(t)^2\,.$$

Calcolare la lunghezza di γ.

....

In forza del fatto che

$$x'(t) = g'(t)\cos t - g(t)\sin t\,, \qquad y'(t) = g'(t)\sin t + g(t)\cos t\,,$$

si ha

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = g'(t)^2 + g(t)^2\,,$$

e quindi una funzione g è la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} g'(t) = \sqrt{2}g(t) \\ \\ g(0) = 1\,. \end{cases} \tag{1}$$

Pertanto $g(t) = e^{\sqrt{2}t}$, $t \in \mathbf{R}$, e di conseguenza la lunghezza di γ è data da

$$\int_0^{\pi/2} \ \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\ dt = \int_0^{\pi/2} \ \sqrt{3g(t)^2}\ dt = \sqrt{3}\int_0^{\pi/2} \ e^{\sqrt{2}t}\ dt = \sqrt{\frac{3}{2}}\ (e^{\pi/\sqrt{2}} - 1)\,.$$

---

3 - Determinare al variare del parametro $n \in \mathbf{N}$ la soluzione $y_n(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x^2 + n^2} \\ y(0) = \dfrac{1}{n}\,. \end{cases} \tag{1}$$

Studiare la convergenza uniforme della successione di funzioni $\{y_n(x)\}$.

....

In primo luogo si osservi che l'equazione differenziale in (1) è lineare del primo ordine. Pertanto l'integrale generale è dato da

$$y(x) = Ce^{\int \frac{1}{x^2+n^2}\ dx} = Ce^{\frac{1}{n}\ \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{n}\right)}\,, \qquad x \in \mathbf{R}\,, \qquad C \in \mathbf{R}\,.$$

Imponendo la condizione $y(0) = 1/n$, si ricava $C = 1/n$, e quindi la soluzione del problema di Cauchy (1) è data da

$$y_n(x) = \frac{1}{n} e^{\frac{1}{n} \ \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{n}\right)}, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Infine, la successione di funzioni $\{y_n(x)\}$ converge uniformemente a 0 su tutto $\mathbf{R}$, in quanto

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} \left[\frac{1}{n} e^{\frac{1}{n} \ \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{n}\right)}\right] = \frac{1}{n} e^{\frac{\pi}{2n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

1 - Calcolare l'integrale

$$\iint_D \log(|y-x|+5) \ dxdy,$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le y \le 1, \ 0 \le x \le y\}$.

....

In primo luogo si osservi che il dominio assegnato è normale rispetto all'asse $x = 0$, e quindi per la formula di riduzione per gli integrali doppi si ha

$$\iint_D \log(|y-x|+5) \ dxdy = \int_0^1 \ dy \int_0^y \log(y-x+5) \ dx.$$

Si noti ora che, integrando per parti, si ottiene

$$\int_0^y \log(y-x+5) \ dx = \Big[-(y-x+5)\log(y-x+5) + y - x + 5\Big]_{x=0}^{x=y} = -5\log 5 + (y+5)\log(y+5) - y,$$

$$\int_0^1 (y+5)\log(y+5) \ dy = \left[\frac{1}{2}(y+5)^2\log(y+5)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 (y+5) \ dy = 18\log 6 - \frac{25}{2}\log 5 - \frac{11}{4}.$$

In conclusione si ha

$$\iint_D \log(|y-x|+5) \ dxdy = 18\log 6 - \frac{35}{2}\log 5 - \frac{13}{4}.$$

---

2 - Determinare al variare del parametro $n \in \mathbf{N}$ la soluzione $y_n(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' = ny \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 - \sqrt{1+n}. \end{cases} \tag{1}$$

Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni $\{y_n(x)\}$.

....

In primo luogo si osservi che l'equazione differenziale in (1) è lineare del secondo ordine. Pertanto l'integrale generale è dato da

$$y(x) = C_1 e^{-(1-\sqrt{1+n})x} + C_2 e^{-(1+\sqrt{1+n})x}, \qquad x \in \mathbf{R}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

Imponendo le condizioni $y(0) = 1$ e $y'(0) = -1 - \sqrt{1+n}$ si ricava $C_1 = 0$ e $C_2 = 1$, e quindi la soluzione del problema di Cauchy (1) è data da

$$y_n(x) = e^{-(1+\sqrt{1+n})x}, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Si osservi ora che se $x < 0$ si ha $\lim_{n\to\infty} y_n(x) = +\infty$, $y_n(0) = 1$, per ogni $n \in \mathbf{N}$, mentre per $x > 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = 0.$$

Pertanto, la successione di funzioni $\{y_n(x)\}$ converge puntualmente in $[0,\infty[$ alla funzione $y(x) = 0$ per $x > 0$ e $y(0) = 1$.

Infine, $\{y_n(x)\}$ non converge uniformemente in ogni intervallo contenente 0, poiché la funzione limite $y(x)$ non è continua in 0, mentre $\{y_n(x)\}$ converge uniformemente alla funzione identicamente nulla in ogni intervallo del tipo $[a,\infty[$ con $a > 0$, in quanto

$$\max_{x\ge a}\left[e^{-(1+\sqrt{1+n})x}\right] = e^{-(1+\sqrt{1+n})a} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

---

3 - Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 \cos^2 x\,, \\ y(\pi) = -\dfrac{4}{3\pi}\,, \end{cases} \tag{$*$}$$

(a) determinare la soluzione.
(b) Dire se la soluzione di $(*)$ è definita in un intervallo illimitato superiormente.

....

(a) In primo luogo si osservi che la funzione

$$f(x,y) = y^2 \cos^2 x\,, \qquad (x,y) \in \mathbf{R}^2\,,$$

è di classe C^∞ in $\mathbf{R}^2$, e di conseguenza valgono le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale per l'equazione differenziale $y' = f(x,y)$. Pertanto, il problema di Cauchy $(*)$ ammette una ed una sola soluzione definita in un intorno di π.
Si noti ora che l'equazione differenziale in $(*)$ è a variabili separabili. La retta di equazione $y = 0$ non è la soluzione di $(*)$, e quindi grazie al teorema di unicità, la soluzione $y(x)$ di $(*)$ non si annulla mai.
Separando le variabili si ottiene

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \cos^2 x\; dx\,,$$

da cui segue

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{x}{2} + C\,, \qquad C \in \mathbf{R}\,.$$

Imponendo la condizione $y(\pi) = -\dfrac{4}{3\pi}$, si ricava $C = \dfrac{\pi}{4}$ e di conseguenza la soluzione del problema $(*)$ è data in forma implicita da

$$\frac{1}{y} = -\frac{1}{4}\Big[\operatorname{sen} 2x + 2x + \pi\Big]\,.$$

(b) Si osservi ora che, grazie alla disuguaglianza $-\operatorname{sen} t \le t$ per ogni $t \ge 0$, si ha $\operatorname{sen} 2x + 2x + \pi > 0$ per ogni $x \ge 0$ e quindi la soluzione del problema $(*)$ risulta definita almeno nell'intervallo $[0, \infty[$ e si può scrivere esplicitamente

$$y(x) = -\frac{4}{\operatorname{sen} 2x + 2x + \pi}\,.$$

1 - Calcolare l'integrale

$$\iint_D \frac{x^2 - 3y}{x^2 + y^2}\; dxdy\,,$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 1/\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}\,,\ 0 \le y \le x/\sqrt{3}\}$.

....

In primo luogo si osservi che il dominio assegnato è normale rispetto all'asse $y = 0$, e quindi per la formula di riduzione per gli integrali doppi si ha

$$\iint_D \frac{x^2 - 3y}{x^2 + y^2}\; dxdy = \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int_0^{x/\sqrt{3}} \frac{x^2 - 3y}{x^2 + y^2}\; dy\,.$$

Si noti ora che

$$\int_0^{x/\sqrt{3}} \frac{x^2 - 3y}{x^2 + y^2}\; dy = \int_0^{x/\sqrt{3}} \frac{1}{1 + (y/x)^2}\; dy - \frac{3}{2}\int_0^{x/\sqrt{3}} \frac{2y}{x^2 + y^2}\; dy = \Big[x \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{3}{2}\log(x^2 + y^2)\Big]_0^{x/\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}x - \frac{3}{2}\log\Big(\frac{4}{3}\Big)\,.$$

In conclusione si ha

$$\iint_D \frac{x^2 - 3y}{x^2 + y^2}\; dxdy = \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \Big[\frac{\pi}{6}x - \frac{3}{2}\log\Big(\frac{4}{3}\Big)\Big]\; dx = \frac{2\pi}{9} - \log\Big(\frac{4}{3}\Big)\sqrt{3}\,.$$

---

2 - Sia f la funzione periodica di periodo 2π ottenuta prolungando per periodicità su $\mathbf{R}$ la funzione $x \in\,]-\pi, \pi] \to x^2 \cos x$. Determinare la serie di Fourier di f.

....

I coefficienti della serie di Fourier sono dati da

$$\frac{a_0}{2} = -2\,, \qquad a_1 = \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_k = 2(-1)^{k+1}\left[\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k-1)^2}\right], \qquad k \geq 2\,; \qquad b_k = 0\,, \qquad k \in \mathbf{N}\,.$$

In conclusione, la serie di Fourier richiesta e' data da

$$-2 + \Big(\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{3}\Big)\cos x + 2\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k+1}\left[\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k-1)^2}\right]\cos kx\,.$$

---

3 - Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x+2}{x^2-x}\, y + \dfrac{x^3}{(x-1)^6}\, y^4\,, \qquad x > 1\,, \\ y(2) = 1\,. \end{cases} \tag{1}$$

....

In primo luogo si osservi che per il teorema di esistenza e unicità locale il problema di Cauchy (1) ammette una ed una sola soluzione definita in un opportuno intorno di 2.
Si noti ora che

$$y' = \frac{x+2}{x^2-x}\, y + \frac{x^3}{(x-1)^6}\, y^4 \tag{2}$$

è un'equazione differenziale di Bernoulli e $y = 0$ è soluzione dell'equazione (2), ma non del problema di Cauchy (1). Grazie al teorema di unicità, la soluzione $y(x)$ di (1) non si annulla mai. Pertanto, ponendo $z = y^{-3}$, l'equazione (2) è trasformata nell'equazione lineare

$$z' = -3\frac{x+2}{x^2-x}\, z - \frac{3x^3}{(x-1)^6}, \qquad x > 1\,. \tag{3}$$

L'integrale generale dell'equazione omogenea associata a (3) è dato da

$$z(x) = Ce^{-3\int \frac{x+2}{x^2-x}\,dx} = C\frac{x^6}{(x-1)^9}\,, \qquad C \in \mathbf{R}\,, \qquad x > 1\,,$$

tenendo conto di

$$\int \frac{x+2}{x^2-x}\,dx = \log\frac{(x-1)^3}{x^2}\,.$$

Per individuare un integrale particolare di (3), occorre determinare una primitiva della funzione

$$-\frac{3x^3}{(x-1)^6}e^{3\int \frac{x+2}{x^2-x}\,dx} = -3\frac{x^3}{(x-1)^6}\frac{(x-1)^9}{x^6} = -3\frac{(x-1)^3}{x^3}\,.$$

Infatti, si ottiene

$$-3\int \frac{(x-1)^3}{x^3}\,dx = -3\int \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3}\,dx = -3\int \left[1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right]dx = -3\Big(x - 3\log x - \frac{3}{x} + \frac{1}{2x^2}\Big)\,.$$

In definitiva, l'integrale generale dell'equazione (3) è dato da

$$z(x) = \frac{x^6}{(x-1)^9}\left[C - 3\Big(x - 3\log x - \frac{3}{x} + \frac{1}{2x^2}\Big)\right], \qquad C \in \mathbf{R}, \qquad x > 1\,.$$

Imponendo la condizione $z(2) = 1$, si ricava $C = 2^{-6} + \dfrac{15}{8} - 9\log 2$.
In conclusione, la soluzione del problema di Cauchy (1) è data da

$$y(x) = z(x)^{-1/3} = \frac{(x-1)^3}{x^2}\left[2^{-6} + \frac{15}{8} - 9\log 2 - 3\Big(x - 3\log x - \frac{3}{x} + \frac{1}{2x^2}\Big)\right]^{-1/3}.$$