I numeri complessi

Pagine tratte da
Elementi della teoria delle funzioni olomorfe di una variabile complessa

di G. Vergara Caffarelli, P. Loreti, L. Giacomelli
Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici per le Scienze Applicate,
via A. Scarpa n. 16 – 00161 Roma

1 Forma algebrica dei numeri complessi

Un numero complesso z corrisponde ad una coppia ordinata di numeri reali (x, y). La forma algebrica di un numero complesso z consiste nell'espressione

$$z = x + iy \qquad i = \sqrt{-1} \qquad (i^2 = -1)$$

I numeri reali x e y sono detti rispettivamente parte reale e coefficiente dell'immaginario di z

$$x = \text{ Re } z \qquad\qquad y = \text{ Im } z$$

Se w è un altro numero complesso cioè

$$w = u + iv$$

le operazioni di somma e prodotto fra z e u si definiscono come

$$z + w = (x + u) + i(y + v)$$

$$z \cdot w = (xu - yv) + i(yu + xv) \ .$$

Nella somma si sommano separatamente parte reale e coefficienti dell'immaginario mentre nel prodotto si opera simbolicamente tenendo conto che

$$i^2 = -1$$

In particolare l'opposto $-z$ ed il reciproco z^{-1} $(z \neq 0)$ di un numero complesso sono

$$-z = -x - iy \ , \quad z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2} \ , z \neq 0 \ (x, y) \neq (0, 0).$$

I numeri complessi si possono identificare con i punti del piano reale ed è particolarmente importante la simmetria rispetto all'asse delle ascisse

$$z = x + iy \to \overline{z} = x - iy$$

che prende il nome di coniugio.

Il coniugio è una funzione complessa di variabile complessa che conserva le operazioni di somma e prodotto e se applicato due volte consecutive, torna al valore z di partenza cioè

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$$

$$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

$$\overline{\overline{z}} = z$$

Consideriamo il seguente prodotto

$$z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 = |z|^2 \tag{1}$$

essendo

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(\text{Re } z)^2 + (\text{Im } z)^2} \ \textit{modulo di } z$$

la distanza nel piano xy del punto (x, y) da 0.

Notiamo che

$$|z| = 0 \overset{\text{se e solo se}}{\Longleftrightarrow} z = 0$$

Ora per $z \neq 0$ si ha dalla (1)

$$z\frac{\overline{z}}{|z|^2} = 1 \qquad \text{per cui} \qquad z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

da cui la formula del reciproco.

I numeri complessi, diversamente da quelli reali, non sono un campo ordinabile e conseguentemente non hanno significato le diseguaglianze fra essi.

Ha invece senso parlare di diseguaglianze fra i moduli ed in particolare si ha

Proposition 1

a) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

b) $|z+w| \leq |z| + |w|$ *disuguaglianza triangolare*

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \Leftrightarrow |z \cdot w|^2 = |z|^2 \cdot |w|^2$$

$$|z \cdot w|^2 = z \cdot w \cdot \overline{z \cdot w} = z \cdot w \cdot \overline{z} \cdot \overline{w} = z \cdot \overline{z} \cdot w \cdot \overline{w} = |z|^2|w|^2$$

alla dimostrazione di b) premettiamo le diseguaglianze

$$|\text{Re } z| \leq |z| \leq |\text{Re z}| + |\text{Im } z|$$

$$|\text{Im } z| \leq |z| \leq |\text{Re z}| + |\text{Im } z|$$

[ovvie essendo $|z| = \sqrt{|\text{Re } z|^2 + |\text{Im } z|^2}$] e le relazioni

$$\text{Re } z = \frac{z + \overline{z}}{2} \qquad \text{Im } z = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

[ovvie essendo $z = x + iy$ e $\overline{z} = x - iy \quad x = \text{Re } z \quad y = \text{Im } z$]

Notiamo infine che

$$|\overline{z}| = |z|$$

Ora

$$|z + w|^2 = (z + w)(\overline{z + w}) = (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) =$$
$$= |z|^2 + 2\text{Re }(w\overline{z}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|w\overline{z}| + |w|^2 =$$
$$= |z|^2 + 2|w|\ |z| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2$$

Forma trigonometrica dei numeri complessi

La rappresentazione nel piano dei numeri complessi permette la loro rappresentazione mediante coordinate polari che prende il nome di forma trigonometrica

$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\text{Re } z)^2 + (\text{Im } z)^2}$
$\theta = \arg z$
$x = \rho \cos\theta$
$y = \rho \sin\theta$

Se $\rho = 0$ (cioè $z = 0$) $\arg z$ resta indeterminato.

L'argomento θ è individuato a meno di multipli interi di 2π ($\theta + 2k\pi \ k \in \mathbb{Z}$).

Può essere conveniente fissare un argomento ad esempio

$$-\pi < \text{Arg } z \leq \pi$$

che suole chiamarsi argomento principale.
Uguaglianze fra numeri complessi

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Re } z_1 = \text{Re } z_2 \\ \text{Im } z_1 = \text{Im } z_1 \end{cases}$$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \arg z_1 = \arg z_2 + 2k\pi \end{cases}$$

Prodotto di due numeri complessi in forma trigonometrica

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad r = |z| \quad \theta = \arg z$$

$$w = \rho(\cos\rho + i\sin\varphi) \quad \rho = |z| \quad \varphi = \arg w$$

$$z \cdot w = r\rho[(\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi) + i(\sin\theta\cos\varphi + \sin\varphi\cos\theta)]$$
$$= r\rho[\cos(\theta + \varphi) + i\sin(\theta + \varphi)]$$

naturalmente

$$z \cdot w = |z \cdot w|[\cos(\arg\,(z \cdot w)) + i\sin(\arg\,(z \cdot w))]$$

Per cui

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \qquad\qquad \arg\,(z \cdot w) = \arg z + \arg w$$

Notiamo che la funzione

$$f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$$

è tale che

$$f(\theta) \cdot f(\varphi) = f(\theta + \varphi)$$

il che giustifica la posizione (che dimostreremo in seguito)

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

e la scrittura

$$\boxed{z = |z|e^{i \cdot \theta}} \qquad\qquad \text{(esponenziale complessa)}$$

Notiamo che $|e^{i\theta}| = 1$ (infatti $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$) inoltre poiché

$$\arg\,(z \cdot w) = \arg z + \arg w$$

Moltiplicare z per $e^{i\varphi}$ equivale a far effettuare a z una rotazione di φ

Definizione di esponenziale in $\mathbb{C}$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$\boxed{e^z = e^x(\cos y + i\sin y)}$$

$$|e^z| = e^x \qquad \arg e^z = y + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Formule di Eulero

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \qquad\qquad e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Definizione di $\sin z$ *& * $\cos z$ *in* $\mathbb{C}$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Radici

Osservazione:

$$z = w \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Re } z = \text{ Re } w \\ \text{Im } z = \text{ Im } w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |w| \\ \arg z = \arg w + 2k\pi \end{cases}$$

Uguaglianza di due numeri complessi $k \in \mathbb{Z}$

Radici n–sime di un numero complesso
w radice n–sima di z se e solo se $w^n = z$ *supponiamo* $z \neq 0$

$$w = |w|e^{i\varphi} \qquad\qquad z = |z|e^{i\theta}$$

$$w^n = |w|^n e^{in\varphi} = |z|e^{i\theta}$$

quindi

$$\begin{cases} |w|^n = |z| \\ n\varphi = \theta + 2k\pi \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ \varphi_n = \frac{\theta}{n} + \frac{k}{n}(2\pi) \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

al variare di k le radici n–sime *non* sono infinite; *vi sono solo n radici distinte* infatti

$$\varphi_{k+pn} = \frac{\theta}{n} + \frac{k}{n}(2\pi) + 2\pi p$$

coincide (modulo 2π) con φ_k

$$\varphi_0 = \frac{\theta}{n} \qquad \varphi_1 = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n} \qquad \varphi_2 = \frac{\theta}{n} + \frac{4\pi}{n}$$

$$\varphi_{n-1} = \frac{\theta}{n} + \frac{n-1}{n}(2\pi)$$

$\{z^{1/n}\}$ n–radici n–sime di z:

$$|w_k| = \sqrt[n]{|z|} \qquad \arg w_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

$$z = |z|e^{i\theta}$$

Dando a k i valori interi consecutivi si hanno gli argomenti:

$$(*) \qquad \frac{\theta}{n}, \quad \phi_1 = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}, \quad \phi_2 = \frac{\theta}{n} + \frac{4\pi}{n}, \ldots, \quad \phi_{n-1} = \frac{\theta}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)2\pi$$

Geometricamente: le radici n–esime di un numero complesso si dispongono, a partire dall'angolo $\frac{\theta}{n}$, sulla circonferenza di raggio $\sqrt[n]{|z|}$ e centro l'origine ai vertici di un poligono regolare di n lati inserito nella circonferenza.

La costruzione geometrica è equivalente alla $(*)$ infatti nel passare da una radice alla successiva si compie un passo pari a $1/n$ dell'angolo giro.

Dopo n passi si ritorna nella posizione di partenza.