Esercizio 1

Risoluzione

$f(x) = (|x-1| + |x-3|)e^{x^2}$

$$f(x) = \begin{cases} (2x-4)e^{x^2} & x \geq 3 \\ 2e^{x^2} & 1 < x < 3 \\ (-2x+4)e^{x^2} & x \leq 1 \end{cases}$$

Per determinare i punti i punti in cui si annulla la derivata prima, ossia i punti stazionari, si calcola la derivata

$$f'(x) = \begin{cases} 2e^{x^2} + 2x(2x-4)e^{x^2} = 2e^{x^2}(2x^2 - 4x + 1) & x > 3 \\ 4xe^{x^2} & 1 < x < 3 \\ -2e^{x^2} + 2x(-2x+4)e^{x^2} = -2e^{x^2}(1 + 2x^2 - 4x) & x < 1 \end{cases}$$

e si pone $= 0$.
Tra i punti in cui si annulla possiamo accettare

$$x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2},$$

unico punto stazionario, che risulta essere punto di minimo assoluto, in cui la funzione vale

$$f(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = (2 + \sqrt{2})e^{\frac{3}{2} - \sqrt{2}},$$

Il codominio è dato da $[(2 + \sqrt{2})e^{\frac{3}{2} - \sqrt{2}}, +\infty)$.

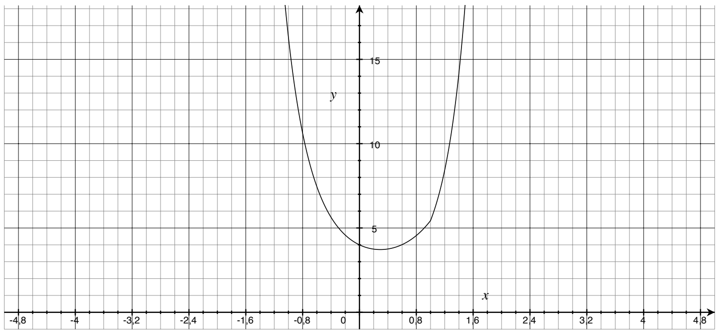

Figura 1: Grafico

(ii) Studio della derivabilità per $x = 1$.
La funzione non è derivabile per $x = 1$, perchè

$$\lim_{x \to 1^+} 4xe^{x^2} = 4e \neq 2e = \lim_{x \to 1^-} -2e^{x^2}(1 + 2x^2 - 4x)$$

Esercizio 2

[3 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{(2x)^2}$$

Risoluzione

$$e^x - \sin x - \cos x = (1 + x + x^2/2) - x - (1 - x^2/2) + o(x^2) = x^2 + o(x^2)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{(2x)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{(2x)^2} = \frac{1}{4}$$

Esercizio 3

Calcolare

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{3\sin t}{4(1-\cos t)^{3/4}}\,\mathrm{d}t \qquad \int_1^e \ln x \mathrm{d}x$$

Risoluzione

Poniamo $x = 1-\cos t$; se $t = \pi/4$ $x = 1-\sqrt{2}/2$, e se $t = \pi/2$ allora $x = 1$. L'integrale diventa

$$\frac{3}{4}\int_{1-\sqrt{2}/2}^{1} \frac{1}{x^{3/4}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\frac{x^{-3/4+1}}{(-3/4+1)}\Bigg]_{1-\sqrt{2}/2}^{1} = 3x^{1/4}\Bigg]_{1-\sqrt{2}/2}^{1} = 3-3(1-\sqrt{2}/2)^{1/4}.$$

Calcolo di

$$\int_1^e \ln x \mathrm{d}x$$

Risoluzione

$$\int_1^e \ln x \mathrm{d}x = x\ln x - x|_1^e = 1$$

Esercizio 4

Calcolare la soluzione della seguente equazione differenziale ordinaria, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$y'' + |\alpha+17|y = 0$$

Risoluzione

Per $\alpha \neq -17$ la soluzione è data da

$$y(x) = c_1\cos(\sqrt{|\alpha+17|}x) + c_2\sin(\sqrt{|\alpha+17|}x)$$

Per $\alpha = -17$ la soluzione è data da

$$y = c_1 x + c_2$$

Domanda 1

(i) Dare la definizione di derivabilità per $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ in x_0

(ii) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = x^2$ in $x_0 = 1$.

(iii) Calcolare la derivabilità parziale rispetto alla variabile x di $f(x,y) = \arctan xy$

Risposta

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è derivabile in x_0 se esiste finito

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$y-1 = 2(x-1) \qquad y = 2x-1$$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è derivabile parzialmente in (x_0, y_o) se esiste finito

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

$$f_x(x,y) = \frac{y}{1+x^2y^2}$$

Domanda 2

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivabile allora

$\boxed{\text{a}}$ f potrebbe non essere continua $\boxed{\text{b}}$ f^2 é derivabile $\boxed{\text{c}}$ $|f|$ é derivabile

Risoluzione <u>(giustificare la risposta)</u>

(a) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivabile allora f è continua.
(b) f^2 é derivabile (prodotto di due funzioni derivabili)
(c) x, $|x|$ (non derivabile in $x = 0$). La risposta giusta è b.

Domanda 3

Sia

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

una serie tale che $a_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Allora

$\boxed{\text{a}}$ Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, anche $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge $\boxed{\text{b}}$ Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge, anche $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

$\boxed{\text{c}}$ Se $a_n \to +\infty$ per $n \to +\infty$ allora $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ converge $\boxed{\text{d}}$ Nessuna delle precedenti

Risoluzione <u>(giustificare la risposta)</u>

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

converge ma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge
(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge ma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge
(c) $a_n = n$ $a_n \to +\infty$ per $n \to +\infty$ ma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge.
La risposta giusta è d.