Analisi Matematica II Elettronica- Comunicazioni a.a. 2023-2024

Prof.ssa Paola Loreti

Ricevimento in presenza: Giovedi-Venerdi: ore 11:55-12:55
richiesta prenotazione via e-mail
Ricevimento on-line su richiesta
Libri: Lezioni di analisi matematica II
N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, Zanichelli
Esercitazioni dI Analisi Matematica II P. Marcellini, C. Sbordone, Zanichelli
Dispensa on line sulla pagina didattica con esercizi.
*La dispensa contiene esercizi di prove d'esame

Ricordiamo

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

La formula di Eulero è una formula nel campo dell'analisi complessa che connette le funzioni trigonometriche e la funzione esponenziale complessa. Per $z \in \mathbb{C}$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

Sia e la base dei logaritmi naturali, i l'unitá immaginaria e seno e coseno le funzioni trigonometriche.

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Sostituendo z con ix si ottiene, riordinando la serie (giustificato per la convergenza assoluta):

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \frac{(ix)^8}{8!} + \cdots$$

$$= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{ix^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots =$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)$$

$$= \cos(x) + i\sin(x)$$

La formula di Eulero fornisce l'identità di Eulero, che mette in relazione tra loro e, i, π, 1 e 0:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Valgono

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cosh(ix),$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{1}{i}\sinh(ix) = -i\sinh(ix).$$

Ricordiamo

$$\sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \quad \cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

Osserviamo le diversità tra la funzione esponenziale ad esponente reale x e la funzione esponenziale ad esponente immaginario ix

- la funzione e^x assume valori reali, è strettamente crescente e quindi iniettiva, infinitesima per $x \to -\infty$ e tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$.
- la funzione e^{ix} assume valori complessi, è limitata, è periodica, dunque non è iniettiva.

Richiami sui numeri complessi

La forma algebrica di un numero complesso z consiste nell'espressione

$$z = x + iy \qquad i = \sqrt{-1} \qquad (i^2 = -1)$$

I numeri reali x e y sono detti rispettivamente parte reale e coefficiente dell'immaginario di z

$$x = \text{ Re } z \qquad\qquad y = \text{ Im } z$$

Se w è un altro numero complesso cioè

$$w = u + iv$$

le operazioni di somma e prodotto fra z e w si definiscono come

$$z + w = (x + u) + i(y + v)$$

$$z \cdot w = (xu - yv) + i(yu + xv) \ .$$

Nella somma si sommano separatamente parte reale e coefficienti dell'immaginario mentre nel prodotto si opera simbolicamente tenendo conto che

$$i^2 = -1$$

In particolare l'opposto $-z$ ed il reciproco z^{-1} $(z \neq 0)$ di un numero complesso sono

$$-z = -x - iy \ , \quad z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2} \ , z \neq 0 \ (x, y) \neq (0, 0)$$

I numeri complessi si possono identificare con i punti del piano reale ed è particolarmente importante la simmetria rispetto all'asse delle ascisse

$$z = x + iy \to \bar{z} = x - iy$$

che prende il nome di coniugio.

Il coniugio è una funzione complessa di variabile complessa e se applicato due volte consecutive, torna al valore z di partenza cioè

$$\overline{\overline{z}} = z$$

Vale

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$$

$$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

Consideriamo il seguente prodotto

$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2 \tag{1}$$

essendo

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\text{Re } z)^2 + (\text{Im } z)^2} \ \textit{modulo di } z$$

la distanza nel piano xy del punto (x, y) da 0.
Notiamo che

$$|z| = 0 \overset{\text{se e solo se}}{\iff} z = 0$$

Ora per $z \neq 0$ si ha dalla (1)

$$z\frac{\overline{z}}{|z|^2} = 1 \qquad \text{per cui} \qquad z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

I numeri complessi, diversamente da quelli reali, non sono un campo ordinabile e conseguentemente non hanno significato le diseguaglianze fra essi.
Ha invece senso parlare di diseguaglianze fra i moduli ed in particolare si ha

a) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
b) $|z + w| \leq |z| + |w|$ diseguaglianza triangolare

La dimostrazione di a) è immediata, infatti:

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \Leftrightarrow |z \cdot w|^2 = |z|^2 \cdot |w|^2$$

$$|z \cdot w|^2 = z \cdot w \cdot \overline{z \cdot w} = z \cdot w \cdot \overline{z} \cdot \overline{w} = z \cdot \overline{z} \cdot w \cdot \overline{w} = |z|^2 |w|^2$$

alla dimostrazione di b) premettiamo la diseguaglianza

$$|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$$

Dimostrare le proprietà

a) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

b) $|z + w| \leq |z| + |w|$ diseguaglianza triangolare

$$z = x + iy \quad w = u + iv$$

$$z \cdot w = (xu - yv) + i(yu + xv) \ .$$

$$w\bar{z} = (xu + yv) + i(-yu + xv)$$

$$z\overline{w} = (xu + yv) + i(yu - xv)$$

$$w\bar{z} + z\overline{w} = 2(xu + yv) = 2\text{Re } (w\bar{z})$$

Calcoliamo

$$|z + w|^2 = (z + w)(\overline{z + w}) = (z + w)(\bar{z} + \overline{w}) =$$

$$= |z|^2 + 2\text{Re } (w\bar{z}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|w\bar{z}| + |w|^2 =$$

$$= |z|^2 + 2|w| \ |z| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2$$

Ricordiamo per t reale

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

Abbiamo

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

1. Esercizio. Calcolare il modulo di $f(z) = e^z$.

$$|e^z| = |e^x(\cos y + i \sin y)| = |e^x||\cos y + i \sin y| = e^x$$

2. Esercizio. Calcolare il modulo di $f(z) = e^{e^z}$.

$$|e^{e^z}| = |e^{e^x(\cos y + i \sin y)}| = |e^{e^x \cos y} e^{ie^x \sin y}| =$$

$$e^{e^x \cos y}|e^{ie^x \sin y}| = e^{e^x \cos y}$$

$z \in \mathbb{C}$, l'esponenziale e^z può essere definito come il limite della successione:

$$e^z = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n .$$

Per $z = x + iy$ risulta:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x + iy}{n}\right)^n = e^x \left(\cos y + i \sin y\right) .$$

La successione in forma trigonometrica si ottiene ponendo:

$$\left(1+\frac{x+iy}{n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{x}{n}\right)+i\frac{y}{n}\right]^n,$$

R e l'argomento ϕ del termine tra parentesi quadre:

$$R=\sqrt{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2};$$

$$\varphi = \arctan\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}} = \arctan\frac{y}{n+x}.$$

Utilizzando la formula di de Moivre scriviamo:

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}}\left[\cos\left(n\cdot\arctan\frac{y}{n+x}\right)+i\sin\left(n\cdot\mathrm{ar}\right.\right.$$

$$= R^n\left[\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi)\right].$$

Per calcolare il limite del modulo e dell'argomento per $n \to +\infty$, risulta:

$$R^n = \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left[1 + \left(\frac{y}{n+x}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}}.$$

Inoltre:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x,$$

ed essendo:

$$\left[1+\left(\frac{y}{n+x}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}}=\left\{\left[1+\left(\frac{y}{n+x}\right)^2\right]^{\left(\frac{n+x}{y}\right)^2}\right\}^{\frac{ny^2}{2(n+x)^2}},$$

con

$$\lim_{n\to+\infty}\left[1+\left(\frac{y}{n+x}\right)^2\right]^{\left(\frac{n+x}{y}\right)^2}=e$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{ny^2}{2\left(n+x\right)^2}=0,$$

risulta:

$$\lim_{n\to+\infty}R^n=e^x.$$

Per il calcolo del limite dell'argomento:

$$\lim_{n\to+\infty} n\varphi = \lim_{n\to+\infty}\left(n\cdot\arctan\frac{y}{n+x}\right) = y$$

Dai risultati ottenuti risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^x\left(\cos y + i\sin y\right) = e^x e^{iy} = e^{x+iy} = e^z.$$

Per quanto concerne il prodotto di numeri complessi risulta utile ricordare la rappresentazione

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta},$$

ove $r = |z|$ e θ é l'argomento di z.
ove

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x}, & x > 0, \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi, & x < 0. \end{cases}$$

Con questa rappresentazione il prodotto di due numeri complessi

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

assume la forma

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

In particolare se

$$z = re^{i\theta},$$

allora z^n assume la forma

$$z^n = r^n e^{in\theta}$$

Nulla cambia se a θ si sostituisce $\theta + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$: vuol dire che l'argomento di z è determinato a meno di un multiplo intero qualsiasi di 2π. Due numeri complessi espressi in forma trigonometrica sono uguali se e solo se hanno moduli uguali e argomenti uguali, a meno di un multiplo intero qualsiasi di 2π. L'argomento principale si ottiene prendendo $\theta \in (-\pi, \pi]$

Esercizio. Verificare l'argomento principale

- $\mathrm{Arg}(1) = 0$,
- $\mathrm{Arg}(1 + i) = \frac{\pi}{4}$,
- $\mathrm{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}$,
- $\mathrm{Arg}(-1) = \pi$,
- $\mathrm{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}$.

1. Esercizio.
   Calcolare $(1+i)^8$. Il numero complesso $1+i$ ha modulo $\sqrt{2}$ e argomento $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$|z^8| = |z|^8 = 16$$

$$argz^8 = \frac{\pi}{4}8 + 2k\pi = 2\pi + 2k\pi$$

$$(1+i)^8 = 16$$

1. Esercizio. Determinare la forma algebrica del numero complesso $\frac{z+i}{z-i}$

$$\frac{z+i}{z-i} = \frac{x+i(y+1)}{x+i(y-1)} = \frac{x+i(y+1)}{x+i(y-1)}\frac{x-i(y-1)}{x-i(y-1)} =$$

$$\frac{x^2+(y^2-1)-ix(y-1)+ix(y+1)}{x^2+(y-1)^2}$$

$$= \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y-1)^2} + i\frac{2x}{x^2+(y-1)^2}$$

Radici

w radice n–sima di z se e solo se $w^n = z$ *supponiamo* $z \neq 0$

$$w = |w|e^{i\varphi} \qquad\qquad z = |z|e^{i\theta}$$

$$w^n = |w|^n e^{in\varphi} = |z|e^{i\theta}$$

quindi

$$|w|^n = |z|$$

$$n\varphi = \theta + 2k\pi$$

ossia

$$|w| = \sqrt[n]{|z|}$$

$$\varphi_n = \frac{\theta}{n} + \frac{k}{n}(2\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$$

Al variare di k le radici n–sime *non* sono infinite; abbiamo solo n radici distinte

$$\varphi_0 = \frac{\theta}{n} \qquad \varphi_1 = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n} \qquad \varphi_2 = \frac{\theta}{n} + \frac{4\pi}{n}$$

$$\varphi_{n-1} = \frac{\theta}{n} + \frac{n-1}{n}(2\pi)$$

$\{z^{1/n}\}$ n–radici n–sime di z:

$$|w_k| = \sqrt[n]{|z|} \qquad \arg\, w_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

$$z = |z|e^{i\theta}$$

Dando a k i valori interi consecutivi si hanno gli argomenti:

$$\phi_0 = \frac{\theta}{n}\,, \quad \phi_1 = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}\,, \quad \phi_2 = \frac{\theta}{n} + \frac{4\pi}{n}, \ldots, \quad \phi_{n-1} = \frac{\theta}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right) 2\pi$$

Geometricamente: le radici n–esime di un numero complesso si dispongono, a partire dall'angolo $\frac{\theta}{n}$, sulla circonferenza di raggio $\sqrt[n]{|z|}$ e centro l'origine ai vertici di un poligono regolare di n lati inserito nella circonferenza. Dopo n passi si ritorna nella posizione di partenza.

Esercizio In $\mathbb{C}$ per ogni intero positivo n esistono esattamente n radici n-esime dell'unità e sono nella forma

$$r_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i \sin\frac{2\pi k}{n} = e^{2\pi ik/n}$$

con $0 \leq k \leq n-1$.
Esse si dispongono nel piano complesso lungo la circonferenza unitaria, ai vertici di un poligono regolare con n lati che ha un vertice in $(1, 0)$.

Calcoliamo le radici quarte di 4 :

$$4 = 4e^{i0} = 4e^{2k\pi i}$$

$$\varphi_k = \frac{2k\pi}{4} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$w_0,\ w_1,\ w_2,\ w_3 \qquad\qquad |w_k| = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$$

$$\arg\ w_0 = 0\ , \quad \arg\ w_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\arg\ w_2 = \pi \qquad\qquad \arg\ w_3 = \frac{3}{2}\pi$$

Formula di triplicazione. Per $x \in \mathbb{R}$

$$\cos 3x + i \sin 3x = (e^{ix})^3 = (\cos x + i \sin x)^3 =$$

$$= \cos^3 x - i \sin^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \sin^2 x \cos x.$$

Uguagliando la parte reale e la parte immaginaria dei due numeri

$$\cos(3x) = \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x$$

$$\sin(3x) = -\sin^3 x + 3 \cos^2 x \sin x$$

La formula del Binomio e la Formula di Eulero.
Più in generale per $x \in \mathbb{R}$
Si ha

$$\cos(nx) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos\frac{(n-k)\pi}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Ricordiamo

$$\cos(nx) = \left(\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}\right) = \left(\frac{(e^{ix})^n + (e^{-ix})^n}{2}\right)$$

Proof.

$$\cos(nx) = \frac{(\cos x + i\sin x)^n + (\cos x - i\sin x)^n}{2} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\cos^k x (i\sin x)^{n-k} + \cos^k x(-i\sin x)^{n-k}}{2} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(i)^{n-k} + (-i)^{n-k}}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(e^{\frac{i\pi}{2}})^{n-k} + (e^{\frac{-i\pi}{2}})^{n-k}}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(e^{\frac{i(n-k)\pi}{2}}) + (e^{\frac{-i(n-k)\pi}{2}})}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos\frac{(n-k)\pi}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x$$

Per $z \in \mathbb{C}$ definiamo

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

$$\cos hz = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

$$\sin hz = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

Esercizio. Dimostriamo

$$|\sin z|^2 = \frac{1}{4}\,|e^{iz} - e^{-iz}|^2 \text{ dove } \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$e^{iz} = e^{ix-y} = e^{-y}(\cos x + i \sin x)$$

$$e^{-iz} = e^{-ix+y} = e^{y}(\cos x - i \sin x)$$

$$e^{iz} - e^{-iz} = (e^{-y} - e^{y}) \cos x + i(e^{-y} + e^{y}) \sin x =$$

$$-2 \sinh y \cos x + 2i \cosh y \sin x$$

$$|e^{iz} - e^{-iz}|^2 = 4\left(\sinh^2 y \cos^2 x + \underbrace{\cosh^2 y}_{1+\sinh^2 y} \sin^2 x\right) = 4(\sin^2 x + \sinh^2 y)$$

quindi

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$$

Definizione. Uno zero di una funzione $f(z)$ è un numero complesso z_0 tale che $f(z_0) = 0$.
Esercizio. Determinare z tale che $\sin z = 0$

$$x = k\pi, \; y = 0, \;\; k \in \mathbb{Z}$$

Una funzione di variabile complessa definita in $\mathbb{C}$ a valori in $\mathbb{C}$:

$$z = x + iy$$

$f(z)$ scrivere l'espressione della funzione complessa nella forma

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

ove le funzioni di due variabili reali u e v sono, rispettivamente, la parte reale e la parte immaginaria della funzione complessa

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{ix}e^{-y}+e^{-ix}e^{y}) = \frac{1}{2}((\cos x+i\sin x)e^{-y}+(\cos x-i\sin x)e^{y})$$

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

Verificare

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$$

$$|\cos z|^2 = (\cos x \cosh y)^2 + (\sin x \sinh y)^2 =$$

$$\cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y$$

$$= \cos^2 x \cosh^2 y + (1 - \cos^2 x) \sinh^2 y = \cos^2 x + \sinh^2 y$$

Determinare z tale che $\cos z = 0$

$$z = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Esercizio. Verificare

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

Osserviamo che questo NON implica che $\cos z$ and $\sin z$ hanno modulo minore o uguale a 1.

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$$

Dato $z \in \mathbb{C}\ \{0\}$, esiste unico θ con $\theta \in (-\pi, \pi]$ tale che $z = |z|e^{i\theta}$. La scrittura di z prende il nome di forma polare, θ viene detto argomento principale e si indica con Arg(z).
La funzione esponenziale nel piano complesso risulta periodica di periodo $2\pi i$.

$$e^z = e^{x+iy} = e^{x+i(y+2\pi)} = e^{z+2\pi i}$$

Non é iniettiva. Vedremo che ogni numero complesso non nullo ha infiniti logaritmi

Logaritmo complesso. Possiamo dare la definizione di logaritmo di un numero complesso $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Sia $z \neq 0$. $\ln z$ sono quei numeri $\omega = x + iy$ tali $e^\omega = z$.
Si ricava

$$e^x(\cos y + i\sin y) = r(\cos\theta + i\sin\theta) \iff x = \ln r \quad y = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Pertanto ogni numero complesso non nullo ha infiniti logaritmi

$$\ln z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$$

$$\ln i = \ln|i| + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$$

Logaritmo principale

$$\arg z \in (-\pi, \pi], \quad k = 0$$

esempio

$$\ln(-2) = \ln(\sqrt{2}) + i\pi,$$

(inteso come argomento principale).
Possiamo ora definire z^α con α reale o complesso.

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$$

esempio:

$$i^i = e^{i \ln i} = e^{i(i(\arg i + 2k\pi))} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi}$$

Tutti i valori sono numeri reali.

Una funzione multivoca è una legge per cui a ogni elemento del dominio è associato due o più distinti valori. Le funzioni multivoche sono usate soprattutto in analisi complessa.
Oltre il logaritmo complesso (già descritto) un esempio di funzione multivoca è la radice ennesima di una variabile complessa $\sqrt[n]{z}, \quad n \in \mathbb{Z}$, intesa come inversa della funzione z^n. Infatti tramite rappresentazione polare

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \cdot \sqrt[n]{e^{i\theta + i2k\pi}} = \sqrt[n]{\rho} \left(e^{\frac{i\theta + i2k\pi}{n}} \right), \ 0 \leq k \leq n-1.$$

$\sqrt[n]{\rho}$ risulta ben definito, l'argomento tuttavia della funzione radice ennesima:

$$\arg(\sqrt[n]{z}) = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \ 0 \leq k \leq n-1$$

non è chiaramente determinato. Osserviamo che anche se z^n é univocamente determinato, la sua inversa non è univocamente determinata

Caso particolare: la radice quadrata di un numero complesso di modulo pari a 1

$$z^{1/2} = e^{i\theta/2+\pi ik} \;\; k = 0, 1$$

Si può operare una scelta per rendere la funzione a valore singolo

Esercizio Calcolare (valore principale)

$$(1+i)^i =$$

$$(i+1)^i = e^{i\ln(i+1)} = e^{i(ln|i+1|+i(\arg(i+1))} = e^{i\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}} = e^{-\frac{\pi}{4}} e^{i\ln\sqrt{2}}$$

Esercizio

$$\sin(2z) = 2\cos z \sin z$$

$\boxed{a}$ Vero $\boxed{b}$ Falso

Esercizio

$$e^{2\pi i} - 1 = 0$$

$\boxed{a}$ Vero $\boxed{b}$ Falso

Esercizio. Esprimere come un numero razionale $0.1\overline{7}$
R. $\frac{8}{45}$
Esercizio. Scrivere lo sviluppo in serie di Taylor della funzione $\ln(1-x)$ con x reale $-1 < x < 1$

Consideriamo serie geometrica di ragione $x \in \mathbb{R}$

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Ridotta n-sima

$$s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$$

.

Se $x = 1$ si ha

$$s_n = 1 + 1 + \cdots + 1 = n.$$

Sia $x \neq 1$. Si ha

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

Se $|x| < 1$ allora $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ e pertanto

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}.$$

Se $x > 1$, poichè $\lim_{n\to\infty} x^n = +\infty$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{1}{x - 1} \cdot \lim_{n\to\infty} x^n - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x - 1} = +\infty$$

Sia ora $x = -1$,

$$s_n = \frac{1-(-1)^n}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2p \\ 1, & n = 2p+1 \end{cases}$$

Pertanto la successione $(s_n)_{\mathbb{N}}$ non è regolare.
Sia infine $x < -1$. Possiamo scrivere $x = -|x|$, e quindi

$$\begin{aligned} s_n = \frac{1-(-|x|)^n}{1+|x|} &= \frac{1-(-1)^n|x|^n}{1+|x|} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1-|x|^{2p}}{1+|x|}, & n = 2p \\ \dfrac{1+|x|^{2p-1}}{1+|x|}, & n = 2p-1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ne segue che $s_{2p} \to -\infty$ e $s_{2p-1} \to +\infty$ e pertanto $\nexists \lim_{n\to\infty} s_n$
Allora

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} +\infty & x \geq 1 \\ \dfrac{1}{1-x} & x \in (-1,1) \\ \nexists & x \leq -1 \end{cases}$$

La Serie geometrica costituisce un caso particolare di serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

quando $a_n = 1 \quad n = 0, 1, \ldots\ldots \quad$ e $x_0 = 0$.
In generale i coefficienti a_n costituiscono una successione di numeri reali.
Con una traslazione $y = x - x_0$ possiamo ricondurci al caso centrato in 0.
Infatti supponiamo di dover studiare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x - 1)^n$$

Si pone $y = x - 1$ e si studia

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^n,$$

che sappiamo essere convergente per $|y| < 1$.

Concentriamo la nostra analisi sul ruolo dei coefficienti a_n. Osserviamo di aver incontrato le serie di potenze con nello studio delle serie numeriche (oltre le serie geometriche). Facciamo alcuni esempi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge (assolutamente) per $|x| < 1$. Il caso $|x| = 1$ deve essere studiato separatamente per $x = 1$ la serie diverge (serie armonica), per $x = -1$ la serie converge (Criterio di Leibniz) pertanto l'insieme dove la serie converge dato da $(-1, 1) \cup \{-1\}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge (assolutamente) per $|x| < 1$. $|x| = 1$ deve essere studiato separatamente per $x = 1$ la serie converge, per $x = -1$ la serie converge (Criterio di Leibniz) pertanto l'insieme dove la serie converge dato da $(-1, 1) \cup \{-1, 1\}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge (assolutamente) per ogni x reale.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge solo per $x = 0$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge (assolutamente) per $|x| < \frac{1}{3}$. $|x| = \frac{1}{3}$ deve essere studiato separatamente per $x = \frac{1}{3}$ la serie diverge, per $x = -\frac{1}{3}$ la serie risulta indeterminata.

Vediamo negli esempi che l'insieme di convergenza risulta un intervallo, l'analisi nei punti di estremo dell'intervallo varia da caso a caso. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

la serie di potenze

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k$$

E l'insieme di convergenza puntuale della serie, ossia
$E := \{x \in \mathbb{R} : S(x) \, \textit{converge} \ \}$

$$E \neq \emptyset$$

$$r := \sup\{|x - x_0| : \ \ x \in E\},$$

In caso di serie centrata nell'origine, l E l'insieme dei punti x in cui la serie converge e

$$r = \sup E$$

Dimostriamo ora che l'intuizione maturata sulla struttura dell'insieme di convergenza corrisponde a un risultato matematico.
Proposizione. Se la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

converge in un punto x_1 allora converge (assolutamente) in ogni punto x tale che $|x| < |x_1|$.

Dimostrazione

Sappiamo che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ converge. Assumiamo $x_1 \neq 0$. Dalla condizione necessaria di convergenza

$$\lim_{n\to+\infty} a_n x_1^n = 0,$$

ne segue che esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per $n > N$

$$|a_n x_1^n| < 1.$$

Allora per $n > N$

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \left|\frac{x^n}{x_1^n}\right| = |a_n x_1^n| \left|\frac{x}{x_1}\right|^n$$

Quindi tenuto conto che $|a_n x_1^n| < 1$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n x^n| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left|\frac{x}{x_1}\right|^n$$

L'ultima serie converge se $|x| < |x_1|$.

Criterio di Cauchy
Se esiste il limite (anche $+\infty$)

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell,$$

allora

$$r = \frac{1}{\ell}$$

Criterio di D'Alembert
Sia $a_n \neq 0$, per ogni n. Se esiste il limite (anche $+\infty$)

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell,$$

allora

$$r = \frac{1}{\ell}.$$

Se $\ell = +\infty$ allora $r = 0$, se $\ell = 0$ allora $r = +\infty$

Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{x}{3}\right)^n.$$

Risulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^n x^n$$

Calcoliamo

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{n\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1}{3}(1+\frac{1}{n}).$$

Ne segue $\ell = \frac{1}{3}$ e $r = 3$

Ricapitolando: data la serie di potenze, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ determiniamo il raggio di convergenza r (i criteri non fanno intervenire x). Allora la serie converge assolutamente per $|x| < r$, non converge per $|x| > r$, in generale non possiamo dire nulla per $|x| = r$.

Ricapitolando

Data la serie di potenze si verifica sempre uno dei seguenti casi

- la serie converge per $x = 0$
- la serie converge per ogni x reale
- la serie converge per $|x| < r$ e non converge per $|x| > r$

Osservazione sulla convergenza semplice

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots = \ln(2)$$

Riordino (operazione non ammessa perchè non abbiamo convergenza assoluta)

$$\underbrace{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}} + \dots$$

blocchi

$$\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{4k}$$

Sommiamo i primi due blocchi

$$\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2(2k-1)} = \frac{1}{2(2k-1)}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots$$

$$\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots) = \frac{1}{2}\ln(2)$$

Esercizi di Analisi Matematica II
- Tutoraggio a cura di Antonio Agresti a.a. 2020-21 per Elettronica Comunicazioni docente Paola Loreti

Esercizio 1

Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n}, \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^n} x^n.$$

Determinazione del raggio di convergenze r di una serie di potenze

Data la serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

- *Criterio di Cauchy (o della radice)*:
  Se
  $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell, \qquad (\text{anche } +\infty)$$
  allora $r = \frac{1}{\ell}$. Nel caso $\ell = \infty$, si ha $r = 0$.
- *Criterio di D'Alambert (o del rapporto)*:
  Se $a_n \neq 0$ per ogni n e
  $$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell, \qquad (\text{anche } +\infty)$$
  allora $r = \frac{1}{\ell}$. Nel caso $\ell = \infty$, si ha $r = 0$.

Svolgimento Esercizio 1

Consideriamo la prima serie di termine generale

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n}.$$

Possiamo applicare uno dei due criteri:

- Criterio della radice;
- Criterio del rapporto.

Svolgimento Esercizio 1

Consideriamo la prima serie di termine generale

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n}.$$

Possiamo applicare uno dei due criteri:

- Criterio della radice;
- Criterio del rapporto.

Svolgimento:

$$\begin{aligned} \ell = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}}{(-1)^n \frac{1}{n}} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| (-1) \frac{n}{n+1} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n(1+\frac{1}{n})} = 1. \end{aligned}$$

Dunque il raggio di convergenza è $r = \frac{1}{\ell} = 1$.

Svolgimento Esercizio 1

Consideriamo la prima serie di termine generale

$$a_n = \frac{e^n}{n^n}.$$

Possiamo applicare uno dei due criteri:

- Criterio della radice;
- Criterio del rapporto.

Svolgimento Esercizio 1

Consideriamo la prima serie di termine generale

$$a_n = \frac{e^n}{n^n}.$$

Possiamo applicare uno dei due criteri:

- Criterio della radice;
- Criterio del rapporto.

Svolgimento:

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{e^n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{n} = 0.$$

Dunque il raggio di convergenza è $r = \frac{1}{\ell} = \infty$.

Esercizio 2

Considerata la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)(1-x)^n$$

quali delle seguenti affermazioni è esatta?

a) Converge in $0 < x < 2$;

b) Converge in $-1 < x < 1$;

c) Converge in $2 < x < 4$.

La risposta giusta è a).

La risposta giusta è a). La serie può essere studiata con i seguenti step:

1. Ponendo $y = 1 - x$ si ottiene la serie di potenze
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) y^n. \tag{2}$$
2. Ricordando il limite notevole
$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1,$$
possiamo studiare il raggio di convergenza della serie (2) con il criterio del rapporto:
$$\ell = \lim_{n \to \infty} \frac{\sin(\frac{1}{n+1})}{\sin(\frac{1}{n})} = \lim_{n \to \infty} \frac{(\frac{1}{n+1})}{(\frac{1}{n})} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$
Quindi $r = 1$.
3. Dallo step 2 abbiamo che (2) converge per $|y| < 1$. Quindi la serie originale converge per
$$\begin{aligned} |1 - x| < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad -1 < 1 - x < 1 \\ &\Leftrightarrow \quad -2 < -x < 0 \end{aligned}$$

Esercizio 3

Considerata la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n(n+1)} x^{2n}$$

quali delle seguenti affermazioni è esatta?

a) Converge in $-e < x < e$;

b) Converge in $-e^2 < x < e^2$;

c) Converge in $-\frac{1}{\sqrt{e}} < x < \frac{1}{\sqrt{e}}$;

d) Converge in $-\sqrt{e} < x < \sqrt{e}$.

La risposta giusta è c).

La risposta giusta è c). La serie può essere studiata con i seguenti step:

1. Ponendo $y = x^2$ si ottiene la serie di potenze
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n(n+1)} y^n. \tag{3}$$
2. Ricordando il limite notevole
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = e,$$
possiamo studiare il raggio di convergenza della serie (3) con il criterio della radice:
$$\begin{aligned} \ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n(n+1)}} &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = e. \end{aligned}$$
Quindi $r = \frac{1}{e}$. Dallo step 2 abbiamo che (3) converge per $|y| < \frac{1}{e}$. Quindi la serie originale converge per
$$|x^2| = x^2 < \frac{1}{e} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{\sqrt{e}} < x < \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Esercizio 4

Determinare i coefficienti dei primi 3 termini dello sviluppo in serie di Taylor intorno al punto 0 della funzione

$$f(x) = \sin(\ln(1 + 2x)).$$

a) I coefficienti sono 0, 1 e 1;

b) I coefficienti sono 0, 2 e 2;

c) I coefficienti sono 0, 2 e -2.

Ricorda che lo sviluppo di Taylor di una funzione f intorno ad un punto $x_0 = 0$ è dato da:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots .$$

La risposta giusta è c).

La risposta giusta è c). Poichè $f(0) = 0$. Resta solamente determinare la derivata prima e seconda e poi calcolarle in $x = 0$.

1. Dalla regola di derivazione delle funzioni composte si ha

$$f'(x) = \cos(\ln(1+2x))\frac{2}{1+2x} \qquad \Rightarrow \qquad f'(0) = 2.$$

2. Dalla regola di Leibnitz (ovvero $(fg)' = f'g + fg'$) abbiamo

$$f''(x) = -\sin(\ln(1+2x))\Big(\frac{2}{(1+2x)}\Big)^2 + \cos(\ln(1+2x))\Big(-\frac{4}{(1+2x)^2}\Big)$$

Dunque

$$f''(0) = -4.$$

Esercizio 5

Considerata la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\left(\frac{1}{2n}\right)\right)(x^2+2)^n$$

quali delle seguenti affermazioni è esatta?

a) Non converge mai;

b) Converge in $-1 < x < 1$;

c) Converge in $1 < x < 3$.

La risposta giusta è a).

La risposta giusta è a).

1. Ponendo $y = x^2 + 2$ si ottiene la serie di potenze
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{2n}\right)\right) y^n. \tag{4}$$
2. Ricordando il limite notevole
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$
possiamo studiare il raggio di convergenza della serie (4) con il criterio del rapporto:
$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1-\cos\left(\frac{1}{2(n+1)}\right)\right)}{\left(1-\cos\left(\frac{1}{2n}\right)\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\frac{1}{4(n+1)^2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\frac{1}{4n^2}\right)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$
Quindi $r = 1$. Dallo step 2 abbiamo che (4) converge se $|x^2 + 2| < 1$. Poichè $x^2 + 2 \geq 2$ la precedente disuguaglianza non è mai verificata.

Serie di Potenze ed equazione di Bessel di ordine zero.

- Illustriamo il Metodo di Frobenius per illustrare come determinare la soluzione dell'equazione di Bessel di ordine 0.

- Equazioni differenziali ordinarie del second'ordine lineari omogenee

$$xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0, \qquad x > 0$$

Ricordiamo le equazioni di Bessel di ordine n

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0, \qquad x > 0$$

Aggiungiamo la condizione in $x = 0$, $y(0) = 1$,

$$y'(x) = -xy''(x) - xy(x), \qquad y'(0) = 0$$

Ricapitolando vogliamo risolvere

$$\begin{cases} xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0, & x > 0, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Assumiamo che la soluzione sia esprimibile in serie di potenze

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Dalla condizione $y(0) = 1$ si ricava $a_0 = 1$. Dunque

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + \cdots =$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 1 + \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+1} x^{m+1}$$

Calcoliamo i singoli termini

$$xy(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

$$y'(x) = a_1 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) a_{n+2} x^{n+1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n \qquad xy''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^{n+1}$$

Sostituendo

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+1}+a_1+\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)a_{n+2}x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

Riordinando

$$a_1 + \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n + (n+2)^2 a_{n+2}\right)x^{n+1} = 0.$$

Ricaviamo $a_0 = 1, \quad a_1 = 0.$

$$a_n + (n+2)^2 a_{n+2} = 0 \qquad a_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)^2} a_n$$

Per n dispari $a_n = 0$, per n pari allora $n = 2k \;\; k \in \mathbb{N}$

$$a_{2(k+1)} = -\frac{1}{2^2(k+1)^2} a_{2k}$$

$$a_2 = -\frac{1}{2^2} a_0 = -\frac{1}{2^2}$$

$$a_4 = -\frac{1}{2^2}\frac{1}{2^2} a_2 = \frac{1}{2^2}\frac{1}{2^2}\frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^2}\frac{1}{2^4}$$

$$a_6 = -\frac{1}{2^2}\frac{1}{3^2} a_4 = -\frac{1}{2^2}\frac{1}{3^2}\frac{1}{2^2}\frac{1}{2^4} = -\frac{1}{2^6}\frac{1}{(3!)^2}$$

$$\cdots$$

$$\cdots$$

$$\cdots$$

$$\begin{cases} a_{2n+1} = 0, \\ a_{2n} = (-1)^n \frac{1}{2^{2n}} \frac{1}{(n!)^2}, \end{cases}$$

Otteniamo

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{2n}} \frac{1}{(n!)^2} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \frac{x^{2n}}{2^{2n}} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n}$$

funzione di Bessel di ordine 0.

Esercizio

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

$(y(x) = \cos x)$.
Assumiamo che la soluzione sia esprimibile in serie di potenze

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + \cdots =$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big((n+2)(n+1) a_{n+2} + a_n \Big) x^n = 0$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0$$

Per n dispari i coefficienti sono nulli per n pari

$$a_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)(n+1)} a_n$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

- Derivazione termine a termine.

Teorema. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $r > 0$ e con somma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad |x| < r.$$

La serie derivata

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

ha lo stesso raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la somma $f(x)$ risulta derivabile e vale

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad |x| < r.$$

Vediamo un'applicazione del risultato.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \qquad |x| < 1$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{n-1} \qquad |x| < 1$$

- Integrazione termine a termine.

Teorema. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $r > 0$ e con somma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad |x| < r.$$

Si ha

$$\int_0^x f(s)ds = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad |x| < r$$

- Utilizziamo questo risultato.

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} \qquad |x| < 1.$$

Integrando

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \qquad |x| < 1$$

- $$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \qquad |x| < 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad \text{per } |x| < 1$$

Possiamo utilizzare il risultato per integrare per serie alcune funzioni non integrabili elementarmente. Per $a > 0$ calcoliamo

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x} d\,x = \int_0^a \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n} dx$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \frac{1}{2n+1} a^{2n+1}.$$

Introduciamo la funzione degli errori introdotta da Gauss

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} t^{2n} dx =$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(2n+1)} x^{2n+1}.$$

Serie di potenze Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $|x| < 1$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{j} x^j$$

ove

$$\binom{\alpha}{j} = \begin{cases} 1 & j = 0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-j+1)}{j!} & j \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Raggio di convergenza (criterio del rapporto)

$$\lim_{j \to +\infty} \frac{|\binom{\alpha}{j+1}|}{|\binom{\alpha}{j}|} = \lim_{j \to +\infty} \frac{|\alpha - j|}{|j+1|} = 1$$

Osserviamo $f^j(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-j+1)(1+x)^{\alpha-j}$

$$f^j(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-j+1)$$

$$\begin{cases} 1 & j = 0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-j+1)}{j!} & j \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Osserviamo per $\alpha = 1/2$

$$\binom{\frac{1}{2}}{j} = (-1)^{j-1} \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2} \cdots \frac{2j-3}{2}}{j!} = (-1)^{j-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots (2j-3)}{2^j j!} =$$

$$(-1)^{j-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots (2j-3)}{(2j)(2(j-1))(2(j-2))\ldots 2}$$

$$= (-1)^{j-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots (2j-3)}{(2j)!!} = (-1)^{j-1} \frac{(2j-3)!!}{(2j)!!}$$

ove $n!!$ indica
se n dispari il prodotto di tutti i dispari tra 1 e n,
se n pari il prodotto di tutti i pari tra 2 e n.

$$\binom{\alpha}{j} = \prod_{k=1}^{j} \frac{\alpha - k + 1}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!}$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{2} = ?$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{j=2}^{+\infty} \binom{\frac{1}{2}}{j} x^j =$$

$$1 + \frac{1}{2}x + \sum_{j=2}^{+\infty} (-1)^{j-1} \frac{(2j-3)!!}{(2j)!!} x^j \qquad |x| < 1$$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{j} x^j =$$

$$1 + \sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^j \frac{(2j-1)!!}{(2j)!!} x^j \qquad |x| < 1$$

sostituiamo $-x^2$ al posto di x

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(2j-1)!!}{(2j)!!} x^{2j} \qquad |x| < 1$$

Integrando per serie

$$\arcsin x = x + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(2j-1)!!}{(2j)!!(2j+1)} x^{2j+1} \quad |x| < 1$$

Somme di serie

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \qquad |x| < 1$$

$$x = 1 \quad \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad \text{per } |x| < 1$$

$$x = 1 \quad \ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Data una funzione $f \in C^\infty(x_0 - r, x_0 + r)$ la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

si dice serie di Taylor di f relativa al punto x_0.
Se vale

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad |x - x_0| < r,$$

la funzione f si dice sviluppabile in serie di Taylor per
x: $\quad |x - x_0| < r$.

Il seguente esempio mostra che che esistono funzioni $f \in C^\infty(-r, r)$ che non sono uguali alla serie di Taylor.
Esempio

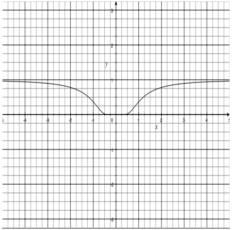
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

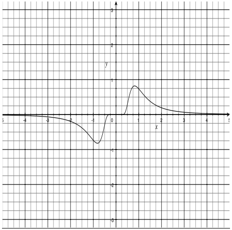
La funzione presenta derivate tutte nulle in $x_0 = 0$ Per $x \neq 0$

$$De^{-\frac{1}{x^2}} = \left(D\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$$

....

la serie di Taylor ad essa relativa vale 0 e non coincide con la funzione.





La funzione è estremamente piatta attorno all'origine, e ciò perchè tutte le sue derivate sono nulle in 0. Ciò non vuol dire che f sia costante vicino a 0, come segue dalla sua definizione.

Ricordiamo

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

- La serie di Taylor di una funzione pari contiene solo potenze pari.
- La serie di Taylor di una funzione dispari contiene solo potenze dispari.

f dispari $0 \in \mathrm{dom} f$ allora $f(0) = 0$

Ci occupiamo di condizioni di sviluppabilità di una funzione in serie di Taylor.
Definizione. Sia f derivabile $n+1$ volte, il resto dato dalla formula di Taylor è definito come

$$r(x_0, n, x) = r_n(x_0, x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Sappiamo (resto di Peano) che

$$r(x_0, n, x) = o((x - x_0)^n) \qquad x \to x_0.$$

Ci occupiamo di condizioni per cui

$$r(x_0, n, x) \to 0 \qquad n \to +\infty$$

Resto Integrale e di Lagrange.
Deduciamo ora altre espressioni del resto
Teorema. Se f è derivabile $n+1$ volte, il resto si può esprimere

$$r_n(x_0, x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{n+1}(t)}{n!}(x-t)^n dt$$

La dimostrazione del risultato segue il principio di induzione. Per $n = 0$ il risultato segue da

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)dt.$$

Assumiamo vera l'affermazione al passo $n-1$. Il resto al passo $n-1$ si esprime

$$r_{n-1}(x_0, x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Si ha

$$r_{n-1}(x_0,x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f^n(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}dt = \int_{x_0}^{x} \frac{f^n(t)}{(n-1)!}\left[-\frac{(x-t)^n}{n}\right]' dt =$$

$$-\left[\frac{(x-t)^n}{n!}f^n(t)\right]_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt$$

$$= \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt$$

In conclusione

$$r(x_0, n-1, x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k =$$

$$\frac{(x-x_0)^n}{n!} f^n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt,$$

e quindi

$$r_n(x_0, x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k =$$

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k - \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^n(x_0) =$$

$$\int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt.$$

Dalla formula del resto integrale si deduce la formula del resto di Lagrange. Teorema. Se f è derivabile $n+1$ volte in un intervallo I e x, x_0 sono punti di I, esiste un punto ξ compreso tra x e x_0 tale che

$$r_n(x_0, x) = f^{n+1}(\xi)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

Dimostrazione.

$$r_n(x_0, x) = \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt =$$

Assumiamo $x > x_0$. In $[x_0, x]$ applichiamo il teorema della media integrale

$$m \leq f^{n+1}(t) \leq M,$$

essendo

$$m = \min_{[x_0,x]} f^{n+1}(t) \qquad M = \max_{[x_0,x]} f^{n+1}(t).$$

Abbiamo

$$m\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt \leq M\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ossia

$$m \leq \left[\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right]^{-1} \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt \leq M$$

Dal teorema dei valori intermedi applicato a f^{n+1}, si ha che esiste ξ per cui

$$f^{n+1}(\xi) = \left[\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right]^{-1} \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt,$$

da cui la tesi.

Se la funzione f è derivabile infinite volte in un intervallo (a, b) e se esistono due numeri reali L e M tali che

$$|f^{(n)}(x)| \leq ML^n \qquad \forall x \in (a, b) \quad \forall n,$$

allora per ogni $x_0 \in (a, b)$ la funzione è sviluppabile in serie di Taylor centrata in x_0.
Esempio.

$$f(x) = \sin x \quad f(x) = \cos x$$

$$|f^{(n)}(x)| \leq 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n$$

Se I è un intervallo aperto. Allora $f : I \to \mathbb{R}$si dice analitica in I se per ogni $x_0 \in I \;\; \exists R > 0$ tale che
(a) $(x_0 - R, x_0 + R) \subset I$,
(b) f è somma di una serie di potenze in $(x_0 - R, x_0 + R)$
Tutti i polinomi sono funzioni analitiche. Per un polinomio, l'espansione in serie di potenze contiene solo un numero finito di termini non nulli.
Una funzione è analitica se e solo se, preso comunque un punto appartenente al dominio della funzione, esiste un suo intorno in cui la funzione coincide col suo sviluppo in serie di Taylor.
Esempi: e^x, $\sin x$, $\cos x$.
L'insieme di tutte le funzioni analitiche in I si indica $C^\omega(I)$.
Si definiscono le funzioni analitiche reali e le funzioni analitiche complesse: risultano simili in alcuni aspetti e differenti in altri.

$$f \in C^\omega(I) \Rightarrow f \in C^\infty(I) \quad \text{se } f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

La situazione è diversa nel caso delle funzioni analitiche complesse.

Sia $z \in \mathbb{C}$. Ripartendo dalla serie geometrica e ricordando che

$$|z| = \sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2}$$

il modulo di z. Abbiamo che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

converge se $|z| < 1$. Nel piano complesso $(\Re z, \Im z)$ l'insieme $\sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2} < 1$ individua il cerchio di centro 0 e raggio 1 privato della circonferenza. Il raggio di convergenza (in questo caso si ha perfetta corrispondenza con l'immagine grafica) risulta 1.

Successioni.
Successione $c_n, \; n \in \mathbb{N}$ di numeri complessi: applicazione di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{C}$. La successione $\{c_n\}, \; n \in \mathbb{N}$ ha limite $c \in \mathbb{C}$ se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un numero $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > n_\epsilon$ si ha $|c_n - c| < \epsilon$.
Si scrive

$$\lim_{n \to +\infty} c_n = c$$

Vale (a)

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = c \iff \lim_{n\to+\infty} |c_n - c| = 0$$

(b)

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = c \iff \begin{cases} \lim_{n\to+\infty} \Re(c_n) = \Re(c) \\ \lim_{n\to+\infty} \Im(c_n) = \Im(c) \end{cases}$$

(b) Per le proprietà della norma su $\mathbb{C}$:
abbiamo

$$\max\{|\Im(c_n - c)|, |\Re(c_n - c)|\} \leq |c_n - c| \leq |\Im(c_n - c)| + |\Re(c_n - c)|,$$

passando al limite si ottiene la tesi.

Esercizio. Studiare il comportamento della successione geometrica $c_n = z^n$, per $|z| < 1$. Sia $|z| < 1$.

$$\lim_{n\to+\infty} z^n = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} |z^n - 0| = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} |z|^n = 0$$

Studiare il comportamento della successione

$$c_n = \frac{1}{(1+i)^n}$$

Studiare il comportamento della successione

$$c_n = \frac{(-1)^n n}{2n+i}$$

$$c_n = \frac{(-1)^n n}{2n+i} = \frac{(-1)^n n(2n-i)}{4n^2+1} = \frac{2(-1)^n n^2}{4n^2+1} - i\frac{(-1)^n n}{4n^2+1}....$$

Una serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$$

converge per alcuni valori della variabile z (almeno per $z = c$) e non convergere per altri. Esiste un numero nei reali estesi positivo R con $0 \leq R \leq +\infty$ tale che la serie converge quando $|z-c| < R$ e non converge quando $|z-c| > R$.

$$R = \frac{1}{\ell}$$

$$\ell = \lim_{k \to +\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$$

(se esiste il limite) Esercizio: Determinare il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (iz)^n$$

$$R^{-1} = \lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$$

Si ha

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{per ogni } z \in \mathbb{C}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots \quad \text{per ogni } z \in \mathbb{C}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{per ogni } z \in \mathbb{C}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots \quad \text{per ogni } z \in \mathbb{C}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{per ogni } z \in \mathbb{C}$$

Esercizio Sia $|z| < 1$. Dare la scrittura in serie di potenze della funzione

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

$$f(z) = -\frac{1}{z-2}$$

Osserva

$$-\frac{1}{z-2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

...

Polinomi trigonometrici.
Funzioni periodiche.
Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice periodica di periodo $T > 0$ se

$$f(x+T) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Il più piccolo numero T (se esiste) si dice periodo minimo.
Un polinomio trigonometrico è una combinazione lineare finita di funzioni $\sin(nx)$ e $\cos(nx)$. E' una funzione periodica di periodo 2π.

$$s_n(x) = a_0/2 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

Dimostrazione

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^{a+T} f(x)dx - \int_0^a f(x)dx =$$

$$\int_0^{a+T} f(x)dx - \int_0^a f(x+T)dx$$

$$\int_0^a f(x+T)dx = \int_T^{a+T} f(x)dx$$

Ne consegue

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

Ortonormalità

Per $n = 1, 2, \dots; \quad m = 1, 2, \dots$ risulta

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\sin(nx)dx = 0$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)dx = \delta_{m,n}; \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx = \delta_{m,n}$$

$\delta_{m,n}$ il simbolo di Kronecker

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

Identità di Werner per $n, m \in \mathbb{N}$

$$\sin(mx)\sin(nx) = \frac{1}{2}\big((\cos((n-m)x) - \cos((n+m)x)\big)$$

$$\sin(nx)\cos(mx) = \frac{1}{2}\big((\sin((n-m)x) + \sin((n+m)x)\big)$$

$$\cos(nx)\cos(mx) = \frac{1}{2}\big((\cos((n-m)x) + \cos((n+m)x)\big)$$

$$\sin^2(nx) = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2nx)\big)$$

$$\cos^2(nx) = \frac{1}{2}\big(1 + \cos(2nx)\big)$$

Per $n \neq m \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)dx =$$

$$\frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} (\cos((n-m)x)dx - \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n+m)x)\ dx \right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-m} \sin((n-m)x|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n+m} \sin((n+m)x|_{-\pi}^{\pi} \right) = 0$$

Per $n \neq m \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \Big((\sin((n-m)x)+\sin((n+m)x)\big)dx\Big) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi}(\sin((n-m)x)dx + \int_{-\pi}^{\pi}\sin((n+m)x)dx\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n-m}\cos((n-m)x|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n+m}\cos((n+m)x|_{-\pi}^{\pi}\right) = 0$$

- la somma di due funzioni pari: pari ?
- la somma di due funzioni dispari: dispari?
- il prodotto di due funzioni pari: pari?
- il prodotto di due funzioni dispari: pari?
- il prodotto di una funzione pari e di una funzione dispari: dispari?
- la derivata di una funzione derivabile pari: dispari ?
- la derivata di una funzione derivabile dispari: pari?

Serie di Fourier. Supponiamo che la successione di somme parziali $s_n(x)$ converga per ogni $x \in R$. Otteniamo la serie trigonometrica di coefficienti a_0, a_k, b_k.

$$a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

Data una funzione f periodica di periodo 2π ci chiediamo se essa sia sviluppabile in una serie trigonometrica ossia se si possono determinare i coefficienti a_0 a_k b_k in modo che la serie converga ed abbia come somma $f(x)$.

Assumiamo

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

Moltiplicando $f(x)$ per $\cos(mx)$ e integrando tra $-\pi, \pi$ si ottiene

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx$$

Moltiplicando $f(x)$ per $\sin(mx)$ e integrando tra $-\pi, \pi$ si ottiene

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx) dx$$

Le costanti sopra definite si chiamano coefficienti di Fourier di $f(x)$.
La serie, una volta specificati i coefficienti, si chiama Serie di Fourier di $f(x)$. Jean Baptiste Joseph Fourier (Auxerre, 21 marzo 1768 -Parigi, 16 maggio 1830)

Esempio. Onda quadra: un segnale composto da un'alternanza regolare di due valori

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

prolungata in modo periodico in $\mathbb{R}$.
I coefficienti di Fourier sono

$$a_0 = 1$$

$$a_k = 0$$

$$b_k = \frac{1 - (-1)^k}{k\pi}$$

La serie di Fourier risulta

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$$

Funzioni pari:

$$b_k = 0 \qquad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx$$

$f(x)\sin(kx) = F(x)$ dispari

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx = \int_{-\pi}^{0} F(x)dx + \int_0^{\pi} F(x)dx =$$

$$-\int_{\pi}^{0} F(-x)dx + \int_0^{\pi} F(x)dx = \int_{\pi}^{0} F(x)dx + \int_0^{\pi} F(x)dx$$

Funzioni dispari:

$$a_k = 0 \qquad b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx$$

$f(x)\cos(kx) = F(x)$ dispari

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx = \int_{-\pi}^{0} F(x)dx + \int_0^{\pi} F(x)dx =$$

$$-\int_{\pi}^{0} F(-x)dx + \int_0^{\pi} F(x)dx = \int_{\pi}^{0} F(x)dx + \int_0^{\pi} F(x)dx$$

Sviluppo in serie di Fourier di $f(x) = \sin^3 x + \sin^2 x + \cos x$ (polinomio trigonometrico)

$$f(x) = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2x)\big)\sin x + \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2x)\big) + \cos x$$

$$\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos(2x)\sin x + \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) + \cos x =$$

$$\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \cos x =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{4}\sin(3x) + \cos x$$

Sia data

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}) \\ \frac{1}{2} & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ 0 & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$$

ripetuta in modo periodico in $\mathbb{R}$. Calcolare il coefficiente a_0, b_3, a_3 e a_{100} della serie di Fourier.

La funzione risulta pari: $b_3 = 0$,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos(kx)dx = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k}$$

$$a_3 = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(\frac{3}{2}\pi)}{3} = -\frac{1}{3\pi}$$

$$a_{100} = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(50\pi)}{100} = 0$$

Esercizio. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \leq 0 \\ \sin x & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

prolungata in modo periodico in $\mathbb{R}$, calcolare la serie di Fourier.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x dx = -\frac{1}{\pi} \cos x|_0^\pi = \frac{2}{\pi}$$

$$\sin(x) \cos(kx) = \frac{1}{2}\big((\sin((1-k)x) + \sin((1+k)x)\big)$$

$$\sin(x) \sin(kx) = \frac{1}{2}\big((\cos((k-1)x) - \cos((1+k)x)\big)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(kx)\sin x dx = ?$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \big((\sin((1-k)x) + \sin((1+k)x)\big) dx =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\cos((1-k)x)}{1-k} + \frac{\cos((1+k)x)}{1+k}\right)$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{(-1)^{k-1}}{1-k} - \frac{1}{1-k} + \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} - \frac{1}{k+1}\right) =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{(-1)^{k}}{1-k} + \frac{1}{1-k} + \frac{(-1)^{k}}{k+1} + \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left((-1)^k\left(\frac{1}{1-k} + \frac{1}{k+1}\right) + \left(\frac{1}{1-k} + \frac{1}{k+1}\right)\right) =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2(-1)^k}{1-k^2} + \frac{2}{1-k^2}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{(-1)^k + 1}{1-k^2}$$

$$\begin{cases} 0 & k = 1 \\ \frac{1}{\pi}\frac{2}{1-4m^2} & k = 2m \\ 0 & k = 2m+1 \end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \sin(kx) dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \big((\cos((k-1)x) - \cos((k+1)x)\big) dx =$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} & k = 1 \\ 0 & k \neq 1 \end{cases}$$

Serie di Fourier

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x + \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(1-4m^2)}\cos(2mx)$$

- Esercizio. Data la funzione

$$f(x) = x|x|,$$

per $x \in [-\pi, \pi)$ e prolungata per periodicità in $\mathbb{R}$ determinare le serie di Fourier.

La funzione è dispari, pertanto $a_0 = 0$, $a_k = 0, \forall k \in N$.

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -x^2 \sin(kx)dx + \int_{0}^{\pi} x^2 \sin(kx)dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\int_{\pi}^{0} -x^2 \sin k(-x)dx + \int_{0}^{\pi} x^2 \sin(kx)dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi} x^2 \sin(kx)dx + \int_{0}^{\pi} x^2 \sin kxdx\right] = \frac{2}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi} x^2 \sin(kx)dx\right].$$

Risulta:

$$\int x^2 \sin kx dx = -\int x^2 \frac{1}{k}(\cos(kx))' dx =$$

$$-\frac{1}{k}x^2(\cos(kx)) + \frac{2}{k}\int x\cos(kx)dx =$$

$$\int_0^\pi x^2 \sin kx dx = -\frac{1}{k}x^2(\cos kx)|_0^\pi + \frac{2}{k}\int_0^\pi x\cos(kx)dx =$$

$$= -\frac{1}{k}\pi^2(-1)^k + \frac{2}{k^2}\int_0^\pi x(\sin(kx))' dx =$$

$$= -\frac{1}{k}\pi^2(-1)^k + (\frac{2}{k^3}(-1)^k - \frac{2}{k^3})$$

Quindi indicata con S la serie di Fourier relativa a f, si ha

$$S = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{k}\pi^2(-1)^k + \frac{2}{k^3}(-1)^k - \frac{2}{k^3} \right) \sin(kx).$$

Sia f la funzione periodica di periodo 2π ottenuta prolungando per periodicitá su $\mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ -3x, & 0 < x \leq \pi \end{cases} .$$

Determinare la serie di Fourier di f .

La serie di Fourier è data da

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)\right],$$

dove:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, k = 1, 2, ...$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(kx) dx, k = 1, 2, ...$$

Calcoliamo i coefficienti di Fourier della f.

$$a_0 = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 3x dx = -\frac{3}{2}\pi;$$

$$a_k = -\frac{3}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(kx) dx = -\frac{3}{\pi}\left[\frac{(-1)^k - 1}{k^2}\right];$$

$$b_k = -\frac{3}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(kx) dx = -\frac{3}{k}(-1)^{k+1} = \frac{3}{k}(-1)^k.$$

la serie di Fourier richiesta è:

$$-\frac{3\pi}{4} + \frac{6}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} + 3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\sin(kx)}{k}.$$

Sia f la funzione periodica di periodo 2π ottenuta prolungando per periodicità su $\mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \max\{2, 2-x\}, \quad x \in (-\pi, \pi].$$

Determinare la serie di Fourier di f.

La serie di Fourier è data da

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right],$$

dove:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx, k = 1, 2, ...$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx, k = 1, 2, ...$$

Osserviamo :

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x \in (-\pi, 0) \\ 2, & x \in [0, \pi] \end{cases} .$$

Dunque:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(2-x)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2dx = \frac{\pi}{2} + 4.$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(2-x)\cos(kx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2\cos(kx)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 2\cos(kx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2\cos(kx)dx - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos(kx)dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)dx - \frac{1}{\pi}\frac{1}{k}x\sin(kx)_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{0} \sin(kx)dx$$

$$= \frac{1}{\pi k^2}[(-1)^k - 1].$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(2-x)\sin(kx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2\sin(kx)dx =$$

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)dx - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin(kx)dx =$$

$$\frac{1}{\pi k}x\cos(kx)|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{0}\cos(kx)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi k}\pi(-1)^k = \frac{1}{k}(-1)^k.$$

La serie di Fourier richiesta è:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+4\right) + \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{\pi k^2}[(-1)^k - 1]\cos(kx) + \frac{1}{k}(-1)^k\sin(kx)\right].$$

Serie di Fourier per funzioni periodiche di periodo T.
Sia f periodica di periodo T.
La serie di Fourier di f risulta

$$a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\frac{2k\pi}{T}x) + b_k \sin(\frac{2k\pi}{T}x)$$

i cui coefficienti sono

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(\frac{2k\pi}{T}x)dx$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin(\frac{2k\pi}{T}x)dx$$

Per funzioni pari compaiono solo i coseni:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\,\mathrm{d}x \\
a_k &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)\,\mathrm{d}x \\
b_k &= 0
\end{aligned}
$$

mentre per funzioni dispari compaiono solo i seni:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= a_k = 0 \\
b_k &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Esercizio

$f(x) = |\sin x|$. Quanto vale il coefficiente a_0?

a) $\dfrac{2}{\pi}$, b) $\dfrac{3}{\pi}$, c) $\dfrac{4}{\pi}$.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\, dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin x\, dx \\ &= \frac{2}{\pi}(-\cos x)|_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi}(-\cos \pi + \cos 0) = \frac{4}{\pi}. \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)\,\mathrm{d}x$$

$$b_k = 0$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin x\, dx \\ &= \frac{4}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{4}{\pi}. \end{aligned}$$

$$a_1 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin x \cos\left(\frac{2\pi}{\pi} x\right) \, \mathrm{d}x$$

$$a_1 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin x \cos(2x) \, dx = -\frac{4}{3\pi}$$

La serie di Fourier di f risulta

$$a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2kx)$$

Il primo coefficiente nella somma è quello di $\cos(2x)$

Torniamo a $(-\pi, \pi]$ e calcoliamo

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos(kx) \, dx.$$

Come posso riscrivere $\sin x \cos(kx)$? Per integrare è meglio avere somme invece che prodotti....

Formula di Werner:

$$\sin \alpha \, \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)].$$

Esercizio

Dalle formule di Werner :

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos(kx)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x(1+k)) + \sin(x(1-k))\, dx.$$

1. Caso $k = 1$:
$$a_1 = 0.$$
2. Caso $k > 1$: Utilizzando $\cos(m\pi) = (-1)^m$
$$\begin{aligned} a_k &= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(x(1+k))}{1+k} + \frac{\cos(x(1-k))}{1-k}\right]_{x=0}^{x=\pi} \\ &= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^{1+k}-1}{1+k} + \frac{(-1)^{1-k}-1}{1-k}\right] \end{aligned}$$

Esercizio

a_k:

$$a_k = \begin{cases} 0, & \text{se } k \text{ è dispari} \\ -\frac{1}{\pi}\left[\frac{-2}{k+1} - \frac{2}{1-k}\right] = \frac{4}{\pi(1-k^2)}, & \text{se } k \text{ è pari} \end{cases}$$

La serie di Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kx)$$

Calcolo di somme di serie. (Fourier)

- $$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

  prolungata in modo periodico in $\mathbb{R}$.
  La serie di Fourier risulta

  $$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$$

  In $x = 0$ risulta $S = \frac{1}{2}$
  In $x = \frac{\pi}{2}$ si ottiene

  $$f(\frac{\pi}{2}) = 1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

  e

  $$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Forma esponenziale della serie di Fourier

$$a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ikx}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ikx} = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\gamma_k \cos(kx) + i\gamma_k \sin(kx)$$

$$+\gamma_{-k} \cos(-kx) + i\gamma_{-k} \sin(-kx) \Big) =$$

$$\gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_k + \gamma_{-k}) \cos(kx) + i(\gamma_k - \gamma_{-k}) \sin(kx)$$

$$\gamma_0 = a_0/2$$

$$\gamma_k + \gamma_{-k} = a_k$$

$$i(\gamma_k - \gamma_{-k}) = b_k$$

$$\gamma_k + \gamma_{-k} = a_k$$

$$\gamma_k - \gamma_{-k} = -ib_k$$

Sommando

$$\gamma_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$$

Sottraendo

$$\gamma_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$$

E' utile scrivere la serie di Fourier nella forma

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ikx}$$

Risulta per $n \neq m$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}dx = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

In conclusione

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}dx = \delta_{n,m}$$

$$\gamma_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

Calcolo di alcuni termini non nulli della serie di Fourier della funzione $f(x) = x$ in $[-\pi, \pi)$ ripetuta per periodicitá in $\mathbb{R}$.

$$\gamma_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} dx$$

$$\gamma_0 = 0$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-ix}dx = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{-i}xe^{-ix}|_{-\pi}^{\pi} + e^{-ix}|_{-\pi}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(i\pi e^{-i\pi} + i\pi e^{i\pi} + e^{-i\pi} - e^{i\pi}\right) = i\cos\pi = -i$$

$$\gamma_{-1} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{ix}dx = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{i}xe^{ix}|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{i^2}e^{ix}|_{-\pi}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(-i\pi e^{-i\pi} - i\pi e^{-i\pi} + e^{i\pi}e^{-i\pi}\right) = -i\cos\pi = i$$

$$S = ie^{-ix} - ie^{ix} + ...$$

$$S = 2\sin x + ...$$

Trovare i successivi:

$$S = ie^{-ix} - ie^{ix} - \frac{1}{2}ie^{-2ix} + \frac{1}{2}ie^{2ix} + ...$$

$$S = 2\sin x - 1\sin(2x) + ...$$

$$S = ie^{-ix} - ie^{ix} - \frac{1}{2}ie^{-2ix} + \frac{1}{2}ie^{2ix} + \frac{1}{3}ie^{-3ix} - \frac{1}{3}ie^{3ix}....$$

$$S = 2\sin x - 1\sin(2x) + \frac{2}{3}\sin(3x) + ...$$

Definizione.
Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ diciamo che f è regolare a tratti in $[a, b]$ se esistono un numero finito di punti x_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, N$ con $a_0 = x_0 = x_1 < x_1 < x_2 \cdots < x_N = b$ tali che f è derivabile con derivata continua in ogni intervallo (x_i, x_{i+1}), e la restrizione di f' a (x_i, x_{i+1}) è prolungabile con continuità in $[x_i, x_{i+1}]$.
Se la funzione f è definita su $\mathbb{R}$, f è regolare a tratti in $\mathbb{R}$ se è regolare a tratti in ogni intervallo [a,b] contenuto in $\mathbb{R}$.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ regolare a tratti, periodica di periodo $T = 2\pi$.

Disuguaglianza di Bessel. Consideriamo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k \cos(kx) + b_k \mathrm{sen}(kx)\right],$$

dove:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx, k = 1, 2, ...$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx, k = 1, 2, ...$$

$s_n(x)$ ridotta n-esima serie di Fourier di f, con f limitata e integrabile in $[-\pi, \pi]$
Consideriamo il seguente integrale:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s_n(x)|^2 \, dx =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x)^2 + s_n(x)^2 - 2f(x)s_n(x) \right] \, dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k cos(kx) + b_k sin(kx)]\right)^2 dx =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k^2 cos^2(kx) + b_k^2 sin^2(kx)\right]\right) dx +$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{altri prodotti}\, dx \quad \text{(con contributo nullo)}$$

$$= \frac{a_0^2}{4} 2\pi + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \pi + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \pi =$$

$$\frac{a_0^2}{2} \pi + \pi \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2$$

$$-2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left[a_k cos(kx)+b_k sin(kx)\right]\right]dx=$$

$$-a_0\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx-2\sum_{k=1}^{n}a_k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)\,dx-$$

$$2\sum_{k=1}^{n}b_k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(kx)\,dx=$$

$$-a_0^2\pi-2\sum_{k=1}^{n}a_k(a_k\pi)-2\sum_{k=1}^{n}b_k(b_k\pi)=$$

$$-a_0^2\pi-2\pi\sum_{k=1}^{n}a_k^2+b_k^2$$

Vale la disuguaglianza:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \frac{a_0^2}{2}\pi - \pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \geq 0$$

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$$

Dalla disuguaglianza di Bessel segue

$$\lim_{k\to+\infty} a_k = 0, \qquad \lim_{k\to+\infty} b_k = 0,$$

ossia

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx = \lim_{k\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{sen}(kx)dx = 0.$$

Nucleo di Dirichlet

$$d_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$$

Si ha

$$d_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{x}{2}))}$$

dim. Dalla formula

$$\sin((k+\frac{1}{2})x) - \sin((k-\frac{1}{2})x) = 2\sin(\frac{x}{2})\cos(kx)$$

sommiamo da 1 a n

$$\sum_{k=1}^{n}(\sin((k+\frac{1}{2})x) - \sin((k-\frac{1}{2})x)) = \sin((n+\frac{1}{2})x) - \sin(\frac{x}{2}) =$$

$$2\sin(\frac{x}{2})\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)$$

Inoltre
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d_n(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} d_n(t)dt = \frac{1}{2}.$$
Segue da $d_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$ ed effettuando l'integrazione.
Esercizio: disegnare d_n per diversi valori di n.

Formula di Dirichlet

Teorema.

Sia f periodica di periodo 2π integrabile in $[-\pi, \pi]$. La somma parziale $s_n(x)$ della serie di Fourier di f si può esprimere in termini del nucleo di Dirichlet (integrale di convoluzione)

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) d_n(t) dt,$$

ove

$$d_n(x) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{x}{2})}$$

La dimostrazione si basa sul seguente calcolo. Per definizione di $s_n(x)$

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos(kx)\cos(ky)+\sin(kx)\sin(ky))dy] =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos(k(x-y))]dy =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t)[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos(kt)]dt =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin(\frac{t}{2})}dt$$

Teorema di Convergenza Puntuale

Convergenza Puntuale Per ogni x reale la successione $s_n(x)$ converge a $f(x)$, ovvero per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $\epsilon > 0$ esiste un indice $N(x, \epsilon)$ tale che

$$|s_N(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall N > N(x, \epsilon)$$

Teorema Sia f una funzione periodica regolare a tratti su $\mathbb{R}$. Per ogni x reale la serie di Fourier converge alla media aritmetica tra il limite destro e il limite sinistro:

$$\frac{1}{2}\Big[f(x_+) + f(x_-)\Big],$$

e a $f(x)$ nei punti di continuità

Dobbiamo considerare

$$s_n(x)-\frac{1}{2}\Big[f(x_+)+f(x_-)\Big] = \frac{1}{\pi}\Big[\int_0^{\pi}(f(x+t)-f(x_+))\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin(\frac{t}{2})}dt+$$

$$\int_{-\pi}^{0}(f(x+t)-f(x_-))\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin(\frac{t}{2})}dt\Big],$$

Ricordiamo

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)d_n(t)dt$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d_n(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} d_n(t)dt = \frac{1}{2}$$

$$d_n(t) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin(\frac{t}{2})}$$

Poniamo

$$F(t) = \begin{cases} \frac{f(x+t)-f(x_+)}{2\sin(\frac{t}{2})} & 0 < t \leq \pi \\ 0 & t = 0 \\ \frac{f(x+t)-f(x_-)}{2\sin(\frac{t}{2})} & -\pi < t < 0 \end{cases}$$

Ne segue dalle ipotesi su f che esiste il limite per $t \to 0^+$ e per $t \to 0^-$ di F. Infatti

$$\lim_{t \to 0^+} F(t) = f'_+(x) \qquad \lim_{t \to 0^-} F(t) = f'_-(x)$$

F è continua a tratti in $[-\pi, \pi]$, dunque integrabile e limitata. Inoltre

$$s_n(x) - \frac{1}{2}\left[f(x_+) + f(x_-)\right] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin((n + \frac{1}{2})t)dt.$$

Del resto
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin((n+\frac{1}{2})t)dt =$$
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos\frac{t}{2}\sin(nt)dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin\frac{t}{2}\cos(nt)dt$$
Dalla disuguaglianza di Bessel si deduce che
$$\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin\frac{t}{2}\cos(nt)dt \to 0$$
per $n \to +\infty$.
$$\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos\frac{t}{2}\sin(nt)dt \to 0$$
per $n \to +\infty$.
In conclusione
$$\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin((n+\frac{1}{2})t)dt \to 0,$$
per $n \to +\infty$.

- $$f(x) = x|x|,$$

  per $x \in [-\pi, \pi)$ e prolungata per periodicità in $\mathbb{R}$ determinare le serie di Fourier.

$$S = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{k}\pi^2(-1)^k + \frac{2}{k^3}(-1)^k - \frac{2}{k^3} \right) \sin(kx).$$

$x = 0$ e $x = \pi$??

- $$f(x) = |x|,$$

  per $x \in [-\pi, \pi)$ e prolungata per periodicità in $\mathbb{R}$ determinare le serie di Fourier.

  $$S = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)x.$$

  $x = 0$

  $$f(0) = 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

  $$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

Derivate 1-d

- Regola della somma (linearità):

$$\mathrm{D}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha f'(x) + \beta g'(x), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

- Regola del prodotto (o di Leibniz):

$$\mathrm{D}[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

- Regola del quoziente:

$$\mathrm{D}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}.$$

- Regola della funzione reciproca:

$$\mathrm{D}\left[\frac{1}{f(x)}\right] = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}.$$

- Regola della catena:

$$\mathrm{D}\left[f\left(g(x)\right)\right] = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x).$$

Derivate 1-d

- $$\mathrm{D}(\ln f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)} \qquad \mathrm{D}(\mathrm{e}^{f(x)}) = \mathrm{e}^{f(x)} \cdot f'(x)$$
- $$\mathrm{D}(\sin f(x)) = f'(x)\cos f(x) \quad \mathrm{D}(\cos f(x)) = -f'(x)\sin f(x)$$
- $$\mathrm{D}(\tan f(x)) = \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$$
- $$\mathrm{D}(\arcsin f(x)) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$$
- $$\mathrm{D}(\arccos f(x)) = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$$

Derivate 1-d

- $$D(\arctan f(x)) = \frac{f'(x)}{1 + [f(x)]^2}$$

- $$\mathrm{D}(f(x)^{g(x)}) = f(x)^{g(x)} \cdot \left[g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right]$$

  $$\mathrm{D}(x^x) = x^x \cdot [\ln x + 1]$$

Derivate parziali

Come si estende il concetto di derivata a funzioni f di più variabili?

Usiamo il rapporto incrementale in cui si fa variare un'incognita e si "fissano" le restanti. Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un insieme aperto (ovvero per ogni $(x, y) \in A$ esiste un intorno circolare $B_r(x, y) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < r^2\}$ di raggio r tale che $B_r(x, y) \subset A$).

Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice derivabile parzialmente in x nel punto $(x, y) \in A$ se esiste finito il limite $h \to 0$ del rapporto incrementale

$$\frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}.$$

Se f è derivabile parzialmente in x nel punto $(x, y) \in A$ allora si pone

$$f_x(x, y) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}.$$

- Similmente si può definire $f_y(x, y)$ (se il limite esiste finito):

$$f_y(x, y) := \lim_{k \to 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}.$$

- In dimensione > 2 la definizione si estende: si incrementa una variabile per volta.

Calcolo delle derivate parziali

Per calcolare le derivate parziali valgono le regole di calcolo note

Per calcolare la derivata parziale di f rispetto a x nel punto (x, y) bisogna pensare di fissare y e di poter variare solo x...

Calcolare la derivata parziale in x della funzione $f(x, y) = x \sin y$ nel punto (x, y).

- Dalla definizione: calcoliamo il limite del rapporto incrementale

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)\sin y - x \sin y}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h \sin y}{h} = \sin y.\end{aligned}$$

- Utilizziamo le regole di derivazione. La funzione $\sin y$ è constante rispetto a x quindi può essere portato fuori dal simbolo di derivata:

$$(x \sin y)_x = \sin y \, (x)_x = \sin y.$$

Calcolare la derivata parziale rispetto a y di $f(x,y) = x \sin y$.

- Dalla definizione, calcoliamo il limite del rapporto incrementale: Usando la formula di addizione del seno $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ si ha

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{x\sin(y+k) - x\sin y}{k}$$
$$= \lim_{k\to 0} \frac{x\sin y\cos k + x\cos y\sin k - x\sin y}{k}$$
$$= \lim_{k\to 0} \frac{x\sin y(\cos k - 1) + x\cos y\sin k}{k}$$
$$= x\sin y \lim_{k\to 0} \frac{(\cos k - 1)}{k} + x\cos y \lim_{k\to 0} \frac{\sin k}{k}.$$

Poiché $\lim_{k\to 0} \frac{\cos k - 1}{k} = 0$ e $\lim_{k\to 0} \frac{\sin k}{k} = 1$ si ha

$$(x\sin y)_y = x\cos y.$$

- Osserva: poiché x è constante rispetto a y,

$$(x \sin y)_y = x(\sin y)_y = x \cos y.$$

Osservazioni

- È sempre preferibile usare le regole di derivazione per calcolare le derivate parziali;
- Usare il rapporto incrementale solo se esplicitamente richiesto nell'esercizio;
- Ricordare sempre che le variabili su cui *non* bisogna calcolare le derivate parziali sono costanti;
- Le derivate parziali si possono denotare anche con altri simboli:

  $$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

  Per non appesantire la notazione, molto spessi il punto (x, y) in cui si calcolano le derivate non si scrive esplicitamente. In tal caso per le derivate parziali scriviamo semplicemente:

  $$\frac{\partial f}{\partial x}, \ \frac{\partial f}{\partial y}$$

- $$\mathrm{D_x}(\ln(xy)) = \frac{1}{x}$$
- $$\mathrm{D_y}(\ln(xy)) = \frac{1}{y}$$
- $$\mathrm{D_x}(\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}) = \mathrm{e}^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y}$$
- $$\mathrm{D_y}(\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}) = -x\frac{1}{y^2}e^{\frac{x}{y}}$$
- $$\mathrm{D_x}(\sin xy) = y\cos(xy) \quad \mathrm{D_y}(\sin xy) = x\cos(xy)$$
- $$\mathrm{D_x}(x^x) = x^x \cdot [\ln x + 1] \quad D_y(x^x) = 0$$

Derivate di ordine successive

Come sopra $A \subset \mathbb{R}^2$ denota un insieme aperto.

Le derivate del secondo ordine di $f : A \to \mathbb{R}$ nel punto (x, y) sono date da

$$f_{xx} = (f_x)_x(x, y), \qquad f_{xy} = (f_x)_y(x, y),$$
$$f_{yx} = (f_y)_x(x, y), \qquad f_{yy} = (f_y)_y(x, y).$$

- Similmente si possono definire le derivate di ordine superiore;
- In generale $f_{xy}(x, y) \neq f_{yx}(x, y)$. Nel caso in cui $f_{xy}(x, y)$ e $f_{yx}(x, y)$ sono continue in (x, y) allora vale

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y).$$

  Tale risultato si chiama *teorema di inversione di Schwarz.*

Esercizi

Esercizio 1

Calcolare le derivate parziali prime rispetto a x e rispetto a y delle seguenti funzioni:

1. $f(x, y) = e^x + e^y$;
2. $f(x, y) = x^{10} + 2x^4y^2 - 4xy^4 + 2y^2$;
3. $f(x, y) = e^{x^2} \cos y$;
4. $f(x, y) = \sin(x + 2y)$;
5. $f(x, y) = e^{-x-y^2}$;
6. $f(x, y) = \arctan(x^2 + y^2)$.

Esercizio 2

Determinare il dominio e le derivate parziali rispetto a x e rispetto a y delle seguenti funzioni:

1. $f(x, y) = \arccos(xy)$;
2. $f(x, y) = \arcsin(x^2 + y^2)$.

Esercizio 1

Esercizio 1(1): La funzione è una somma di due funzioni che dipendono ciascuna da una variabile. Quindi

$$f_x = (e^x + e^y)_x = (e^x)_x + (e^y)_x = e^x + 0 = e^x.$$

Similmente $f_y = e^y$.

Esercizio 1(2): Ricordando che $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$, si ha

$$\begin{aligned}(x^{10} + 2x^4y^2 - 4xy^4 + 2y^2)_x &= (x^{10})_x + (2x^4y^2)_x - (4xy^4)_x + (2y^2)_x \\ &= (x^{10})_x + 2y^2(x^4)_x - 4y^4(x)_x + 0 \\ &= 10x^9 + 2y^2(4x^3) - 4y^4 \\ &= 10x^9 + 8y^2x^3 - 4y^4.\end{aligned}$$

Analogamente $f_y = 4x^4y - 16xy^3 + 4y$.

Esercizio 1 - II

Esercizio 1(3):

$$f_x = (e^{x^2} \cos y)_x = (e^{x^2})_x \cos y = e^{x^2}(x^2)_x \cos y = 2xe^{x^2} \cos y,$$
$$f_y = (e^{x^2} \cos y)_y = e^{x^2}(\cos y)_y = -e^{x^2} \sin y.$$

Esercizio 1(4):

$$f_x = \cos(x + 2y), \qquad \text{e} \qquad f_y = 2\cos(x + 2y).$$

Esercizio 1(5): Poichè $f = e^{-x}e^{-y^2}$ ragionando come nel caso (3) abbiamo

$$f_x = (e^{-x})_x e^{-y^2} = -e^{-x}e^{-y^2} = -e^{-x-y^2},$$
$$f_y = e^{-x}(e^{-y^2})_y = e^{-x}e^{-y^2}(-2y) = -2ye^{-x-y^2}.$$

Esercizio 1 -III

Esercizio 1(6): Ricordando che

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$$

si ha

$$\begin{aligned} f_x = (\arctan(x^2+y^2))_x &= \frac{1}{1+(x^2+y^2)^2}(x^2+y^2)_x \\ &= \frac{2x}{1+(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

Similmente

$$f_y = \frac{2y}{1+(x^2+y^2)^2}.$$

Esercizio 2 - I

Esercizio 2(1): Si ricorda che la funzione $\arccos t$ é ben definita solo se $t \in [-1, 1]$. Quindi il dominio di f é dato dai punti (x, y) che verificano $-1 \leq xy \leq 1$. Piú precisamente

$$Dom(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -1 \leq xy \leq 1\}.$$

Per calcolare la derivata di f, ricordiamo che

$$\frac{d}{dx}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Dunque

$$f_x = -\frac{1}{\sqrt{1-(xy)^2}}(xy)_x = -\frac{y}{\sqrt{1-(xy)^2}}$$
$$f_y = -\frac{1}{\sqrt{1-(xy)^2}}(xy)_y = -\frac{x}{\sqrt{1-(xy)^2}}.$$

Esercizio 2 - II

Esercizio 2(2): Come nel punto precendente $\arccos t$ é ben definita solo se $t \in [-1, 1]$. Quindi il dominio di f é dato dai punti (x, y) che verificano $-1 \leq x^2 + y^2 \leq 1$. Poiché $x^2 + y^2 \geq 0$, la prima condizione é sempre verificata e il dominio é dato

$$Dom(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Per calcolare la derivata di f, ricordiamo che

$$\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Dunque

$$f_x = \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)^2}}(x^2 + y^2)_x = \frac{2x}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)^2}}$$
$$f_y = \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)^2}}(x^2 + y^2)_y = \frac{2y}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)^2}}.$$

Definizione della derivata parziale prima di f in $\overline{x}$

$$f_{x_i}(\overline{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_i + h, \dots, \overline{x}_n) - f(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_i, \dots, \overline{x}_n)}{h},$$

se tale limite esiste finito.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad f_{x_i} \quad D_{x_i} f$$

$$D_{x_i} \|x\|^2 = D_{x_i}(x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2) = 2x_i$$

Definizione del gradiente di f.

$$Df(x) = (f_{x_1}(x), f_{x_2}(x), \dots, f_{x_n}(x))$$

Data una funzione f definita in un intorno di $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, f si dice derivabile parzialmente rispetto a x nel punto (x_0, y_0) se esiste ed è finito il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Il valore del limite si indica con $f_x(x_0, y_0)$ e si chiama derivata parziale prima rispetto a x della funzione in (x_0, y_0).
f si dice derivabile parzialmente rispetto a y nel punto (x_0, y_0) se esiste ed è finito il limite

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

Il valore del limite si indica con $f_y(x_0, y_0)$ e si chiama derivata parziale prima rispetto a y della funzione in (x_0, y_0).
f si dice derivabile parzialmente rispetto a x o rispetto a y in un aperto A se è derivabile parzialmente in ogni punto di A.

- $$f(x,y) = x + 7y \quad f_x = 1 \quad f_y = 7$$
- $$f(x,y) = xy \quad f_x = y \quad f_y = x$$
- $$f(x,y) = \frac{x}{y} \quad f_x = \frac{1}{y} \quad f_y = -\frac{x}{y^2}$$
- $$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$
  $$f_x = \frac{1}{2}\frac{2x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \quad f_y = \frac{1}{2}\frac{2y}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}$$
- $$f(x,y) = \sin(xy) \quad f_x = y\cos(xy) \quad f_y = x\cos(xy)$$

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$f_x = \frac{1}{2}\frac{2x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} \quad f_y = \frac{1}{2}\frac{2y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Ammette derivate parziali in ogni punto $\neq (0,0)$: non risulta derivabile in $(0,0)$. Infatti

$$\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} = \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{|h|}{h}$$

$$f(x,y) = |x-y|(x+y)$$

$$(1,1)$$

$$\frac{f(1+h,1)-f(1,1)}{h} = \frac{|h|}{h}(2+h)???$$

$$(0,0)$$

$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{|h|\,h}{h} \to ???$$

Norma euclidea

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

Intorno di centro x_0 e raggio δ.

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \delta\}$$

A aperto
Un insieme aperto A dello spazio euclideo: $\forall x \in A$ esiste un intorno di raggio $\delta > 0$ centrata in x interamente contenuto in A.

X Insieme di definizione

- $f(x,y) = \ln(2 - x^2 - y^2) \quad f(x,y) = \sqrt{4x^2 + 9y^2 - 36}$
- $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$
- $f(x,y) = \ln(1 - x^2) + \ln(1 - y^2)$
- $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2-4}$

Esercizio: disegnare l'insieme di definizione $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

x_0 punto di accumulazione per X.

Per ogni numero reale $\epsilon > 0$ esiste un numero reale $\delta > 0$ tale che:

$|f(x) - \ell| < \epsilon$ per ogni $x \in X$ con $0 < \|x - x_0\| < \delta$

$$\ell = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Se esiste il limite ℓ, il limite è unico per il teorema di unicità del limite

- Mostrare che un limite per una funzione di due o piu' variabili non esiste: basta trovare due cammini lungo i quali la funzione tende a due valori distinti.
- Metodo non utilizzabile per mostrare che il limite esiste: non basta mostrare che la funzione tende allo stesso valore percorrendo un certo numero di curve per dire che essa ammette limite: potrebbero esistere altre curve lungo le quali la funzione si comporta diversamente.

- Esempio di funzione che non ammette limite per $(x, y) \to (0, 0)$

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$\lim_{(x,y=mx)\to(0,0)} \frac{1 - m^2}{1 + m^2} = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}$$

- Esempio di funzione che non ammette limite per $(x, y) \to (0, 0)$ anche se $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, mx) = 0$

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

Si ha

$$f(x, mx) = \frac{x(mx)^2}{x^2 + (mx)^4} = \frac{m^2 x}{1 + m^4 x^2},$$

quindi

$$\lim_{(x,y=mx)\to(0,0)} f(x, mx) = 0.$$

Mentre

$$f(y^2, y) = \frac{y^4}{y^4 + y^4} = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2},$$

Non esiste il $\lim_{(x,y)\to(0,0)}$ di

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{y}???$$

$$y = mx \quad \frac{x^2(1+m^2)}{mx} \quad (x,y) \to (0,0)????$$

$$y = \alpha x^2 \quad \frac{x^2+\alpha^2 x^4}{\alpha x^2} = \frac{x^2(1+\alpha^2 x^2)}{\alpha x^2} = \frac{1}{\alpha}(1+\alpha^2 x^2)$$

Verifica del limite.

- Esercizio 1. Verificare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

$$\left|\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

Per ogni numero reale $\epsilon > 0$ esiste un numero reale $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in X$ $0 < \|x - x_0\| < \delta$ vale $|f(x) - l| < \epsilon$

$$\delta = \epsilon$$

Per ogni numero reale $\epsilon > 0$ $\delta = \epsilon$ tale che per ogni $x \in X$ con $0 < \|x - x_0\| < \delta$ vale $|\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0| < \epsilon$

- Esercizio 2. Verificare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3+5x^2+5y^2}{x^2+y^2} = 5$$

$$\left|\frac{3x^3+5x^2+5y^2}{x^2+y^2} - 5\right| = \left|\frac{3x^3+5x^2+5y^2-5x^2-5y^2}{x^2+y^2}\right|$$

$$3\frac{|x^3|}{x^2+y^2} = 3\frac{|x|x^2}{x^2+y^2} \leq 3|x| = 3\sqrt{x^2} \leq 3\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\delta = \frac{1}{3}\epsilon$$

- Esercizio. Non esiste il lim per $\lim_{(x,y)\to(0,0)}$ di
$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$
Consideriamo
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
La funzione non risulta continua in $(0,0)$
- la funzione ammette derivate parziali prime in $(0,0)$????
Ammette derivate parziali prime in $(0,0)$ e valgono 0.

Analisi Matematica una variabile: osserviamo il differente comportamento. Non tutte le caratteristiche che si evidenziano nello studio di funzioni di una variabile potranno essere trasferite al caso di funzioni di due variabili a valori reali. Non possiamo parlare di crescenza o decrescenza, mentre potremo considerare i massimi e i minimi, una volta definiti gli intorni in $\mathbb{R}^2$.

Continuità.

Sia $f : X \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$ di accumulazione per X

Le due proprietà seguenti sono equivalenti

(a) $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che se $x \in X$ e $\|x - x_0\| < \delta$, allora

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

(b) (x_n) $x_n \in X$ e $x_n \to x_0$, allora $f(x_n) \to f(x_0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(\pi,1)} \frac{\cos(xy)}{1 - y - \cos x} = ???$$

In due variabili $\mathbb{R}^2$:

$$\ell = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

Sia $X \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in X$ punto di accumulazione per X.
f continua in (x_0, y_0) se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall (x,y) \in X$ tale che $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ risulta

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \epsilon$$

Sia:

$$f(x, y) = xe^y + y^3x^2$$

Entrambe le derivate parziali prime sono continue. Risulta rispettivamente :

$$f_x = e^y + 2xy^3 \quad f_{xy} = e^y + 6xy^2$$
$$f_y = xe^y + 3y^2x^2 \quad f_{yx} = e^y + 6xy^2$$

Vediamo ora un esempio di funzione con derivate parziali miste diverse

Come vedremo, l'ipotesi di continuità delle derivate parziali seconde miste è sufficiente per la loro uguaglianza. Un esempio di funzione con derivate seconde parziali miste differenti deve avere tali derivate non continue.

Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- $f_x(0,0) = 0$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

- $f_y(0,0) = 0$:

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 0$$

$$f_x(x,y) = \begin{cases} y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \ (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_y(x,y) = \begin{cases} -x\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} - xy\frac{2y(x^2+y^2)-2y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \ (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_x(x,y) = \begin{cases} y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + y\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus\ (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_y(x,y) = \begin{cases} -x\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} - x\frac{4y^2x^2}{(x^2+y^2)^2} & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus\ (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Le derivate seconde miste in $(0,0)$ sono diverse, infatti:

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k} = -1$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = +1$$

$$f_{yx}(0,0) \neq\ f_{xy}(0,0).$$

Teorema di Schwarz.

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

una funzione in due variabili, definita su un aperto A di $\mathbb{R}^2$. Se f ammette derivate seconde miste continue ($f \in C^2(A)$) allora vale in A

$$f_{xy} = f_{yx}$$

$$(x_0, y_0) \in A$$

Si scelgono due reali $\varepsilon\ \delta > 0$
$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset A$ (A aperto).
F e G

$$F\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$G\colon (-\delta, \delta) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

in modo che:

$$F(t) = f(x_0 + t, y_0 + s) - f(x_0 + t, y_0) \qquad \forall s \in (-\delta, \delta)$$

$$G(s) = f(x_0 + t, y_0 + s) - f(x_0, y_0 + s) \qquad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

$$F(t) - F(0) = G(s) - G(0).$$

Inoltre, applicando due volte il teorema di Lagrange:

$$F(t) - F(0) = tF'(\xi_1) = t\,[f_x(x_0 + \xi_1, y_0 + s) - f_x(x_0 + \xi_1, y_0)] =$$

$$ts\,[f_{xy}(x_0 + \xi_1, y_0 + \sigma_1)]$$

$$G(s) - G(0) = st\,[f_{yx}(x_0 + \xi_2, y_0 + \sigma_2)]$$

$\xi_i \in (0, t)$ e $\sigma_i \in (0, s)$
Il teorema segue facendo tendere t e s a 0 tenuto conto che le derivate seconde miste sono continue.

$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- *Differenziale* di f in x. f differenziabile in x se esiste $p \in \mathbb{R}^n$ tale che
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - ph}{\|h\|} = 0,$$
- $p = Df(x)$. Infatti $h = te_i = (0, \dots, 0, 0, t, 0 \dots, 0)$
$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+te_i) - f(x) - tp_i}{|t|} = 0$$
Abbiamo
$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+te_i) - f(x) - tp_i}{t} = 0$$
e
$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+te_i) - f(x)}{t} = p_i$$
Quindi f ammette derivate parziali e
$$p_i = f_{x_i}$$

n=2

$$\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)-\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$$

$$\to 0$$

Per

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0$$

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=$$

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)+o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

La differenziabilitá di f è legata all'esistenza del piano tangente. Una funzione differenziabile in un punto risulta una funzione approssimabile, a meno di un resto infinitesimo, da una funzione affine in un intorno abbastanza piccolo di quel punto. La funzione affine

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

rappresenta l'equazione del piano tangente al grafico della funzione nel punto (x_0, y_0).
Esercizio. Determinare il piano tangente

$$f(x, y) = x^3 + y^2 + 2x + 2$$

nel punto $(-1, 2, f(-1, 2))$. $f_x(-1, 2) = 5 \quad f_y(-1, 2) = 4$

$$z = 5(x + 1) + 4(y - 2) + 3$$

- $$f(x,y) - f(x_0,y_0) =$$
  $$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)+o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)$$
  per
  $$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \to 0$$

  $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

  continuità $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

Teorema del differenziale
Sia f dotata di derivate parziali prime in un aperto A di $\mathbb{R}^2$. Se le derivate parziali prime sono continue in A allora f è differenziabile in A.
Ricordiamo Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$
f è differenziabile in (x, y)

- f ammette derivate parziali prime
- vale

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x+h, y+k) - f(x, y) - f_x(x, y)h - f_y(x, y)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Occorre dimostrare

$$f(x+h,y+k)-f(x,y)-f_x(x,y)h-f_y(x,y)k=o(\sqrt{h^2+k^2})$$

per

$$(h,k)\to(0,0).$$

Consideriamo

$$f(x+h,y+k)-f(x,y+k)+f(x,y+k)-f(x,y)-f_x(x,y)h-f_y(x,y)k$$

Applicando il teorema di Lagrange ad entrambe le derivate parziali prime

$$f(x+h,y+k)-f(x,y+k)=f_x(x_1,y+k)h$$

$$f(x,y+k)-f(x,y)=f_y(x,y_1)k$$

con $x_1\to x$, $y_1\to y$ per $(h,k)\to(0,0)$.

Otteniamo

$$\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}|f_x(x_1,y+k)-f_x(x,y)||h|+\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}|f_y(x,y_1)-f_y(x,y)||k| =$$

$$\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}}|f_x(x_1,y+k)-f_x(x,y)|+\frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}|f_y(x,y_1)-f_y(x,y)|$$

$$\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}}<1 \qquad \frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}<1$$

Ne segue

$$\leq |f_x(x_1, y+k) - f_x(x,y)| + |f_y(x, y_1) - f_y(x,y)|$$

Per l'ipotesi di continuità delle derivate parziali si ha che tende a zero per $(h,k) \to (0,0)$, dimostrando così la differenziabilità
Notazione $f \in C^k(A)$: f dotata di derivate parziali prime continue; $C^0(A)$ funzioni continue in A.

$$f \in C^k(A) \implies f \in C^{k-1}(A)$$

Il teorema fornisce una condizione sufficiente per la differenziabilità della funzione: la continuità delle derivate parziali prime. Questa condizione non è necessaria per la differenziabilità: ci sono funzioni differenziabili con derivate parziali non continue

$$f(x,y) = x\sqrt[3]{y},$$

- f ammette le derivate parziali prime in $(0,0)$???

$$f_x(x,y) = \sqrt[3]{y}$$

$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 0$$

- le derivate parziali prime non sono entrambe continue in $(0,0)$ Infatti

$$f_y(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{3\sqrt[3]{y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$y = x^{3/2} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{3(x^{3/2})^{2/3}} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0???$$

$$\left|\frac{f(h,k) - f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| = \frac{|h||\sqrt[3]{k}|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq |\sqrt[3]{k}|$$

Esercizio

$$f(x,y) = (x+a)(y+b)$$

con a e b reali. La funzione risulta differenziabile in $(0,0)$?

Esercizio.

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + y^2 \sin \frac{1}{y} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è dotata di derivate parziali prime non continue in $(0,0)$. La funzione è differenziabile in $(0,0)$?

Matrice Hessiana

$$f \in C^2(\Omega)$$

$$Hf(x) = (f_{x_i x_j}(x))_{i,j=1,n}$$

$$Hf(x_0) = (f_{x_i x_j}(x_0))_{i,j=1,n}$$

Matrice Hessiana simmetrica: caso $n = 2$

$$f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$$

Matrice Hessiana

$$f_x(x) = -2xe^{-(x^2+y^2)}$$

$$f_y(x) = -2ye^{-(x^2+y^2)}$$

Calcoliamo

$$f_{xx} = -2e^{-(x^2+y^2)} + 4x^2e^{-(x^2+y^2)}$$

$$f_{yy} = -2e^{-(x^2+y^2)} + 4y^2e^{-(x^2+y^2)}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 4xye^{-(x^2+y^2)}$$

Matrice Hessiana

$$\begin{pmatrix} -2e^{-(x^2+y^2)} + 4x^2e^{-(x^2+y^2)} & 4xye^{-(x^2+y^2)} \\ 4xye^{-(x^2+y^2)} & -2e^{-(x^2+y^2)} + 4y^2e^{-(x^2+y^2)} \end{pmatrix}$$

Calcolo in $(0, 0)$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$Q = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ b & c \end{array} \right) \tag{5}$$

una matrice simmetrica.

$$|Q| = \det Q = ac - b^2.$$

Allora

$$|Q| > 0 \quad \mathrm{e} \ a > 0, \implies Q > 0$$

$$|Q| > 0 \quad \mathrm{e} \ a < 0, \implies Q < 0$$

$$Q > 0 \iff ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2 > 0,$$

per ogni $h = (h_1, h_2)$ non nullo.
Data la forma quadratica

$$ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2,$$

essa può essere equivalentemente scritta

$$a\left(h_1 + \frac{b}{a}h_2\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}h_2^2,$$

da questa formula si evince:
Q: matrice Hessiana

$$Hf = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

$$f_{xx}(x_0, y_0)\left(h_1 + \frac{f_{xy}(x_0, y_0)}{f_{xx}(x_0, y_0)}h_2\right)^2 + \frac{f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}(x_0, y_0)^2}{f_{xx}(x_0, y_0)}h_2^2,$$

Derivate direzionali

Per direzione si intende un vettore di modulo unitario.

In $\mathbb{R}^n$ la derivata direzionale rispetto a una direzione λ si definisce come $(x = (x_1, x_2, \ldots, x_n))$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\lambda) - f(x)}{t}$$

In $\mathbb{R}^2$ $\lambda = (\alpha, \beta)$ $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\alpha, y + t\beta) - f(x, y)}{t}$$

Teorema. Assumiamo f differenziabile in $x \in A \subset \mathbb{R}^n$. Allora f ammette derivata direzionale in x rispetto a ogni direzione λ e vale

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x) = Df(x) \cdot \lambda$$

Esercizio Data $f(x, y) = x^2 - y^2$ calcolare la derivata direzionale nel punto $(1, 1)$ lungo la direzione $(1/\sqrt{2}, (1/\sqrt{2})$.

$$f_x = 2x, \qquad f_y = -2y$$

$$f_x(1, 1) = 2, \qquad f_y(1, 1) = -2$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(1, 1) = 2/\sqrt{2} - 2/\sqrt{2} = 0$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Punto $(0,0)$ $\lambda = (\alpha, \beta)$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t\alpha, t\beta) - f(0,0)}{t} = \frac{t^3 \alpha^2 \beta}{t^3(\alpha^2 + \beta^2)} = \frac{\alpha^2 \beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$f_x(0,0) = 0$ $f_y(0,0) = 0$: la formula non vale.
Studio della differenziabilità in $(0,0)$ di f

$$\frac{f(h,k) - f(0,0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{h^2 k}{(h^2 + k^2)\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$k = \alpha h \qquad \frac{\alpha h^2 h}{(h^2 + \alpha^2 h^2)\sqrt{h^2 + \alpha^2 h^2}} = \frac{\alpha h^3}{h^2(1 + \alpha^2)|h|\sqrt{1 + \alpha^2}}$$

Insiemi connessi in $\mathbb{R}^2$
Un insieme aperto A si dice connesso se non esistono due aperti disgiunti non vuoti di $\mathbb{R}^2$ la cui unione sia A.
Teorema Sia A un insieme aperto connesso e sia f dotata di derivate parziali nulle in A. Allora f è costante in A.
Esempio $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\, y > 0\}$

$$f(x, y) = \arctan \frac{x}{y} + \arctan \frac{y}{x}$$

$$f_x(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} = 0$$

$$f_y(x, y) = -\frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{x}{x^2 + y^2} = 0$$

$$f(x, y) = f(1, 1) = \frac{\pi}{2}$$

I intervallo $\subset \mathbb{R}$, A aperto $\subset \mathbb{R}^n$

$$x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

$$x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)) \in A \quad \forall t \in I$$

$$f : A \to \mathbb{R}$$

$$F(t) = f(x(t))$$

Teorema di derivazione delle funzioni composte

- $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ derivabile
- f differenziabile in $x(t) \in A$

Allora F risulta derivabile in $t \in I$

$$F'(t) = Df(x(t)) \cdot x'(t)$$

Sia $t \in I$, I intervallo. A aperto $\subset \mathbb{R}^2$. Consideriamo l'applicazione $t \to (x(t), y(t))$. Sia $(x(t), y(t)) \in A$ $f : A \to \mathbb{R}$.

$$F(t) = f(x(t), y(t)),$$

Teorema Assumiamo $x(t)$, $y(t)$ derivabili in $t \in I$. Sia f differenziabile in $(x(t), y(t)) \in A$. Allora F risulta derivabile in t e

$$F'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$$

Se $x_0 \in A \subset \mathbb{R}^n$ è un punto stazionario ($Df(x_0) = 0$), la formula di Taylor fornisce (da dimostrare ($D^2 f$ matrice hessiana))

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{1}{2} D^2 f(x_0) h \cdot h + o(\|h\|^2), \quad h \to 0$$

Se $D^2 f(x_0) h \cdot h > 0$ allora localmente (in un intorno di x_0)

$$f(x) \geq f(x_0).$$

Allora x_0 è un punto di minimo locale.
Se $D^2 f(x_0) h \cdot h < 0$ allora localmente (in un intorno di x_0)

$$f(x) \leq f(x_0).$$

Allora x_0 è un punto di massimo locale.

Teorema di Taylor (con la formula del resto di Lagrange)
Teorema. Assumiamo $f \in C^2(A)$. x, $x+h \in A$, $x+th$ in A con $t \in [0,1]$, h sufficientemente piccolo. Esiste $\theta \in (0,1)$ tale che

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x)h_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x+\theta h)h_i h_j$$

Da $x(t) = x + th$ con $h \in \mathbb{R}^n$ $t \in [0,1]$ e h piccolo tale che $x + th \in A$.

Poniamo

$$F(t) = f(x + th).$$

Applichiamo la regola di derivazione delle funzioni composte con $x(t) = x + th$, otteniamo

$$F'(t) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x + th)h_i,$$

e

$$F''(t) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x + th)h_i h_j.$$

Applicando la formula di Taylor nel caso unidimensionale

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(\theta)$$

con $\theta \in (0, 1)$.
Da $F(t) = f(x + th)$ otteniamo

$$F(1) = f(x+h) \qquad F(0) = f(x)$$

$$F'(0) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x) h_i \qquad F''(\theta) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x+\theta h) h_i h_j,$$

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x+\theta h) h_i h_j$$

Teorema di Taylor (con il resto di Peano)
La norma di Frobenius di una matrice A definita da

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{i,j}|^2}$$

Proposizione Assumiamo A matrice $n \times n$ e h in $\mathbb{R}^n$. Allora

$$\|Ah\| \leq \|A\| \, \|h\|$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ \ldots. & \ldots.. & \ldots. & \ldots.. & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \ldots\ldots & a_{in} \\ \ldots. & \ldots.. & \ldots. & \ldots.. & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$Ah = \begin{pmatrix} a_{11}h_1 + a_{12}h_2 + a_{13}h_3 + \ldots\ldots + a_{1n}h_n \\ \\ \\ a_{n1}h_1 + a_{n2}h_2 + a_{n3}h_3 + \ldots\ldots + a_{nn}h_n \end{pmatrix}$$

La norma di Ah

$$\|Ah\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_{i1}h_1 + a_{i2}h_2 + a_{i3}h_3 + \ldots\ldots + a_{in}h_n)^2}$$

$$\|Ah\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}\, \|h\| = \|A\|\, \|h\|$$

Ricordiamo la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$(a_{i1}h_1 + a_{i2}h_2 + \ldots\ldots + a_{in}h_n)^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}h_j \right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} h_j^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)$$

Allora

$$|Ah \cdot h| \leq \|Ah\|\, \|h\| \leq \|A\|\, \|h\|^2$$

Da dimostrare

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x)h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x)h_i h_j + o(\|h\|^2) \quad h \to 0$$

Da dimostrare

$$\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x+\theta h)h_i h_j = \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x)h_i h_j + o(\|h\|^2) \;\; h \to 0$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} (f_{x_i x_j}(x+\theta h) - f_{x_i x_j}(x))h_i h_j = o(\|h\|^2)$$

Grazie alla precedente disuguaglianza (con $A = D^2 f(x+\theta h) - D^2 f(x)$))

$$\frac{\left|\sum_{i,j=1}^{n} (f_{x_i x_j}(x+\theta h) - f_{x_i x_j}(x))h_i h_j\right|}{\|h\|^2} \leq \left\|D^2 f(x+\theta h) - D^2 f(x)\right\|$$

Da $f \in C^2(A)$ si ottiene

$$\lim_{h\to 0} \left\|D^2 f(x+\theta h) - D^2 f(x)\right\| = 0$$

Abbiamo dimostrato

Teorema. Assumiamo $f \in C^2(A)$. x, $x+h \in A$ $x+th$ in A con $t \in [0,1]$, h sufficientemente piccolo allora

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x)h_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x)h_i h_j + o(\|h\|^2) \quad h \to 0$$

Minimi e Massimi
Tratteremo due casi:

- Punti di massimo e/o minimo di f appartenenti a un insieme aperto Ω; si parla allora di calcolo degli estremi liberi ossia si vogliano individuare punti di estremi interni al dominio.
- Punti di massimo e/o minimo di f appartenenti a un insieme chiuso e limitato K in cui considerare il fatto che possano appartenere alla frontiera dell'insieme.

Punti critici di una funzione in due variabili

- $A \subset \mathbb{R}^2$ è un insieme aperto;

Punti critici

Sia f derivabile (dotata di derivate parziali prime) in A (aperto). Un punto $(x_0, y_0) \in A$ si dice un *punto critico o stazionario* per f in A se

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad \text{e} \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

- I punti critici sono i candidati per essere punti di massimo o minimo per la funzione f in A;
- Nel caso di funzioni di *una* variabile i punti critici sono i valori in cui la derivata si annulla.

Carattere dei punti critici in due dimensione

Una volta trovati gli eventuali punti critici di una funzione vogliamo anche studiarne la loro natura, ovvero se (x_0, y_0) è:

- punto di minimo locale;
- punto di massimo locale;
- punto di sella.

Si ricorda che un punto $(x_0, y_0) \in A$ si dice di *minimo locale* per f se esiste un intorno $B_r(x_0, y_0) = \{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\} \subseteq A$ tale che

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad \text{per ogni } (x, y) \in B_r(x_0, y_0).$$

Per i punti di *massimo locale* si richiede

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \quad \text{per ogni } (x, y) \in B_r(x_0, y_0).$$

Test per le derivate seconde

Sia $f \in C^2(A)$. Sia $(x_0, y_0) \in A$ un punto critico per f. Per determinare la natura dei punti critici si può ragionare come segue.

- Calcolare la matrice Hessiana $H_f(x_0, y_0)$ nei punti critici:

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix};$$

- Calcolare il suo determinante

$$\det H_f(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2;$$

- Capire se ci troviamo in uno dei seguenti casi

$$\det H_f(x_0, y_0) > 0$$

  - Se $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ allora (x_0, y_0) è un punto di minimo locale;
  - Se $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ allora (x_0, y_0) è un punto di massimo locale.

-

$$\det H_f(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow (x_0, y_0) \text{ è un punto di sella.}$$

Si noti che $\det H_f(x_0, y_0) = 0$ non è incluso nei casi precedenti.

Esercizio 1

Esercizio 1

Determinare gli eventuali punti critici delle seguenti funzioni e la loro natura.

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y$;
2. $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x^2 + y^2 + 1}$.

Svolgimento esercizio 1 - I

Determiniamo i punti critici di f. Dunque calcoliamo le derivate parziali:

$$f_x = 2x - 2, \qquad f_y = 2y + 4.$$

I punti critici si ottengono ponendo uguale a zero le derivate parziali. Dunque i punti critici (x, y) soddisfano:

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 2y + 4 = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

L'unico punto critico è dato da $(1, -2)$. Le derivate seconde sono:

$$f_{xx} = 2, \qquad f_{xy} = f_{yx} = 0, \qquad f_{yy} = 2.$$

Dunque la matrice Hessiana è data da

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Poiché

$$\det H_f = 4, \qquad \text{e} \qquad f_{xx}(1, -2) = 2 > 0$$

allora $(1, -2)$ è un punto di minimo locale.

Svolgimento esercizio 1 - II

(**??**): Determiniamo i punti critici di f. Calcoliamo le derivate parziali:

$$f_x = \frac{x^2 + y^2 + 1 - (x-y)(2x)}{(x^2 + y^2 + 1)^2}, \qquad f_y = \frac{-x^2 - y^2 - 1 - (x-y)(2y)}{(x^2 + y^2 + 1)^2}.$$

I punti critici soddisfano:

$$\begin{cases} -x^2 + y^2 + 1 + 2xy = 0 \\ -x^2 + y^2 - 1 - 2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 \\ 1 + 2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm y \\ xy = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

dove abbiamo sommato e sottratto le due equazioni. Se $x = y$ allora la seconda ci fornisce $x^2 = -\frac{1}{2}$, che è impossibile. Mentre per $x = -y$ la seconda ci dà:

$$x^2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dunque i punti critici sono:

$$P_1 = \Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \Big) \qquad \text{e} \qquad P_2 = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \Big).$$

Svolgimento esercizio 1 - III

Calcolando le derivate seconde si ottiene che:

$$H_f(P_1) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \det H_f(P_1) > 0.$$

Poiché $f_{xx}(P_1) = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0$, allora P_1 è un punto di massimo locale.

Analogamente

$$H_f(P_2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \det H_f(P_1) > 0.$$

Poiché $f_{xx}(P_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$, allora P_1 è un punto di minimo locale.

Esercizio 2

Esercizio 2

Delle seguenti funzioni determinare il dominio, gli eventuali punti critici e la loro natura.

1. $f(x, y) = y \log(x + y)$;
2. $f(x, y) = xy \log(xy^2) + x^2 y$.

Svolgimento esercizio 2 - I

(1): Poiché il logaritmo è definito solo per numeri positivi si ha che

$$dom(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x + y > 0\}.$$

Calcolo derivate prime:

$$f_x = \frac{y}{x+y}, \qquad f_y = \log(x+y) + \frac{y}{x+y}.$$

Per calcolare i punti critici, si ricorda che se $(x, y) \in dom(f)$ allora $x + y > 0$,

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x+y} = 0 \\ \log(x+y) + \dfrac{y}{x+y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \log x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1. \end{cases}$$

Dunque l'unico punto critico è: $P = (1, 0)$. Poiché

$$H_f(P) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \det H_f(P) < 0.$$

Dunque P è un punto di sella.

Svolgimento esercizio 2 - II

(2): Poiché il logaritmo è definito solo per numeri positivi si ha che

$$dom(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy^2 > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0 \text{ e } y \neq 0\}.$$

Calcolo derivate prime:

$$f_x = y\log(xy^2) + y + 2xy, \qquad f_y = x\log(xy^2) + 2x + x^2.$$

Per calcolare i punti critici, si ricorda che se $(x, y) \in dom(f)$ allora $x > 0$ e $y \neq 0$,

$$\begin{cases} y\log(xy^2) + y + 2xy = 0 \\ x\log(xy^2) + 2x + x^2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \log(xy^2) + 1 + 2x = 0 \\ \log(xy^2) + 2 + x = 0 \end{cases}$$

Sottraendo le due equazioni otteniamo

$$1 + 2x - 2 - x = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 1.$$

Sostituendo nella seconda otteniamo

$$\log(y^2) + 3 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y^2 = e^{-3} \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \pm e^{-\frac{3}{2}}.$$

I punti critici sono $P_1 = (1, e^{-\frac{3}{2}})$ e $P_2 = (1, -e^{-\frac{3}{2}})$.

Svolgimento esercizio 2 - III

Calcolando le derivate seconde si ottiene che:

$$H_f(P_1) = \begin{bmatrix} 3e^{-\frac{3}{2}} & 2 \\ 2 & 2e^{\frac{3}{2}} \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \det H_f(P_1) = 2 > 0.$$

Poiché $f_{xx}(P_1) = 3e^{-\frac{3}{2}} > 0$, allora P_1 è un punto di minimo locale.

Analogamente

$$H_f(P_2) = \begin{bmatrix} -3e^{-\frac{3}{2}} & 2 \\ 2 & -2e^{\frac{3}{2}} \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \det H_f(P_1) = 2 > 0.$$

Poiché $f_{xx}(P_1) = -3e^{-\frac{3}{2}} < 0$, allora P_1 è un punto di massimo locale.

Esercizio 3

Esercizio 3

Delle seguenti funzioni determinare gli eventuali punti critici e la loro natura.

1. $f(x, y) = y - 2\sin(xy)$;
2. $f(x, y) = \arctan(xy)$.

Svolgimento esercizio 3 - I

(1): Determiniamo i punti critici di f. Dunque calcoliamo le derivate parziali:

$$f_x = -2y\cos(xy), \qquad\qquad f_y = 1 - 2x\cos(xy).$$

I punti critici (x, y) soddisfano:

$$\begin{cases} -2y\cos(xy) = 0 \\ 1 - 2x\cos(xy) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ oppure } \cos(xy) = 0 \\ 1 - 2x\cos(xy) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 1 - 2x = 0 \end{cases}$$

L'unico punto critico è dato da $P = (\frac{1}{2}, 0)$. Calcolando le derivate seconde abbiamo

$$H_f(P) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \det H_f(P) < 0.$$

Dunque P è un punto di sella.

Svolgimento esercizio 3 - II

(2): Determiniamo i punti critici di f. Dunque calcoliamo le derivate parziali:

$$f_x = \frac{y}{(1 + (xy)^2)}, \qquad f_y = \frac{x}{(1 + (xy)^2)}.$$

Dunque l'unico punto critico è dato da $P = (0, 0)$. Calcolando le derivate seconde abbiamo

$$H_f(P) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \det H_f(P) < 0.$$

Dunque P è un punto di sella.

$$f_x = \frac{y}{(1+(xy)^2)}, \qquad f_y = \frac{x}{(1+(xy)^2)}.$$

$$f_{xx} = -\frac{2xy^3}{(1+(xy)^2)^2}$$

$$f_{yy} = -\frac{2x^3y}{(1+(xy)^2)^2}$$

$$f_{xy} = -\frac{2x^2y^2}{(1+(xy)^2)^2} + \frac{1}{(1+(xy)^2)}$$

Minimi e Massimi locali

- Sia A un aperto $\subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Assumiamo che esista $r > 0$ tale che per ogni $x \in A \cap B_r(x_0)$ abbiamo $f(x) \geq f(x_0)$, allora x_0 è un punto di minimo locale e $f(x_0)$ è il minimo locale.
- Sia A un aperto $\subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Assumiamo che esista $r > 0$ tale che per ogni $x \in A \cap B_r(x_0)$ abbiamo $f(x) \leq f(x_0)$, allora x_0 è un punto di massimo locale e $f(x_0)$ è il massimo locale.

Punti di sella.

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

$(0,0)$ Punto stazionario
Classificare

$$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$$

$$f_x(x,y) = -2xe^{-(x^2+y^2)}$$

$$f_y(x,y) = -2ye^{-(x^2+y^2)}$$

Calcoliamo

$$f_{xx} = -2e^{-(x^2+y^2)} + 4x^2e^{-(x^2+y^2)}$$

$$f_{yy} = -2e^{-(x^2+y^2)} + 4y^2e^{-(x^2+y^2)}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 4xye^{-(x^2+y^2)}$$

Matrice Hessiana

$$\begin{pmatrix} -2e^{-(x^2+y^2)} + 4x^2 e^{-(x^2+y^2)} & 4xye^{-(x^2+y^2)} \\ 4xye^{-(x^2+y^2)} & -2e^{-(x^2+y^2)} + 4y^2 e^{-(x^2+y^2)} \end{pmatrix}$$

Calcolo in $(0,0)$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Determinante $(= 4)$ primo elemento negativo $(= -2)$.
$(0, 0)$ punto di massimo relativo $\quad f(0, 0) = 1$.

Classificare gli eventuali punti stazionari della funzione definita in $\mathbb{R}^2$ da

$$f(x,y) = \cos x + \sin y$$

I punti stazionari della funzione sono dati dal sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\sin x = 0 \\ \cos y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{\pi}{2} + j\pi & j \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Si hanno dunque infiniti punti stazionari, ciascuno di coordinate $(k\pi, \frac{\pi}{2} + j\pi)$, al variare di $k \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{Z}$.

La matrice hessiana in un generico punto (x, y) è

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} -\cos x & 0 \\ 0 & -\sin y \end{pmatrix}.$$

Calcolandola in un generico punto stazionario diventa

$$H\big(k\pi, \frac{\pi}{2} + j\pi\big) = \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} & 0 \\ 0 & (-1)^{j+1} \end{pmatrix}$$

Il determinante della matrice Hessiana in un generico punto stazionario risulta $(-1)^{j+k}$. Dunque, se k e j sono entrambi pari o entrambi dispari, il determinante risulta pari a 1 e dunque positivo; si tratterà di punti di max o min relativo a seconda del segni di $(-1)^{k+1}$: se k è pari si tratta di un punto di max relativo, se k è dispari si tratta di un minimo relativo. Ripetendo se k e j sono entrambi pari si tratta di un massimo relativo. Se invece k e j sono entrambi dispari si tratta di un minimo relativo. Se infine k è pari e j è dispari (o viceversa), abbiamo un punto di sella poichè il valore del determinante è -1.

Esercizio. La funzione

$$f(x, y) = \cos x + \sin y$$

ha

$\boxed{\text{a}}$ un unico punto di massimo

$\boxed{\text{b}}$ un unico punto di minimo

$\boxed{\text{c}}$ infiniti punti di sella

Determinare i punti critici (o stazionari) e classificarli.

$$f(x,y,z) = (x^2-1)(y^2+z^2-1)$$

$$f_x = 2x(y^2+z^2-1) = 0 \;\; f_y = 2y(x^2-1) = 0 \;\; f_z = 2z(x^2-1) = 0$$

$$(0,0,0) \cup (\pm 1, y, z) : y^2+z^2 = 1$$

$$f_{xx} = 2(y^2+z^2-1) \;\; f_{yy} = 2(x^2-1) \;\; , f_{zz} = 2(x^2-1)$$
$$f_{xy} = f_{yx} = 4xy \;\; f_{yz} = f_{zy} = 0 \;\; , f_{xz} = f_{zx} = 4xz$$

$$H(0,0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Il punto $(0,0,0)$ risulta di massimo locale.

$$H(-1,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & -4y & -4z \\ -4y & 0 & 0 \\ -4z & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$H(1,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 4y & 4z \\ 4y & 0 & 0 \\ 4z & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcolo degli autovalori

$$H(1, y, z) - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 4y & 4z \\ 4y & -\lambda & 0 \\ 4z & 0 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_1 = 0, \;\; \lambda_2 = 4\sqrt{y^2 + z^2} \;\; \lambda_3 = -4\sqrt{y^2 + z^2}$$

Analogo calcolo per l'altra matrice hessiana calcolata in $(-1, y, z)$.
Punti di sella.

Le condizioni necessarie.

- CONDIZIONE NECESSARIA DEL PRIMO ORDINE: Sia $f : A \to \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Se f è derivabile in un punto x_0 di massimo (minimo) locale interno a A, allora $Df(x_0) = 0$. Punti critici o stazionari.
- CONDIZIONE NECESSARIA DEL SECONDO ORDINE: Sia $f : A \to \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se $f \in C^2$ in un intorno del punto punto x_0 di massimo o minimo locale interno a A, allora $D^2 f(x_0)$ è semidefinita negativa (positiva).

Minimi e massimi relativi con determinante hessiano nullo.

$$f(x,y) = (x+y)(1-(x+y)^2) = (x+y) - (x+y)^3$$

$$f_x(x,y) = 1 - 3(x+y)^2 = 0 \quad f_{xx} = -6(x+y)$$

$$f_y(x,y) = 1 - 3(x+y)^2 = 0, \quad f_{yy} = -6(x+y)$$

$$f_{xy} = f_{yx} = -6(x+y)$$

$$(x+y)^2 = \frac{1}{3}$$

Minimi e massimi relativi con determinante hessiano nullo.
Fare esempio per esercizio

$$f(x, y) = (ax + by)(1 - (ax + by)^2)$$

$$f(x, y) = (x + y)(1 - (x + y)^2)$$

$$x + y = t$$

$$f(t) = t(1 - t^2) = t - t^3 \qquad f'(t) = 1 - 3t^2 = 0 \iff t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$f''(\frac{1}{\sqrt{3}}) < 0 \quad f''(-\frac{1}{\sqrt{3}}) > 0$$

K chiuso: Un insieme K è chiuso se l'insieme complementare in $\mathbb{R}^n$ è aperto
K limitato: Un insieme K è limitato se esiste una costante L tale che $\|x\| < L$ per ogni $x \in K$.

$$f : K \to \mathbb{R}$$

Se $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ per ogni $(x, y) \in K$ allora (x_0, y_0) è un punto di massimo globale o assoluto;
Se $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ per ogni $(x, y) \in K$ allora (x_0, y_0) è un punto di minimo globale o assoluto.
Teorema di Weierstrass. Una funzione continua in un insieme chiuso e limitato K di $\mathbb{R}^n$ ammette minimo e massimo assoluto.

Minimo e Massimo in insiemi chiusi e limitati: ricerca di minimi e massimi assoluti.
Assumiamo $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e K un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^2$. Sull'insieme K, f assume il minimo e il massimo assoluto.

- Trovare i punti in cui si annulla il gradiente di f all'interno di K ($\mathrm{int}\,(K)$).
- Trovare i punti in cui si annulla il gradiente di f in K sulla frontiera dell'insieme K.
- Valutare la funzione in tutti questi punti per trovare il minimo e il massimo

Trovare il minimo e il massimo della funzione
$f(x,y) = 1 + x^2 - y^2$ in K, dove K é il trapezio deliminato dai punti $(1,2), (-1,2), (1/4, 1/2), (-1/4, 1/2)$, con il bordo incluso.
Disegnare l'insieme:

- Nell' interno di K

$$f_x(x,y) = 2x \qquad f_y(x,y) = -2y$$

  $Df(x,y) = 0 \iff x = 0, y = 0$. Il punto $(0,0)$ non appartiene all'interno di K per tale motivo non lo consideriamo. Studiamo la funzione sul bordo

- Calcolare la funzione nei punti $(1,2), (-1,2), (1/4,1/2), (-1/4,1/2)$

$$f(1,2) = f(-1,2) = -2$$

$$f(1/4,1/2) = f(-1/4,1/2) = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$$

Calcoliamo la funzione sui segmenti del bordo

- $$f(x,1/2) = x^2 - \frac{1}{4} + 1 = x^2 + \frac{3}{4} \qquad -1/4 \leq x \leq 1/4$$
- $$f(x,2x) = -3x^2 + 1 \qquad 1/4 \leq x \leq 1$$
- $$f(x,2) = x^2 - 3 \qquad -1 \leq x \leq 1$$
- $$f(x,-2x) = -3x^2 + 1 \qquad -1 \leq x \leq -1/4$$
- ponendo =0 le derivate troviamo i punti $(0,1/2)$ e $(0,2)$

$$f(0,1/2) = 3/4 \qquad f(0,2) = -3$$

Come conseguenza dobbiamo confrontare

$$f(0,1/2) = 3/4 \quad f(0,2) = -3 \quad f(1,2) = f(-1,2) = -2$$

$$f(1/4,1/2) = f(-1/4,1/2) = \frac{13}{16}$$

Quindi

$$x_m = (0,2) \quad m = -3 \qquad x_M = (1/4,1/2)\ x_M = (-1/4,1/2) \quad M = \frac{13}{16}$$

Sia f una funzione differenziabile in un aperto A di $\mathbb{R}^n$.
$\lambda : ||\lambda|| = 1$.

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = Df \cdot \lambda$$

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$|\frac{\partial f}{\partial \lambda}| \leq ||Df||$$

ove vale il segno di uguaglianza se e solo se Df e λ sono paralleli.
Assumendo $Df \neq 0$, e tenuto conto

$$-||Df|| \leq \frac{\partial f}{\partial \lambda} \leq ||Df||$$

$$\lambda = \frac{Df}{||Df||} \implies \frac{\partial f}{\partial \lambda} = ||Df||$$

derivata direzionale massima

$$\lambda = -\frac{Df}{||Df||} \implies \frac{\partial f}{\partial \lambda} = -||Df||$$

derivata direzionale minima.

Esercizio. Siano dati $n > 2$ punti distinti. Trovare la retta che minimizza l'errore

$$F(a_0, a_1) = \sum_{j=1}^{n} (a_1 x_j + a_0 - y_j)^2$$

$$\sum_{j=1}^{n} (a_1 x_j + a_0 - y_j)^2 =$$

$$a_1^2 \sum_{j=1}^{n} x_j^2 + n a_0^2 + \sum_{j=1}^{n} y_j^2 + 2 a_0 a_1 \sum_{j=1}^{n} x_j - 2 a_0 \sum_{j=1}^{n} y_j - 2 a_1 \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial a_0} = 2\sum_{j=1}^{n}(a_1 x_j + a_0 - y_j) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial a_1} = 2\sum_{j=1}^{n} x_j(a_1 x_j + a_0 - y_j) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 n + a_1\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) = \sum_{j=1}^{n} y_j \\ a_0\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) + a_1\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} n & \sum_{j=1}^{n} x_j \\ \sum_{j=1}^{n} x_j & \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \end{vmatrix} = n\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right) - \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2$$

In generale si può dimostrare $det(D) \neq 0$. Dimostrare nel caso di campionamento $x_j = j$.

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{6} n(1+n)(2n+1)$$

$$\frac{1}{6}n^2(1+n)(2n+1) - \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 = \frac{1}{12}n^2(1+n)(2(2n+1) - 3(1+n))$$

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{j=1}^n y_j & \sum_{j=1}^n x_j \\ \sum_{j=1}^n x_j y_j & \sum_{j=1}^n x_j^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum_{j=1}^n x_j \\ \sum_{j=1}^n x_j & \sum_{j=1}^n x_j^2 \end{vmatrix}}$$

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum_{j=1}^n y_j \\ \sum_{j=1}^n x_j & \sum_{j=1}^n x_j y_j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum_{j=1}^n x_j \\ \sum_{j=1}^n x_j & \sum_{j=1}^n x_j^2 \end{vmatrix}}$$

Matrice hessiana

$$H(a_0, a_1) = \begin{pmatrix} 2n & 2\sum_{j=1}^n x_j \\ 2\sum_{j=1}^n x_j & 2\sum_{j=1}^n x_j^2 \end{pmatrix}.$$

$det(D) > 0$. $2n > 0$ punto di minimo locale.

Esercizio Massimizzare $f(x, y) = 4xy$ soggetto ai vincoli

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a > 0, b > 0$$

$$x \geq 0, \qquad y \geq 0$$

Osserviamo $x = 0$ o $y = 0$ allora $f(x, y) = 0$.
Stiamo considerando un problema di massimizzazione soggetto a vincoli: consideriamo $x > 0$ and $y > 0$.
Equazioni parametriche della curva quando $t \in (0, \pi/2)$.

$$\begin{cases} x(t) = a\cos(t) & t \in (0, \pi/2) \\ y(t) = b\sin(t) \end{cases}$$

$$F(t) = 4ab\cos(t)\sin(t) = 2ab\sin(2t) \quad t \in [0, \pi/2]$$

$$F'(t) = 0 \iff \cos(2t) = 0 \quad 2t = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad t_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$x_0 = x(t_0) = a\sqrt{2}/2 \qquad y_0 = y(t_0) = b\sqrt{2}/2$$

Minimi e massimi per funzioni non derivabili: valutare la funzione ove non è derivabile. Trovare il minimo della funzione

$$f(x, y) = |x| + |y|,$$

in K chiuso e limitato. Per il teorema di Weierstrass abbiamo esistenza di minimi e massimi globali.
Occorre valutare la funzione nei punti in cui non esistono le derivate parziali prime.
Il punto $(0, 0)$ è di minimo globale.

$$f(x, y) = |x| + |y|,$$

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

$$f(1, 0) = f(-1, 0) = f(0, 1) = f(0, -1) = 1$$

Utilizzo di coordinate polari

- $x > 0, y > 0$ $F(\theta) = \cos(\theta) + \sin(\theta)$ $\theta \in (0, \pi/2)$
- $x < 0, y > 0$ $F(\theta) = -\cos(\theta) + \sin(\theta)$ $\theta \in (\pi/2, \pi)$.
- $x < 0, y < 0$ $F(\theta) = -\cos(\theta) - \sin(\theta)$ $\theta \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$
- $x > 0, y < 0$ $F(\theta) = \cos(\theta) - \sin(\theta)$ $\theta \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$

- $x > 0, y > 0.$ $F'(\theta) = -\sin(\theta) + \cos(\theta) = 0,$
- $x < 0, y > 0$ $F'(\theta) = \sin(\theta) + \cos(\theta) = 0,$
- $x < 0, y < 0$ $F'(\theta) = \sin(\theta) - \cos(\theta) = 0,$
- $x > 0, y < 0$ $F'(\theta) = -\sin(\theta) - \cos(\theta) = 0.$

Esercizio: Determinare il minimo e il massimo assoluti.

Funzioni armoniche.
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto regolare di $\mathbb{R}^n$. Sia $f \in C^2(\Omega)$ una funzione a valori reali. La funzione si dice armonica se soddisfa l'equazione di Laplace

$$\Delta f = 0,$$

ove

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i x_i}$$

n=2

$$\Delta f(x, y) = f_{xx} + f_{yy}$$

$$f(x, y) = e^x \cos y$$

Esercizio.

$$\Delta(af + bg) = a\Delta f + b\Delta g$$

$\boxed{\text{a}}$ Vero $\boxed{\text{b}}$ Falso

Esercizio.

$$\Delta(fg) = (\Delta f)g + 2(Df) \cdot (Dg) + f(\Delta g)$$

$\boxed{\text{a}}$ Vero $\boxed{\text{b}}$ Falso

Esercizio.$f(x, y) = x^2 - y^2$ soddisfa in $\mathbb{R}^2$ l'equazione alle derivate parziali $\Delta f = 0$.

$\boxed{\text{a}}$ Vero $\boxed{\text{b}}$ Falso

Esercizio. In $\mathbb{R}$ le soluzioni di $\Delta f = 0$ sono date da $f(x) = cx + d$ con c, d costanti reali arbitrarie.

$\boxed{\text{a}}$ Vero $\boxed{\text{b}}$ Falso

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

nella chiusura di $B_1((0,0))$. Ricerca del massimo.

- Punti interni $(0,0)$ in cui la funzione vale 0
- Punti sulla frontiera $\theta \in [0, 2\pi]$.

$$f(\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos(2\theta)$$

$$f'(\theta) = -2\sin(2\theta) = 0 \iff 2\theta = k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\theta = k\pi/2, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\theta_1 = 0,\ \theta_2 = \pi/2,\ \theta_3 = \pi, \theta_4 = 3\pi/2,\ \theta_5 = 2\pi....$$

$$f(\theta_1 = 0) = f(\theta_5 = 2\pi) = 1,\ \ f(\theta_2) = -1,\ \ f(\theta_3) = 1, f(\theta_4) = -1.$$

$$m = -1,\ \ M = 1$$

Principio del massimo per le funzioni armoniche. Sia Ω un sottoinsieme regolare aperto e limitato di $\mathbb{R}^n$. Sia

$$M = \max\{f(x,y), (x,y) \in \partial\Omega\}$$

$$m = \min\{f(x,y), (x,y) \in \partial\Omega\},$$

e f una funzione armonica. Allora

$$m \leq f(x,y) \leq M \quad (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

Dimostremo

$$f(x, y) \leq M \quad (x, y) \in \overline{\Omega}.$$

La dimostrazione si basa sullo studio della funzione

$$g_\epsilon(x, y) = f(x, y) + \epsilon(x^2 + y^2) \quad (x, y) \in \overline{\Omega},$$

con $\epsilon > 0$.
$g_\epsilon(x, y) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$,

$$\Delta g_\epsilon(x, y) = \Delta f(x, y) + 4\epsilon > 0$$

Allora non ci sono punti di massimo locali interni per g_ϵ, infatti in tali punti (x_ϵ, y_ϵ) risulterebbe

$$\Delta g_\epsilon(x_\epsilon, y_\epsilon) \leq 0$$

.

Nota:

$$Hg(x_\epsilon, y_\epsilon) = g_{xx}(x_\epsilon, y_\epsilon) g_{yy}(x_\epsilon, y_\epsilon) - g_{xy}^2(x_\epsilon, y_\epsilon) \geq 0$$

$$g_{xx}(x_\epsilon, y_\epsilon) \leq 0 \implies g_{yy}(x_\epsilon, y_\epsilon) \leq 0,$$

quindi

$$\Delta g_\epsilon(x_\epsilon, y_\epsilon) \leq 0$$

Allora se $(x, y) \in \overline{\Omega}$ si ha

$$g_\epsilon(x, y) \leq \max\{f(x, y) + \epsilon(x^2 + y^2), (x, y) \in \partial\Omega\}.$$

Ricordando che $\overline{\Omega}$ è limitato per ipotesi, si ha che esiste un numero reale positivo L tale che

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq L \quad (x, y) \in \overline{\Omega}.$$

Se $(x, y) \in \overline{\Omega}$

$$g_\epsilon(x, y) \leq \max\{f(x, y) + \epsilon L^2, (x, y) \in \partial\Omega\} = M + \epsilon L^2,$$

ossia

$$f(x, y) + \epsilon(x^2 + y^2) \leq M + \epsilon L^2.$$

Il risultato segue per $\epsilon \to 0$.

$r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Ipotesi C^2 su f.

$$x = r\cos\theta;$$
$$y = r\sin\theta.$$

$$\mathbf{J_F}(r,\theta) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial y} =$$

$$= \cos\theta \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial r} \right) +$$

$$\sin\theta \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial r} \right) =$$

$$\cos^2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\cos\theta\sin\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sin^2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = -r\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial x} - r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} - r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial y} =$$

$$-r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} - r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$-r\sin\theta\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)\right.$$

$$\left.+r\cos\theta\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)\right) =$$

$$-r(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y})$$

$$-r\sin\theta\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-r\sin\theta)+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}r\cos\theta\Big)$$

$$+r\cos\theta\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-r\sin\theta)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}r\cos\theta\Big)=$$

$$-r(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y})+r^2\Big(\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big)$$

Dividiamo per r^2 ottenendo

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}=-\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Mettendo insieme

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} = -\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Esercizio Sia $\phi \in \mathbb{R}$, e $\rho \in (0,1)$ calcolare

- $$\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \cos(k\phi)$$
- $$\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \sin(k\phi)$$

Soluzione

- $$\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \cos(k\phi) = \frac{1-\rho\cos(\phi)}{1-2\rho\cos(\phi)+\rho^2}$$
- $$\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \sin(k\phi) = \frac{\rho\sin(\phi)}{1-2\rho\cos(\phi)+\rho^2}$$

La formula di Poisson nel cerchio.
Consideriamo l'equazione di Laplace nel cerchio $x^2 + y^2 < R^2$, e assegnamo una funzione al bordo del cerchio $x^2 + y^2 = R^2$.

$$\begin{cases} f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y) = 0 & x^2 + y^2 < R^2, \\ f(x,y) = g(x,y) & x^2 + y^2 = R^2. \end{cases}$$

Abbiamo così formulato il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace nel cerchio.

Motivati dalla geometria cerchiamo la soluzione in coordinate polari $F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$
In coordinate polari il problema si scrive

$$F_{rr}(r,\theta) + \frac{1}{r}F_r(r,\theta) + \frac{1}{r^2}F_{\theta\theta}(r,\theta) = 0,$$
$$0 \leq r < R \ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$F(R,\theta) = G(\theta) = g(R\cos\theta, R\sin\theta)$$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

Assumiamo che la soluzione possa essere ottenuta come prodotto di due funzioni

$$F(r, \theta) = H(r)K(\theta)$$

di cui K è limitata e 2π periodica, e H è limitata.

$$H''(r)K(\theta) + \frac{1}{r}H'(r)K(\theta) + \frac{1}{r^2}H(r)K''(\theta) = 0$$

$$\frac{1}{H(r)K(\theta)}H''(r)K(\theta) + \frac{1}{H(r)K(\theta)}\frac{1}{r}H'(r)K(\theta) +$$

$$\frac{1}{H(r)K(\theta)}\frac{1}{r^2}H(r)K''(\theta) = 0$$

$$\frac{1}{H(r)}r^2H''(r) + r\frac{1}{H(r)}H'(r) + \frac{1}{K(\theta)}K''(\theta) = 0$$

$$K''(\theta) + m^2K(\theta) = 0$$

$$\frac{1}{H(r)}r^2H''(r) + r\frac{1}{H(r)}H'(r) = -\frac{1}{K(\theta)}K''(\theta)$$

$$\frac{1}{H(r)}r^2H''(r) + r\frac{1}{H(r)}H'(r) = m^2$$

$$-\frac{1}{K(\theta)}K''(\theta) = m^2$$

$$K''(\theta) + m^2K(\theta) = 0$$

Perchè m^2? K è 2πperiodica

$$K''(\theta) + \lambda K(\theta) = 0$$

- $$\lambda < 0 \implies K = Ae^{-\sqrt{\lambda}\theta} + Be^{\sqrt{\lambda}\theta}$$

  K è 2π periodica : questa funzione non è 2π periodica a meno che $A = B = 0$

- $$\lambda = 0 \implies K = A\theta + B$$

  dove A e B sono costanti. Questo non è possibile a meno che $A = 0$.

- Quindi $\lambda = m^2$

$$K''(\theta) + m^2 K(\theta) = 0$$

$$K(\theta) = a_m \cos(m\theta) + b_m \sin(m\theta)$$

- $$K(\theta) = a_m \cos(m\theta) + b_m \sin(m\theta)$$
- $$r^2 H''(r) + rH'(r) - m^2 H(r) = 0$$

$$r^2 H''(r) + rH'(r) - m^2 H(r) = 0$$

Assumiamo la soluzione della forma r^α e cerchiamo α

- $$\alpha(\alpha - 1)r^\alpha + \alpha r^\alpha - m^2 r^\alpha = 0$$

$$\alpha^2 - m^2 = 0$$

.

Affinchè H sia ben definita al centro del cerchio, consideriamo la soluzione determinata dalla scelta $\alpha = m > 0$
$F_m(r,\theta) = r^m(a_m \cos(m\theta) + b_m \sin(m\theta))$,
e, per linearità, la soluzione generale si ottiene tramite la serie

$$F(r,\theta) = a_0 + \sum_{m=1}^{+\infty} r^m(a_m \cos(m\theta) + b_m \sin(m\theta))$$

Tornando al dato sul bordo

- espansione di Fourier expansion di G

$$G(\theta) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{m=1}^{+\infty}(\alpha_m \cos(m\theta) + \beta_m \sin(m\theta))$$

α_m e β_m sono i coefficienti di Fourier della funzione G

$$\alpha_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} G(\phi)\cos(m\phi)d\phi$$

$$\beta_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} G(\phi)\sin(m\phi)d\phi$$

Osserviamo che $F(R, \theta) = G(\theta)$. Quindi

- $$a_0 = \frac{1}{2}\alpha_0 \quad a_m = R^{-m}\alpha_m \quad b_m = R^{-m}\beta_m$$

Sostituiamo nell'espressione della F

$$F(r,\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} G(\phi)[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^m \cos(m(\phi-\theta))]d\phi,$$

Osserviamo

$$\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^m e^{im(\phi-\theta)} =$$

$$\frac{1}{1-\frac{r}{R}e^{i(\phi-\theta)}} - 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{1-\frac{r}{R}e^{i(\phi-\theta)}} - \frac{1}{2}.$$

Abbiamo

$$\frac{1}{1-\frac{r}{R}e^{i(\phi-\theta)}} = \frac{R}{R - r\cos(\phi-\theta) - ir\sin(\phi-\theta)}$$

Allora

$$\frac{R(R - r\cos(\phi-\theta) + ir\sin(\phi-\theta))}{(R - r\cos(\phi-\theta) - ir\sin(\phi-\theta))(R - r\cos(\phi-\theta) + ir\sin(\phi-\theta))} =$$

$$\frac{R^2 - rR\cos(\phi-\theta) + iRr\sin(\phi-\theta))}{(R^2 - 2Rr\cos(\phi-\theta)) + r^2}$$

Osserviamo che

$$(R-r\cos(\phi-\theta)-ir\sin(\phi-\theta))(R-r\cos(\phi-\theta)+ir\sin(\phi-\theta)) =$$

$$(R - r\cos(\phi-\theta))^2 + r^2\sin^2(\phi-\theta) = R^2 - 2Rr\cos(\phi-\theta) + r^2$$

Prendendo la parte reale del precedente calcolo

$$F(r,\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} G(\phi)\left(\frac{R^2 - rR\cos(\phi-\theta)}{R^2 - 2Rr\cos(\phi-\theta) + r^2} - \frac{1}{2}\right)d\phi$$

Tenendo conto che

$$\frac{R^2 - rR\cos(\phi-\theta)}{R^2 - 2Rr\cos(\phi-\theta) + r^2} - \frac{1}{2} =$$

$$\frac{2R^2 - 2rR\cos(\phi-\theta) - R^2 + 2Rr\cos(\phi-\theta) - r^2}{2(R^2 - 2Rr\cos(\phi-\theta) + r^2)}$$

$$F(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\phi-\theta) + r^2} G(\phi)d\phi$$

Questa è la formula di Poisson per il problema di Dirichlet dell'equazione di Laplace nel cerchio.

Funzioni complesse. Funzioni derivabili in senso complesso. Condizioni di Cauchy-Riemann Dal punto di vista formale la definizione di derivabilità in un punto z_0 presenta analogie alla definizione di derivabilità per funzioni reali di variabile reale, occorre sottolineare che i due concetti sono profondamente diversi e la condizione di derivabilià complessa è estremamente forte.

Dato $z_0 \in \mathbb{C}$ e $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se esiste finito il limite del rapporto incrementale (inteso come quoziente di numeri complessi)

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$$

dove il rapporto si può scrivere:

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta x + i\Delta y} +$$

$$i \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta x + i\Delta y}$$

Assumiamo ora che la $f(z) = u(x, y) + iw(x, y)$ sia derivabile in $\mathbb{C}$.
Sia $z_0 \in \mathbb{C}$.
$(\Delta x, 0) \to (0, 0) \qquad (0, \Delta y) \to (0, 0)$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} =$$

$$u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{i\Delta y} + i \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{i\Delta y} =$$

$$\frac{u_y(x_0, y_0)}{i} + v_y(x_0, y_0)$$

Uguagliando i limiti, deduciamo le Condizioni di Cauchy- Riemann

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \end{cases}$$

- La funzione $f(z) = \bar{z}$ non verifica le condizioni di Cauchy-Riemann in $\mathbb{C}$.
- La funzione $f(z) = e^z$ verifica le condizioni di Cauchy-Riemann in $\mathbb{C}$.
- La funzione $f(z) = \cos z$ verifica le condizioni di Cauchy-Riemann in $\mathbb{C}$.

- La funzione $f(z) = \bar{z}$ non verifica le condizioni di Cauchy-Riemann in $\mathbb{C}$.

$\boxed{\text{a}}$ Vero

$\boxed{\text{b}}$ Falso

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \end{cases}$$

$$u(x, y) = x, \quad v(x, y) = -y$$

dunque

$$u_x = 1 \quad v_y = -1$$

- La funzione $f(z) = e^z$ verifica le condizioni di Cauchy-Riemann in $\mathbb{C}$.

$\boxed{\text{a}}$ Vero $\boxed{\text{b}}$ Falso

$$e^z = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$u(x,y) = e^x \cos y$$

$$v(x,y) = e^x \sin y$$

$$u_x = e^x \cos y = v_y$$

$$u_y = -e^x \sin y = -v_x$$

VERO: La funzione e^z verifica le condizioni di Cauchy -Riemann in $\mathbb{C}$.

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \end{cases}$$

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

$$u(x, y) = \cos x \cosh y \quad v(x, y) = -\sin x \sinh y$$

$$u_x(x, y) = -\sin x \cosh y \quad v_y(x, y) = -\sin x \cosh y$$

$$u_y(x, y) = \cos x \sinh y \quad v_x(x, y) = -\cos x \sinh y$$

$f(z) = |z|^2$ verifica le Condizioni di Cauchy Riemann SOLTANTO nel punto $z_0 = 0$

$\boxed{\text{a}}$ Vero

$\boxed{\text{b}}$ Falso

$f(z) = |z|^2$ verifica le Condizioni di Cauchy Riemann solo nel punto $z_0 = 0$ Infatti: $u(x, y) = x^2 + y^2$ e $v(x, y) = 0$ dunque $v_x = v_y = 0$ mentre $u_x = 2x$ e $u_y = 2y$ pertanto il solo punto dove sono soddisfatte le Condizioni di Cauchy Riemann è $(0, 0)$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2i}((e^{-y} - e^{y})\cos x + i(e^{-y} + e^{y})\sin x) =$$

$$\cosh y \sin x + i \sinh y \cos x$$

Ricorda

$$e^{iz} - e^{-iz} = (e^{-y} - e^{y})\cos x + i(e^{-y} + e^{y})\sin x$$

Condizioni di Cauchy Riemann

$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$.
Si può dimostrare

- Siano $u(x,y)$ e $v(x,y)$ due funzioni differenziabili e soddisfacenti le condizioni di Cauchy Riemann in un insieme aperto A allora f è olomorfa in A.

Ricordiamo Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$
f è differenziabile in (x,y)

- f ammette derivate parziali prime
- vale

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x+h,y+k) - f(x,y) - f_x(x,y)h - f_y(x,y)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Esempio di funzione olomorfa in $\mathbb{C}$: $f(z) = e^z$, $f(z) = \cos z$, $f(z) = \sin z$, $f(z) = z^n$

$$D(e^z) = e^z$$

$$D(\cos z) = -\sin z, \; D(\sin z) = \cos z$$

- Da
$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0),$$
ricavare la derivata complessa
$$D(e^z) = e^z$$

Se f è olomorfa in $\mathbb{C}$ allora f si dice una funzione intera
Si può dimostrare

- La derivata complessa di una funzione olomorfa è continua.
- Se f è olomorfa in A allora f è dotata in A di derivate complesse di ordine comunque elevato

Commento:

- Questa proprietà mette in luce la profonda differenza tra le funzioni di una variabile reale e le funzioni di variabile complessa. In $\mathbb{R}$ una funzione può ammettere derivata di ordine n ma non $n+1$ e anche se derivabile la sua derivata potrebbe non essere continua.
- $f(x) = x|x|$
- Esistono funzioni derivabili in tutti i punti di un intervallo, con derivata non continua.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Dalla definizione

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

$D(z^3)$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{z^3 - z_0^3}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} z^2 + z_0^2 + z z_0 = 3z_0^2$$

....

$$D(z^n) = n z^{n-1},\ n \in \mathbb{N},$$

Una funzione analitica è una funzione localmente espressa da una serie di potenze convergente.
Una funzione derivabile in senso complesso in un aperto A è detta analitica, nei complessi l'esistenza della derivata prima implica quella delle derivate di ordine superiore e si può dimostrare che tutte le funzioni olomorfe su un insieme aperto sono analitiche. Di conseguenza, in analisi complessa, il termine funzione analitica è un sinonimo di funzione olomorfa.

Funzioni armoniche coniugate
La parte reale e la parte immaginaria di una funzione olomorfa sono funzioni armoniche

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$v_{xx} + v_{yy} = 0$$

Verifica

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

$$u(x, y) = \cos x \cosh y \quad v(x, y) = -\sin x \sinh y$$

Infatti delle equazioni di Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x,$$

si ha:

$$\begin{cases} u_{xx} = v_{yx} \\ u_{xy} = v_{yy} \\ u_{yx} = -v_{xx} \\ u_{yy} = -v_{xy}. \end{cases}$$

Sommando la prima e l'ultima e la seconda e la terza e utilizzando il teorema di Schwarz sull' invertibilità delle derivate parziali:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ v_{xx} + v_{yy} = 0. \end{cases}$$

u e v si dicono armoniche coniugate

Esempio di come calcolare l'armonica coniugata di una funzione armonica $u(x, y)$

$$u(x, y) = y^3 - 3x^2 y + x + y$$

Questa funzione è armonica perchè:

$$u_x = -6xy + 1, \quad u_{xx} = -6y$$

$$u_y = 3y^2 - 3x^2 + 1 \quad u_{yy} = 6y$$

Dunque

$$u_{xx} + u_{yy} = -6y + 6y = 0.$$

Volendo trovare l'armonica coniugata $v(x, y)$, utilizzando le condizioni di Cauchy-Riemann
$u_x = v_y$ si ha:

$$u_x = -6xy + 1 = v_y.$$

Integriamo v_y mantenendo fissata la variabile x

$$v(x,y) = \int -6xy\, dy + y = -3xy^2 + y + \phi(x),$$

$\phi(x)$ è una funzione arbitraria dipendente da x da determinare. Per utilizzare l'altra condizione di Cauchy-Riemann $u_y = -v_x$ deriviamo v

$$v_x = -3y^2 + \phi_x(x),$$

Calcoliamo u_y

$$u_y = 3y^2 - 3x^2 + 1.$$

Uguagliando ricaviamo ϕ

$$3y^2 - 3x^2 + 1 = 3y^2 - \phi_x(x)$$

dalla quale per integrazione:

$$\phi(x) = x^3 - x + c,$$

dove c è la costante di integrazione.

$$v(x, y) = -3xy^2 + x^3 - x + y + c$$

Esercizio. Descrivere π in termini complessi.
Applicare la definizione di logaritmo complesso principale al numero -1:

$$\ln(-1) = \ln|-1| + i\arg(-1) = \ln 1 + i\pi = 0 + i\pi = i\pi$$

e si ricava

$$\frac{\ln(-1)}{i} = \pi.$$

Esercizio. Calcolare tutti i possibili valori di $(-1)^{-i}$ al variare dell'argomento.

$$(-1)^{-i} = e^{\ln(-1)^{-i}} = e^{-i\ln(-1)} =$$
$$e^{-i(i(\pi+2k\pi))} = e^{\pi+2k\pi}$$

Esercizio. (Valore principale)

$$\ln(-2) = \ln|-2| + i\arg(-2) = \ln 2 + i\pi = \ln 2 + i\pi$$

Esercizio

Sia f una funzione olomorfa su un aperto $A \subset \mathbb{C}$. Se $f = u + iv$, (con u,v funzioni a valori reali, e $z = x + iy$), dimostrare

$$Det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = |f'(z)|^2$$

Per funzioni a valori complessi non possiamo parlare del massimo della funzione perchè i numeri complessi non sono ordinati. Possiamo considerare

$$|f(z)|$$

Insiemi connessi in $\mathbb{R}^2$
Un insieme aperto A si dice connesso se non esistono due aperti disgiunti non vuoti di $\mathbb{R}^2$ la cui unione sia A.
Ricordiamo il Principio del massimo per funzioni reali. Sia Ω un sottoinsieme regolare aperto e limitato di $\mathbb{R}^2$, f una funzione armonica. Allora

$$\max_{\partial\Omega} f = \max_{\overline{\Omega}} f$$

Inoltre (Principio del massimo forte) se Ω è connesso ed esiste un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ tale che $f(x_0, y_0) = \max_{\overline{\Omega}f}$ allora f é costante in Ω.

Il teorema del massimo modulo

- Se $f(z)$ è una funzione analitica non costante in aperto e connesso limitato D e continua sul bordo ∂D allora il valore massimo di $|f(z)|$ sulla chiusura di D viene raggiunto su ∂D.

Esercizio. Dimostrare che esiste $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| = 1$, $|\cos(z)| > 1$

Soluzione: $\cos(z)$ analitica in $\mathbb{C}$. Consideriamo $|\cos(z)|$ nella regione $|z| \leq 1$. Il massimo viene assunto sul bordo $|z| = 1$. Il punto $z = 0$ interno verifica $|\cos(z)| = 1$.

Teorema fondamentale dell'algebra.
Sia $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ un polinomio non costante a coefficienti complessi. Allora f possiede almeno una radice, cioè esiste z_0 tale che $f(z_0) = 0$.

Dimostrazione Possiamo assumere $a_n \neq 0$. Per assurdo assumiamo $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Scriviamo allora

$$\zeta = \frac{1}{z}$$

$$\lim_{|z| \to +\infty} \frac{1}{f(z)} = \lim_{\zeta \to 0} \frac{1}{f(\frac{1}{\zeta})} = \lim_{\zeta \to 0} \frac{1}{a_n \frac{1}{\zeta^n} + \cdots + a_1 \frac{1}{\zeta} + a_0}$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per ζ^n si ha

$$\lim_{|z| \to +\infty} \frac{1}{f(z)} = 0$$

Pertanto, fissato $c \in \mathbb{C}$, esiste un numero reale positivo R tale che

$$\frac{1}{|f(z)|} < \frac{1}{|f(c)|}$$

per ogni z tale $|z| \geq R$. Possiamo prendere $|c| < R$ Sia K il disco chiuso di centro 0 e raggio R. $\frac{1}{|f(z)|}$ è continua in K, (chiuso e limitato), essa possiede un massimo in un punto $w \in K$. Ora il punto w non può appartenere alla frontiera di K. Quindi w è interno a K. Dal principio del massimo modulo si deduce che $\frac{1}{f(z)}$ è costante, e quindi che $f(z)$ è costante: una contraddizione.

Per le funzioni armoniche:$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di variabile reale vale il teorema di Liouville

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ armonica e limitata. Allora f è costante.

Ossia: Non esistono funzioni armoniche limitate e non banali in tutto $\mathbb{R}^n$.

Ritornando alle funzioni di variabile complessa:

Se f è olomorfa in $\mathbb{C}$ allora f si dice una funzione intera. Una funzione f è limitata se la sua immagine è un sottoinsieme limitato del piano complesso.

- Il teorema di Liouville afferma che una funzione intera limitata è una costante.
  La dimostrazione è basata su $f = u + iv$ con u e v armoniche e limitate.

$e^{-iz} = e^{-ix}e^{y} = e^{y}(\cos x - i \sin x)$ la funzione è olomorfa in $\mathbb{C}$ per il teorema di Liouville è illimitata.

Le regole per il calcolo di limiti di funzioni complesse seguono le regole note per funzioni reali

- $$\lim_{z \to z_0} f_1(z) = \ell_1 \quad \lim_{z \to z_0} f_2(z) = \ell_2$$

  Allora

  $$\lim_{z \to z_0} f_1(z) + f_2(z) = \ell_1 + \ell_2 \quad \lim_{z \to z_0} f_1(z) f_2(z) = \ell_1 \ell_2$$

- $$\lim_{z \to z_0} |f_1(z)| = |\ell_1|$$

- $$\lim_{z \to z_0} z^n = z_0^n$$

- Data $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $\lim_{z \to z_0} f(z) = \ell \iff$ $z_0 = x_0 + iy_0 \quad \ell = u_0 + iv_0$

  $$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u = u_0 \quad \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v = v_0$$

Calcolare

- $$\lim_{z \to 1+i} 2|z| + iz^2 - i$$
- $$\lim_{z \to \pi i} ze^z$$

Esempio di funzione olomorfa in $\mathbb{C}$: polinomio di ordine n

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots a_n z^n$$

Esempio di funzione olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1}.$$

Definizione. Siano A un insieme aperto e f una funzione olomorfa in $A \setminus \{z_0\}$. Si dice che z_0 è una singolarità isolata per f se esiste un intorno I di z_0 contenuto in A in cui la f risulta olomorfa in $I \setminus \{z_0\}$
Esempi $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$, $\frac{\sin z}{z^2}$, $e^{1/z}$.

Funzioni che non sono analitiche in qualche punto non ammettono sviluppi in serie di Taylor nell' intorno di tali punti. Tuttavia risulta ancora possibile una rappresentazione in serie di potenze, in un intorno del punto di non analiticitá z_0, contenenti potenze sia positive sia negative di $z - z_0$.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n (z - z_0)^{-n} +$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

In un intorno del punto di non analiticità z_0:

$$B(z_0, R) \setminus \{z_0\} = \{z : 0 < |z - z_0| < R\}$$

Serie di Laurent per una funzione complessa $f(z)$ in un punto z_0:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

dove a_n sono termini costanti, definiti tramite un integrale di linea

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)\, dz}{(z - z_0)^{n+1}}$$

.

Il percorso di integrazione γ si intende in verso antiorario intorno a una curva chiusa semplice che circonda il punto z_0 all'interno di una corona circolare in cui $f(z)$ risulta olomorfa (riprenderemo questo argomento).

A questa formula che utilizza l'integrale complesso nella pratica si preferisce la costruisce la serie di Laurent a partire da combinazioni di sviluppi noti.

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}$$

$z_0 = 0$ Osserviamo $\frac{1}{z}$ serie di Laurent in $z_0 = 0$ con $a_{-1} = 1$ l'unico coefficiente non nullo $(z \neq 0)$. Ora partendo della serie geometrica possiamo esprimere

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n,$$

convergente per $|z| < 1$. Dunque

$$f(z) = \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \dots,$$

valido per $0 < |z| < 1$.

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{-1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{+\infty} z^n,$$

con $|z| < 1$. Vale anche

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^n},$$

valido per $|z| > 1$.

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}$$

In modo analogo

$$\frac{1}{z-2} = \frac{-1}{2-z} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z/2}\right) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n,$$

con $|z/2| < 1$, that is $|z| < 2$ Vale anche

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\frac{1}{\left(1-\frac{2}{z}\right)} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}},$$

valido per $|2/z| < 1$, that is $|z| > 2$.

Concludendo

$$f(z) = \begin{cases} -\sum_{n=0}^{+\infty} z^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n & |z| < 1, \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^n} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n & 1 < |z| < 2, \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}, & |z| > 2. \end{cases}$$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^n} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^n \quad 1 < |z| < 2$$

Esempio Sia

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2}$$

Per trovare lo sviluppo in per z vicino a 0, utilizziamo lo sviluppo in serie di Taylor di e^z

$$e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$$

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{k-2}}{k!} = \sum_{k=-2}^{+\infty} \frac{z^k}{(k+2)!}$$

Esempio Trovare la serie di Laurent in potenze $z - i$ per z vicino a i della funzione

$$\frac{1}{z^2+1}.$$

Osserviamo

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}.$$

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i+(z-i)} = -\frac{i}{2}\frac{1}{1-\frac{i}{2}(z-i)}.$$

L'ultima frazione viene ora sviluppata in serie geometrica per z vicino a i, :

$$\frac{1}{1-\frac{i}{2}(z-i)} = 1 + \frac{i}{2}(z-i) + \left(\frac{i}{2}(z-i)\right)^2 + \left(\frac{i}{2}(z-i)\right)^3 + \ldots =$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n (z-i)^n$$

Sostituiamo questo sviluppo nell'espressione di $1/(z+i)$ e dividiamo per $z-i$ entrambi i membri: otteniamo infine

$$\frac{1}{z^2+1} = -\left(\frac{i}{2}\right)\frac{1}{z-i} - \left(\frac{i}{2}\right)^2 - \left(\frac{i}{2}\right)^3 (z-i) - \left(\frac{i}{2}\right)^4 (z-i)^2 - \ldots.$$

La parte con indici negativi della serie di Laurent viene detta parte principale della serie, mentre quella con indici positivi o nullo, parte regolare.

Classificazioni delle singolarità isolate.

- Singolarità eliminabile

La singolarità isolata z_0 si dice eliminabile se esiste il limite

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L \in \mathbb{C}.$$

Condizione equivalente:

- I termini a_{-k} della serie di Laurent sono tutti nulli per $k \geq 1$.

Esempio: la funzione $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ presenta una singolarità eliminabile in $z = 0$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{C}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\frac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} (2n+1)!$$

- Polo

La singolarità isolata z_0 si dice un polo se esiste un numero intero positivo n tale che esista il limite

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n \cdot f(z) = \ell \in \mathbb{C},$$

con $\ell \neq 0$. Il numero n si dice ordine o molteplicità del polo. Un polo di ordine 1 si dice semplice.
Condizione equivalente:

- Esiste solo un numero finito (diverso da zero) di termini a_{-k} non nulli della serie di Laurent.

- Polo del primo ordine in $z_0 = -1$ per $f(z) = \frac{z}{z+1}$ perchè

$$f(z) = \frac{z}{z+1} = -\frac{1}{z+1} + 1$$

- Ricordiamo: sia z_0 una singolarità isolata per f. z_0 é un polo di ordine n se e solo se esiste non nullo il limite

$$\lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0)^n = \ell \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Polo del primo ordine in $z_0 = i$ per $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ perchè

$$\lim_{z \to i} (z - i) \frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{i + i} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Una funzione razionale complessa

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

dove$p$ e q sono polinomi senza radici comuni. La funzione è definita su

$$\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\},$$

dove $z_1, \dots, z_n$ sono le radici di q. z_i è un polo, il cui ordine è pari alla molteplicità della radice.

$$f(z) = \frac{z+1}{z(z-1)^2},$$

ha un polo di ordine 1 in 0 e un polo di ordine 2 in 1.

Esercizio. Classificare le singolarità isolate

$$f(z) = \frac{(z-1)^2}{z(z+1)^3}$$

- Singolarità essenziale

Una singolarità essenziale è una singolarità isolata che non rientra nei casi precedenti, cioè che non sia né una singolarità eliminabile né un polo.
Condizione equivalente:

- Esiste un numero infinito di termini a_{-k} non nulli della serie di Laurent.
  $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$$

Definizione. Una funzione definita in un aperto $A \subset \mathbb{C}$ olomorfa tranne in eventuali singolarità isolate si dice meromorfa se le singolarità non sono essenziali.

- Ogni funzione razionale è meromorfa in $\mathbb{C}$.

Classificare le singolarità

- $$z_0 = 0 \quad \frac{1-\cos z}{z^2}$$
- $$z_0 = \pm\pi \quad \frac{\sin z}{z^2-\pi^2}$$

Classificare le singolarità

- $$z_0 = 0 \quad \frac{1 - \cos z}{z^2}$$
- $$z_0 = \pm\pi \quad \frac{\sin z}{z^2 - \pi^2}$$
- $$z_0 = 0 \quad \frac{e^z - 1}{z}$$

Classificare le singolarità

- $$z_0 = 0 \quad \frac{1}{z^2}$$

- $$z_0 = 0 \quad \frac{1}{z \sin z}$$

. $z_0 = 0$ polo di ordine 2 ?

$\boxed{a}$ Vero $\boxed{b}$ Falso

- $$z_0 = 0 \quad e^{-\frac{1}{z^2}}$$
- Se f e g hanno una singolarità essenziale in $z = z_0$ posso dire che fg ha una singolarità essenziale in $z = z_0$?

$\boxed{\text{a}}$ Vero $\boxed{\text{b}}$ Falso

$$f(z) = \begin{cases} e^{-1/z^2} & \text{z} \neq 0 \\ 0 & \text{z}=0 \end{cases}$$

Sull'asse reale

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{x} \neq 0 \\ 0 & \text{x}=0 \end{cases}$$

risulta $C^\infty(\mathbb{R})$, mentre nel piano complesso $f(z)$ non è olomorfa in 0.

Infatti preso $z = iy$

$$\lim_{z \to 0} e^{-\frac{1}{z^2}} = \lim_{y \to 0} e^{\frac{1}{y^2}} = +\infty$$

Descrivere le singolarità di

$$f(z) = \frac{1 - e^{2\pi iz}}{z^4 - 1}$$

Soluzione. Gli zeri del denominatore sono le radici quarte di 1, ovvero 1, i, -1, $-i$ e sono semplici. Il numeratore si annulla per $e^{2\pi iz} = 1$, il che equivale a $z \in \mathbb{Z}$; ne segue che ± 1 sono singolarità eliminabili. Continuare l'esercizio...

$n = 2$ Curva: un'applicazione continua da un intervallo I in $\mathbb{R}^2$.

$$\varphi : t \in I \to \varphi(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$$

- Segmento di estremi (x_0, y_0) e (x_1, y_1).

$$\begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \end{cases} \qquad t \in [0, 1]$$

- Circonferenza di centro (x_0, y_0) e raggio r.

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos t \\ y = y_0 + r \sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Distinguere la curva dal sostegno della curva: ecco due curve distinte con lo stesso sostegno

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 6\pi]$$

Il sostegno della curva φ dunque è l'immagine dell'intervallo I tramite la curva φ: $\varphi(I)$.

$I = [a, b]$

- Definizione di curva semplice: una curva si dice semplice se per $t_1 \neq t_2$ di cui almeno un punto interno a I si ha $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$
- Definizione di curva chiusa: una curva si dice chiusa se $\varphi(a) = \varphi(b)$
- Definizione di curva regolare: Sia $\varphi \in C^1$. La curva si dice regolare se
$$x'(t)^2 + y'(t)^2 > 0 \;\; \forall t \in (a, b)$$

Disegnare (a) una curva chiusa, (b) una curva semplice, (c) una curva non semplice.

Sia $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ la curva. Per definire la poligonale bisogna scegliere i punti sulla curva. Sia quindi ρ una partizione dell'intervallo $[a, b]$

$$\rho = \{t_i \in [a, b] : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$$

La lunghezza della poligonale

$$\sqrt{(x(t_1) - x(t_0))^2 + (y(t_1) - y(t_0))^2}$$

$$+ \cdots + \sqrt{(x(t_n) - x(t_{n-1}))^2 + (y(t_n) - y(t_{n-1}))^2} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}$$

La lunghezza della curva: estremo superiore di questa quantità al variare della partizione. Se tale valore risulta finito, la curva si dice rettificabile.

$$L(\varphi) = \sup_{\rho} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}$$

Scelto un numero finito di punti lungo la curva e connettendo ogni punto al successivo con un segmento, sommiamo le lunghezze dei segmenti e otteniamo la lunghezza del cammino tramite poligonali. Per il singolo segmento utilizziamo la distanza euclidea tra i due estremi. La lunghezza della curva è l'estremo superiore della lunghezza del cammino della poligonale, al variare delle poligonali. **Teorema di rettificabilità delle curve** C^1. Sia $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una curva di classe C^1. Allora è rettificabile e vale

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Esempio di curva non rettificabile $t \in [0, 1]$

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t \sin \frac{\pi}{2t} \quad t \neq 0; \quad y(t) = 0 \text{ per } t = 0 \end{cases}$$

Suddivisione

$$[0, \frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n-1}, \ldots, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1]$$

$$\sin((i + \frac{1}{2})\pi) = (-1)^i, \quad i = 0, \ldots, n$$

Punti

$$(0, 0), P_j = (\frac{1}{2j+1}, (-1)^j \frac{1}{2j+1})$$

ove $j \geq 1$. $P_{j-1} = (\frac{1}{2j-1}, (-1)^{j-1} \frac{1}{2j-1})$. Valutiamo $\sqrt{(x_{P_j} - x_{P_{j-1}})^2 + (y_{P_j} - y_{P_{j-1}})^2}$

$$\sqrt{\left(\frac{2}{4j^2-1}\right)^2 + \left(\frac{4j}{4j^2-1}\right)^2} \geq \frac{1}{j}$$

Il risultato segue passando alla somma su j.

La seguente curva è chiusa? E' regolare?

$$\begin{cases} x(t) = te^{-t} & t \in [0,4] \\ y(t) = \frac{1}{2}t^2 - t \end{cases}$$

Soluzione:

Per $t = 0$, otteniamo il punto $(0,0)$, mentre per $t = 4$ otteniamo $(4e^{-4}, 4)$. Poiché le posizioni iniziale e finale non coincidono, la curva non è chiusa.

La curva data è di classe C^1

$$\begin{cases} x'(t) = e^{-t}(1-t) \\ y'(t) = t - 1 \end{cases}$$

Tuttavia, poichè al tempo $t = 1$ (interno all'intervallo $[0,4]$), si ha $\big(x'(1), y'(1)\big) = (0,0)$, deduciamo che la curva è non regolare in $[0,4]$ (si puó tuttavia dire che è regolare a tratti).

Circonferenza

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\,dt = 2\pi r$$

Esercizio Data la curva

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{2}\cos t \\ y(t) = \sqrt{2}\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, \pi/4]$$

allora vale

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt = \pi/2$$

$\boxed{\text{a}}$ Vero $\qquad$ $\boxed{\text{b}}$ Falso

Esercizio

$$\begin{cases} x = e^t \cos(t) \\ y = e^t \sin(t) \end{cases} \qquad t \in [0, \tfrac{\pi}{4}]$$

Calcolare la lunghezza ($L = \sqrt{2}(e^{\frac{\pi}{4}} - 1)$)

Arco di Ellisse $a > 0$, $b > 0$ con $a > b$

$$\begin{cases} x = a\cos(\theta) \\ y = b\sin(\theta) \end{cases} \qquad \theta \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta}\, d\theta$$

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ e la sostituzione $t = \frac{\pi}{2} - \theta$ si ottiene un integrale ellittico che andremo a risolvere per serie.

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2(1-\cos^2\theta) + b^2\cos^2\theta}\, d\theta = \int_0^{\pi/2} a\sqrt{1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}\cos^2\theta}\, d\theta$$

Poniamo $k^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$.

$$a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\, d\theta$$

Ricordiamo se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $|x| < 1$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!} & k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Si ottiene

$$(1 - k^2 \sin^2\theta)^{\frac{1}{2}} = \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \binom{\frac{1}{2}}{j} k^{2j} \sin^{2j}\theta =$$

$$1 - \frac{1}{2} k^2 \sin^2\theta + \sum_{j=2}^{+\infty} (-1)^j \binom{\frac{1}{2}}{j} k^{2j} \sin^{2j}\theta$$

Osserviamo

$$\binom{\frac{1}{2}}{j} = (-1)^{j-1}\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\cdots\frac{2j-3}{2}}{j!} = (-1)^{j-1}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots(2j-3)}{2^j j!} =$$

$$(-1)^{j-1}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots(2j-3)}{2j2(j-1)2(j-2)\ldots 2}$$

$$= (-1)^{j-1}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots(2j-3)}{(2j)!!} = (-1)^{j-1}\frac{(2j-3)!!}{(2j)!!}$$

ove $n!!$ indica
n dispari il prodotto di tutti i dispari tra 1 e n,
n pari il prodotto di tutti i pari tra 2 e n.

$$a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta = a\left(\frac{\pi}{2}-\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{(2j-3)!!}{(2j)!!}k^{2j}\int_0^{\pi/2}\sin^{2j}\theta\,d\theta\right)$$

Dimostriamo

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2j}\theta d\theta = \frac{\pi}{2}\frac{(2j-1)!!}{(2j)!!}$$

Per $j = 1$ risulta verificata (scrivere in dettaglio).
Assumendo

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2j}\theta d\theta = \frac{\pi}{2}\frac{(2j-1)!!}{(2j)!!}$$

dimostreremo

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2(j+1)}\theta d\theta = \frac{\pi}{2}\frac{(2j+1)!!}{(2j+2)!!}$$

Infatti

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2j+1}\theta \sin\theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^{2j+1}\theta(-\cos\theta)' d\theta$$

$$= \sin^{2j+1}\theta(-\cos\theta)|_0^{\pi/2} + (2j+1)\int_0^{\pi/2} \sin^{2j}\theta\cos^2\theta d\theta$$

$$= (2j+1)\int_0^{\pi/2} \sin^{2j}\theta(1-\sin^2\theta) d\theta =$$

$$(2j+1)\int_0^{\pi/2} \sin^{2j}\theta d\theta - (2j+1)\int_0^{\pi/2} \sin^{2j+2}\theta d\theta$$

$$(2j+2)\int_0^{\pi/2} \sin^{2j+2}\theta d\theta = (2j+1)\int_0^{\pi/2} \sin^{2j}\theta d\theta$$

Utilizzando l'ipotesi induttiva

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2j+2}\theta d\theta = \frac{(2j+1)}{(2j+2)}\frac{\pi}{2}\frac{(2j-1)!!}{(2j)!!} = \frac{\pi}{2}\frac{(2j+1)!!}{(2j+2)!!}$$

In conclusione

$$L = a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}d\theta = a\frac{\pi}{2}\left(1-\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{2j-1}\left(\frac{(2j-1)!!}{(2j)!!}k^j\right)^2\right)$$

Moltiplicando per 4

$$p = 2\pi a\left(1 - \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2j-1}\left(\frac{(2j-1)!!}{(2j)!!}k^j\right)^2\right) =$$

$$2\pi a\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \ldots\right].$$

Approssimazione per ellissi con eccentricità piccola

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(t))^2} dt$$

Asteroide: $a > 0$

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Data la simmetria consideriamo x, y positivi

$$x(t) = t \quad y(t) = f(t) \quad t \in [a, b]$$

$$y = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \quad x \in [0, a]$$

$$y' = \frac{3}{2}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \right) =$$

$$\frac{L}{4} = \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}(-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}})\right)^2} dx =$$

$$\int_0^a \sqrt{1 + (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})x^{-\frac{2}{3}}} dx = \int_0^a \sqrt{a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}}} dx =$$

$$a^{\frac{1}{3}} \int_0^a x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{2}a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}a$$

$$L = 6a$$

Asteroide $a = 1$. La figura richiama l'immagine di una stella che brilla.
Equazioni equazioni parametriche

$$x = \cos^3 t, \;\; y = \sin^3 t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

è regolare a tratti. Possiamo calcolarne la lunghezza.

$$x'(t) = -3\cos^2 t \sin t \qquad y'(t) = 3\sin^2 t \cos t$$

il cui modulo risulta

$$3\sqrt{\cos^2 t \sin^2 t} = \frac{3}{2}|\sin(2t)|$$

Vale 0 per $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$ ossia la curva non è regolare nei punti corrispondenti ai valori del parametro precedentemente calcolati, che sono i punti $(\pm 1, 0)$,$(0, \pm 1)$.

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2}\sin(2t)dt = -3\cos(2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6$$

Arco di parabola

$$y = \frac{1}{2}x^2 \quad x \in [0, a]$$

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

In questo caso

$$L(\varphi) = \int_0^a \sqrt{1 + x^2} dx$$

Occorre ricordare

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$(\sinh(x))' = \cosh(x) \qquad (\cosh(x))' = \sinh(x)$$

$$(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = 1$$

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}(\mathit{sett}\sinh x + x\sqrt{1+x^2}) + c$$

$$\mathit{sett}\sinh x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Si pone $x = \sinh t$ Si ottiene

$$\int \cosh^2 t dt = \frac{1}{2}(\sinh t \cosh t + t) + c$$

Si procede alla sostituzione $t = \mathit{sett}\sinh x$

$$\int_0^a \sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}(a\sqrt{1+a^2} + \mathit{sett}\sinh a)$$

Curve nello spazio

Definizione

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e d la dimensione dello spazio (di solito $d = 2$ o $d = 3$). Una curva è un'applicazione $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ continua.

Una curva è un'applicazione e l'immagine di tale applicazione cioé l'insieme

$$\{\varphi(t)\ :\ t \in I\}$$

definisce il suo *sostegno* (il corrispondente disegno sul piano o nello spazio).

esempio

- forma cartesiana: equazione costituita da tutti i punti $P = (x, y)$ le cui coordinate soddisfano un' equazione.

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

- forma cartesiana:

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta \\ y = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

$$\theta \in [\theta_0, \theta_1]$$

- forma polare

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

$$\rho = \rho(\theta)$$

$$\rho = 2\cos\theta$$

$$\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

- forma polare

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\rho = 1$$

$$\theta \in [0, 2\pi]$$

$$\theta \in [\theta_0, \theta_1]$$

$$\begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta \\ y = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} x'(\theta) = \rho'\cos\theta - \rho\sin\theta \\ y'(\theta) = \rho'\sin\theta + \rho\cos\theta \end{cases}$$

$$(\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta)^2 + (\rho'\sin\theta + \rho\cos\theta)^2 =$$

$$(\rho')^2 + (\rho)^2$$

$$L = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}\, d\theta$$

Lunghezza della curva in forma polare

Cardiode
Il suo nome esprime la sua forma di un cuore.

$$\rho = a(1+\cos(\theta)) \;\; \theta \in [0, 2\pi] \;\; a > 0$$

$$L = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1+\cos(\theta))^2 + a^2 \sin^2\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} a \sqrt{1+\cos(\theta)} d\theta =$$

(dalla formula di bisezione)

$$\int_0^{2\pi} 2a |\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)| d\theta = 8a$$

Spirale: curva che si avvolge attorno a un determinato punto centrale avvicinandosi o allontanandosi progressivamente, a seconda di come si percorre la curva.
Spirale Logaritmica

$$\rho = e^{-b\theta}, \ \ \theta \in [0, 2k\pi] \ \ k \in \mathbb{N}, \quad b > 0$$

$$L = \int_0^{2k\pi} \sqrt{e^{-2b\theta} + b^2 e^{-2b\theta}} d\theta = \frac{\sqrt{1+b^2}}{b}(1 - e^{-2\pi kb})$$

per $k \to +\infty$ otteniamo

$$\frac{\sqrt{1+b^2}}{b}$$

(lunghezza dell'intera spirale)

Spirale di Archimede

$$\rho = a + b\theta \;\; \theta \in [0, 2k\pi]\,, \;\; k \in \mathbb{N}, \; a = 0, \; b > 0$$

$$L = \int_0^{2k\pi} \sqrt{b^2 + b^2\theta^2}\, d\theta = b \int_0^{2k\pi} \sqrt{1 + \theta^2}\, d\theta =$$

$$\frac{b}{2}\left(\ln(2k\pi + \sqrt{1 + 4k^2\pi^2}) + 2k\pi\sqrt{1 + 4k^2\pi^2} \right)$$

- Una curva si dice regolare a tratti se $I = [a, b]$ si può suddividere nell'unione di un numero finito di intervalli su ciascuno dei quali la curva risulta regolare.
- Curve equivalenti
  Parametrizzazioni equivalenti: esempio

  $$\varphi = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi], \quad \psi(s) = (\cos(2s), \sin(2s)), s \in [0, \pi]$$

  sono due parametrizzazioni diverse della circonferenza di centro l'origine e raggio unitario percorse nello stesso verso (curve equivalenti).
  Definizione. Due curve φ e ψ definite rispettivamente in $I = [a, b]$ e $I' = [\alpha, \beta]$ a valori in $\mathbb{R}^2$ si dicono **equivalenti** se esiste un'applicazione

  $$g : [a, b] \to [\alpha, \beta],$$

  di classe C^1 tale che $g'(t) \neq 0, \ \forall t \in [a, b]$

esempio $\varphi(t) = \psi(g(t)) = \psi(\frac{t}{2})$

Cammini orientati

Disegnare il sostegno della curva orientata nel verso indotto dal parametro.

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= (t, \sqrt{3}t), & t &\in [0,1] \\
\gamma_2(t) &= (1-t, \sqrt{3}), & t &\in [0,1] \\
\gamma_3(t) &= (0, \sqrt{3}(1-t)), & t &\in [0,1].
\end{aligned}$$

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, \sqrt{3}t) & t \in [0,1] \\ (2-t, \sqrt{3}), & t \in [1,2] \\ (0, \sqrt{3}(3-t)), & t \in [2,3]. \end{cases}$$

Cammini orientati

Disegnare la curva data dai lati del triangolo di vertici (0,0),(1,0) e (0,1), percorsa in senso antiorario.

$$\gamma(t) = \begin{cases} (1-t, t) & t \in [0,1] \\ (0, 2-t), & t \in [1,2] \\ (t-2, 0), & t \in [2,3]. \end{cases}$$

- Integrale curvilineo. La funzione f e' definita sul sostegno della curva ed e' ivi continua.

$$\int_{\varphi} f\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

L'integrale curvilineo è invariante per parametrizzazioni equivalenti ed anche per cambiamento di orientazione sulla curva

Esercizio 1

Sia $f(x, y) = xy$ verificare che

$$\int_\gamma f ds = \int_\delta f ds$$

dove

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (\cos t, 2\sin t), & t &\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ \delta(t) &= (\cos 2t, 2\sin 2t), & t &\in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]. \end{aligned}$$

Svolgimento Esercizio 1

Per semplicità svolgeremo solo il calcolo del primo integrale. Il secondo è analogo. Dalla definizione si ha

$$\begin{aligned}\int_\gamma f ds &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t \sin t \sqrt{\sin^2 t + 4\cos^2 t}\, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t \sin t \sqrt{1 + 3\cos^2 t}\, dt.\end{aligned}$$

Con la sostituzione $u = \cos t$ si ha (ricorda $du = -\sin t dt$, $u(0) = 1$ e $u(\pi/2) = 0$)

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t \sin t \sqrt{1 + 3\cos^2 t}\, dt &= -\int_1^0 2u\sqrt{1+3u^2}\, du \\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 6u\sqrt{1+3u^2}\, du \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}(1+3u^2)^{3/2}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{16}{3} - \frac{2}{3}\right) = \frac{14}{9}.\end{aligned}$$

Esercizio 2

Calcolare

$$\int_\gamma f ds$$

nei seguenti casi.

1. $f(x,y)=\sqrt{1-x^2}$ e

$$\gamma(t)=(\cos t, \sin t), \quad t\in[0,2\pi].$$

2. $f(x,y)=\dfrac{x}{1+y^2}$ e

$$\gamma(t)=(\cos t, \sin t), \quad t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

3. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ e

$$\gamma(t)=\Big(2(\cos t + t\sin t), 2(\sin t - t\cos t)\Big), \quad t\in[0,2\pi].$$

Svolgimento Esercizio 2 - I

(1): Calcoliamo f su γ:

$$f(x(t), y(t)) = \sqrt{1 - \cos^2 t} = |\sin t|.$$

Poichè $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 1$ abbiamo

$$\int_\gamma f ds = \int_0^{2\pi} |\sin t| dt = 2 \int_0^{\pi} \sin t dt = 2[-\cos t]_0^{\pi} = 4.$$

(2): Calcoliamo f su γ:

$$f(x(t), y(t)) = \frac{\cos t}{1 + \sin^2 t}.$$

Poichè $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 1$ abbiamo

$$\int_\gamma f ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1 + \sin^2 t} dt.$$

Svolgimento Esercizio 2 - II

(2): (continua) Con la sostituzione $u = \sin t$ si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1+\sin^2 t} dt = \int_0^1 \frac{1}{1+u^2} du = \arctan u|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

(3): Calcoliamo f su γ:

$$f(x(t), y(t)) = 2\sqrt{1+t^2}.$$

Inoltre $\gamma'(t) = (2t\cos t, 2t\sin t)$ perciò:

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 4t^2.$$

Dunque

$$\int_\gamma f ds = 2\int_0^{2\pi} 2t\sqrt{1+t^2} dt = 2\Big[\frac{2}{3}(1+t^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{4}{3}[(1+4\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1].$$

Se γ è una curva del piano e Γ il suo sostegno e f una funzione continua a valori ≥ 0 l'integrale curvilineo della f si può pensare come l'area della superficie costituita dai punti dello spazio compresi tra Γ e il grafico di f su Γ.

Esempio di integrale curvilineo: calcolo del baricentro. φ curva semplice regolare a tratti.

$$x_0 = \frac{1}{L(\varphi)} \int_a^b x(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

$$y_0 = \frac{1}{L(\varphi)} \int_a^b y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Asteroide in $[0, \frac{\pi}{2}]$, $a = 1$, la lunghezza vale $\frac{3}{2}$

$$\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \frac{3}{2} |\sin(2t)|$$

$$x_0 = \frac{1}{L(\varphi)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt =$$

$$\frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos^3(t) \cos(t) \sin(t) dt = -\frac{2}{5} \cos^5(t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{5}$$

Calcolare y_0

Teorema di Guldino:

(Area della superficie generata da rotazioni)
L'area della superficie generata dalla rotazione di un angolo α di una curva regolare φ è data dalla lunghezza della curva moltiplicata per la lunghezza dell'arco di circonferenza descritto nella rotazione dal baricentro.

- $\alpha = 2\pi$
- ruotiamo rispetto all'asse x; coordinata y del baricentro

$$y_0 = \frac{1}{L(\varphi)} \int_a^b y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

- lunghezza dell'arco di circonferenza:$2\pi y_0$
- $$A = 2\pi \frac{1}{L(\varphi)} L(\varphi) \int_a^b y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt =$$
$$2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Uno sferoide è una superficie tridimensionale ottenuta per rotazione di un arco di ellisse attorno ad uno dei suoi assi principali. Esistono tre tipi di sferoide:

- se l'arco superiore dell'ellisse è ruotato attorno al suo asse maggiore, si ottiene uno sferoide prolato.
- se l'arco superiore dell'ellisse è ruotato attorno al suo asse minore, si ottiene uno sferoide oblato
- se l'arco superiore è una semicirconferenza, la superficie ottenuta è una sfera.

La superficie di un ellissoide ottenuta per rotazione: la parte superiore dell'ellisse viene ruotata rispetto all'asse x: assumiamo

$$a > b$$

Ricordiamo l'equazioni parametriche dell'arco di ellisse

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t, & t \in [0,\pi] \\ y(t) = b\sin t. \end{cases}$$

$$A = 2\pi \int_0^{\pi} y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

$$\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} =$$

$$\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2 t} = a\sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\cos^2 t}$$

$$A = 2\pi b \int_0^\pi \sin t \sqrt{(a^2 \sin^2 t) + (b^2 \cos^2 t)}dt =$$

$$2\pi ab \int_0^\pi \sin t \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cos^2 t dt}$$

$$2\pi ab \int_0^\pi \sin t \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cos^2 t dt} =$$

$$2\pi ab \int_0^\pi \sin t \sqrt{1 - k^2 \cos^2 t} dt =$$

$$\frac{2\pi ab}{k} \int_{-k}^k \sqrt{1 - u^2} du$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} \; + C$$

$a = 1$

$$\int \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{x}{2} \sqrt{1 - x^2} \; + C$$

$$\frac{2\pi ab}{k} \int_{-k}^{k} \sqrt{1 - u^2} du = \frac{2\pi ab}{k} \left(\frac{1}{2} \arcsin x + \frac{x}{2} \sqrt{1 - x^2} |_{-k}^{k} \right) =$$

$$\frac{2\pi ab}{k} \left(\arcsin k + k \sqrt{1 - k^2} \right) = 2\pi ab \left(\frac{\arcsin k}{k} + \sqrt{1 - k^2} \right) =$$

$$2\pi ab \left(\frac{\arcsin k}{k} + \frac{b}{a} \right) = 2\pi ab \frac{\arcsin k}{k} + 2\pi b^2$$

La sfera può essere pensata come una rotazione ottenuta ruotando attorno all'asse x il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ che rappresenta una semicirconferenza di raggio R . Pertanto, per il teorema di Guldino, l'area della superficie sferica risulta:

$$A = 2\pi \int_{-R}^{+R} f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx =$$

$$2\pi \int_{-R}^{+R} \sqrt{R^2 - x^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx = 2\pi \int_{-R}^{+R} R\, dx =$$

$$2\pi R(R + R) = 4\pi R^2.$$

Area della superficie conica (laterale). retta (0,0) (h,r)

$$f(x) = \frac{r}{h}x \quad 0 \leq x \leq h$$

$$A = 2\pi \int_0^h f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx = 2\pi \int_0^h (\frac{r}{h}x)\sqrt{1 + (\frac{r}{h})^2}dx =$$

$$\frac{2\pi r}{h^2}\sqrt{h^2 + r^2}\frac{1}{2}x^2|_0^h = \pi r\sqrt{h^2 + r^2} = \pi ra$$

Lunghezza di una curva

Sia $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$ con $t \in I = [a, b]$ una curva di classe C^1 (ovvero x, y, z sono derivabili con derivata continua). Allora la lunghezza della curva φ è data da

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Esercizio - Lunghezza di un'elica

L'elica di equazioni parametriche date da

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t, t), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Calcolare la lunghezza di φ.

Svolgimento Esercizio

Nota che

$$\varphi'(t) = (-\sin t, \cos t, 1), \qquad t \in (0, 2\pi).$$

Poiché $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ si ha

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt = 2\pi\sqrt{2}.$$

Forma differenziale lineare $C^1(A)$ (coefficienti $C^1(A)$), A aperto

$$\omega = a_1(x_1, \dots, x_n)dx_1 + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n)dx_n$$

La forma differenziale

$$\omega = a_1(x_1, \dots, x_n)dx_1 + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n)dx_n$$

è chiusa se e solo se vale l'uguaglianza

$$\frac{\partial a_j}{\partial x_i} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j}$$

per ogni $i, j = 1, \dots, n$

$$n = 2$$

$$\omega = a(x, y)dx + b(x, y)dy$$

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}$$

$$a_y = b_x$$

Una forma differenziale lineare definita su $A \subset R^n$ aperto, continua (a_i continuo). Si dice che ω è esatta in A se esiste una funzione $F : A \to \mathbb{R}$ differenziabile detta primitiva tale che

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = a_i$$

Consideriamo la forma differenziale

$$\omega = ydx + xdy \ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Cerchiamo primitive F attraverso la soluzione di

$$F_x = y \quad F_y = x$$

Da $F_x = y$ per integrazione rispetto a x otteniamo
$F(x, y) = xy + G(y)$ deve risultare $G(y) = c$

$$F(x, y) = xy + c$$

Un insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ si dice connesso per archi se per ogni coppia di punti P e Q di A esiste una curva che li collega.
Esiste una funzione continua $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$\varphi(a) = P \;\; \varphi(b) = Q$$

Teorema.
Sia A un aperto connesso. Se la forma differenziale $\omega(x, y)$ è esatta in A allora ammette infinite funzioni primitive, se G è una primitiva tutte le altre primitive possono essere calcolate in questo modo

$$F(x, y) = G(x, y) + k, k \in \mathbb{R}$$

dim. Si pone

$$H(x, y) = F(x, y) - G(x, y)$$

$H_x = H_y = 0$ in A un aperto connesso. H costante

$A \subset \mathbb{R}^2$ A aperto

- Se $\omega \in C^1(A)$ è esatta allora è chiusa. Infatti
$$F_x = a \quad F_y = b.$$
Da cui otteniamo
$$F_{xy} = a_y \quad F_{yx} = b_x$$
Uguagliando le derivate miste:
$$a_y = b_x.$$
In generale non vale il viceversa.
- Tuttavia: se $\omega \in C^1(\mathbb{R}^2)$ risulta chiusa allora è esatta (da dimostrare)

- $$\omega = ydx + xdy \ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

  è esatta in $\mathbb{R}^2$ (perchè individuiamo facilmente una primitiva $F(x,y) = xy$) e quindi chiusa in $\mathbb{R}^2$.

- $$\omega = ydx + xdy \ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

  è esatta perchè $\omega \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e risulta chiusa.

La forma differenziale seguente

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

definita nell'aperto del piano $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
è chiusa: verificare

$$\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)_y = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)_x = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Esercizio. In $\mathbb{R}^2$ consideriamo la forma differenziale

$$\omega = \left(\frac{1}{1+2y^2} - e^x \right) dx - \left(\frac{4xy}{(1+2y^2)^2} - e^y \right) dy.$$

Stabilire se la forma risulta esatta in $\mathbb{R}^2$ e in tal caso determinare una primitiva.

Esercizio

Calcolare *una* primitiva della seguente forma differenziale.

- $\omega(x, y) = y\cos(xy)dx + \left(x\cos(xy) + y^2\right)dy$ su $\mathbb{R}^2$;

Svolgimento Esercizio I

Dalla definizione abbiamo che, se F è una primitiva allora

$$y\cos(xy) = F_x \qquad x\cos(xy) + y^2 = F_y. \tag{$\star$}$$

Integriamo la prima rispetto a x:

$$F = g(y) + \int y\cos(xy)dx = g(y) + \sin(xy).$$

dove g è una funzione arbitraria che dipende solo da y. Derivando la precedente

$$F_y = g'(y) + x\cos(xy).$$

Da $(\star)$ e la precedente abbiamo

$$g'(y) = y^2 \quad \Rightarrow \quad g(y) = \frac{y^3}{3} + c$$

Dove $c \in \mathbb{R}$. Una primitiva di ω è data da

$$F(x,y) = \sin(xy) + \frac{y^3}{3}.$$

Forme differenziali in $\mathbb{R}^3$

$$\omega = a(x,y,z)dx + b(x,y,z)dy + c(x,y,z)dz$$

Condizione di forma chiusa

$$a_y = b_x \quad a_z = c_x \quad b_z = c_y$$

Esercizio. La forma $\omega = xzdx + xyzdy + 3z^2dz$ risulta chiusa in $\mathbb{R}^3$

$\boxed{\text{a}}$ vero $\boxed{\text{b}}$ falso

- $n = 3$
$$a(x,y,z)dx + b(x,y,z)dy + c(x,y,z)dz$$
di classe $C^1(\mathbb{R}^3)$ ed esatta in $\mathbb{R}^3$.
Determinare le condizioni analoghe a $a_y = b_x$ nel piano.
- Data
$$\omega(x,y) = 2xydx + x^2dy$$
la forma risulta chiusa? La forma risulta esatta? In caso affermativo calcolare una primitiva della forma differenziale.
$$F(x,y) = x^2y$$

Data la forma differenziale

$$\omega = (xy + \frac{z}{1+x^2})dx + (\frac{1}{2}x^2 + yz)dy + (\frac{1}{2}y^2 + \arctan x)dz$$

- stabilire se la forma risulta esatta in $\mathbb{R}^3$.

$$\omega = a(x,y,z)dx + b(x,y,z)dy + c(x,y,z)dz$$

- la forma risulta chiusa

$$a_y = b_x \quad a_z = c_x \quad b_z = c_y$$

$$a_y = x \;\; b_x = x \;\;\; a_z = \frac{1}{1+x^2} \;\;\; c_x = \frac{1}{1+x^2} \;\;\; b_z = y \;\;\; c_y = y$$

L'insieme: $\mathbb{R}^3$

- In caso affermativo, calcolare una primitiva

$$\begin{cases} F_x(x,y,z) = xy + \frac{z}{1+x^2} \\ F_y(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + yz \\ F_z(x,y,z) = \frac{1}{2}y^2 + \arctan x \end{cases}$$

$$F(x,y,z) = \int xy + \frac{z}{1+x^2}dx + \varphi(y,z)$$

Ne segue

$$F(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2y + z\arctan x + \varphi(y,z)$$

Sostituendo nella seconda e nella terza

$$F_y(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + \varphi_y(y,z) = \frac{1}{2}x^2 + yz; \ \ \varphi(y,z) = \frac{1}{2}y^2z + \psi(z)$$

$$F_z(x,y,z) = \arctan x + \frac{1}{2}y^2 + \psi'(z) = \frac{1}{2}y^2 + \arctan x$$

$$F(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2y + z\arctan x + \frac{1}{2}y^2z$$

$$\omega = a(x,y)dx + b(x,y)dy$$

L'integrale curvilineo di una forma differenziale si calcola nel modo seguente:

$$\int_{\varphi} \omega = \int_a^b [a(x(t),y(t))x'(t) + b(x(t),y(t))y'(t)]dt$$

ove φ è una curva regolare a tratti contenuta in A in cui sia fissato un orientamento e una rappresentazione parametrica $(x(t),y(t))$ con $t \in [a,b]$ il cui verso di percorrenza coincida con l'orientamento assegnato su φ.

Ricordiamo che a ogni curva possiamo associare un verso di percorrenza o orientamento, indotto dalla rappresentazione parametrica. Si dice che il punto $P = \varphi(t_P)$ precede il punto $Q = \varphi(t_Q)$ nel verso indotto dal parametro t se

$$t_P < t_Q$$

A differenza dell'integrale curvilineo di funzione, l'integrale di una forma differenziale dipende dall'orientamento della curva e si deve sempre specificare. Se $-\varphi$ è una curva equivalente a φ ma orientata nel verso opposto $\int_{-\varphi} \omega = -\int_{\varphi} \omega$

- ω esatta: possiamo calcolare l'integrale lungo una qualsiasi curva congiungente i suoi estremi (non chiusa) stessi punti iniziali e finali.
- ω esatta: l'integrale lungo una qualsiasi curva chiusa vale 0

Se φ è una curva regolare a tratti possiamo decomporre φ definita in $[a, b]$ suddividendo $a = t_0 < t_1 < \dots t_N = b$ mediante curve regolari φ_1, $\varphi_2, \dots, \varphi_N$ con $\varphi_i = \varphi$ in $[t_{i-1}, t_i] \quad i = 1, \dots N$

$$\int_\varphi \omega = \int_{\varphi_1} \omega + \cdots \int_{\varphi_N} \omega$$

Sia A un aperto connesso. Per ogni coppia di punti P e Q di $\mathbb{R}^2$ indichiamo con $\phi(P, Q)$ l'insieme non vuoto di tutte le curve regolari a tratti con sostegno contenuto in A e aventi e come estremi i punti P e Q e lo stesso verso di percorrenza.

Teorema Sia A un aperto connesso e sia $\omega \in C(A)$. Allora ω è esatta se e solo se per ogni coppia di punti P e Q di $\mathbb{R}^2$ e per ogni coppia di curve φ_1 e $\varphi_2 \in \phi(P, Q)$ (stessi punti iniziali e finali) risulta

$$\int_{\varphi_1} \omega = \int_{\varphi_2} \omega$$

TeoremaSia A un aperto connesso e sia $\omega \in C(A)$. Allora ω è esatta se e solo se per ogni curva chiusa regolare a tratti φ con sostegno contenuto in A risulta

$$\int_{\varphi} \omega = 0$$

La forma seguente

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

definita nell'aperto del piano $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
è chiusa:

$$(-\frac{y}{x^2+y^2})_y = (\frac{x}{x^2+y^2})_x = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

ma la forma ω non è esatta in A.
Curva chiusa: circonferenza di centro l'origine e raggio 1.

$$\int_a^b [a(x(t),y(t))x'(t) + b(x(t),y(t))y'(t)]dt =$$

$$\int_0^{2\pi} [sin^2 t + \cos^2 t]dt = 2\pi$$

Calcolare l'integrale di

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

lungo l'arco di circonferenza di centro $(0,0)$ raggio 2 e estremi $(2,0)$ $(\sqrt{3},1)$, orientata in senso antiorario. Osserviamo che la rappresentazione parametrica della circonferenza con verso antiorario è

$$(2\cos(t), 2\sin(t))$$

Il punto $(2,0)$ corrisponde al valore del parametro $t=0$ Il punto $(\sqrt{3},1)$ corrisponde al valore del parametro $t=\frac{\pi}{6}$

$$\int_a^b [a(x(t),y(t))x'(t) + b(x(t),y(t))y'(t)]dt =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} [\sin^2 t + \cos^2 t]dt = \frac{\pi}{6}$$

Consideriamo l'integrale curvilineo della forma

$$\omega = ydx + xdy \ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

lungo tre curve diverse $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ per raggiungere da $P = (0, 0)$ e $Q = (1, 1)$, con orientamento indotto dalla parametrizzazione.

$$\varphi_1 \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \quad t \in [0, 1] \end{cases} \quad \varphi_2 \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t \quad t \in [0, 1] \end{cases}$$

$$\varphi_3 \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = t \qquad t \in [0, 1] \end{cases} \qquad \cup \qquad \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 1 \quad t \in [0, 1] \end{cases}$$

$$\varphi_1 : \int_a^b [a(x(t), y(t))x'(t) + b(x(t), y(t))y'(t)]dt = \int_0^1 t^2 + 2t^2 dt = 1$$

$$\varphi_2 : \int_a^b [a(x(t), y(t))x'(t) + b(x(t), y(t))y'(t)]dt = \int_0^1 t + t = 1$$

$$\varphi_3 : \int_a^b [a(x(t), y(t))x'(t) + b(x(t), y(t))y'(t)]dt = 1$$

Teorema. Sia ω di classe C^1 esatta in A aperto e connesso di $\mathbb{R}^2$ e sia φ una curva regolare a tratti il cui sostegno è interamente contenuto in A congiungente due punti $P = (x_P, y_P)$ e $Q = (x_Q, y_Q)$ di A nel verso che va da P a Q . Allora

$$\int_{\varphi} \omega = F(x_Q, y_Q) - F(x_P, y_P)$$

con F qualsiasi primitiva di ω
Esempio

$$\omega = ydx + xdy \;\; (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Funzione primitiva (esercizio precedente di calcolo dell'integrale della forma)

$$F(x, y) = xy$$

$$F(x(1), y(1)) - F(x(0), y(0)) = 1$$

$$\int_\varphi \omega = \int_\varphi a(x,y)dx + b(x,y)dy =$$

$$\int_\varphi F_x(x,y)dx + F_y(x,y)dy =$$

$$\int_a^b [F_x(x(t),y(t))x'(t) + F_y(x(t),y(t))y'(t)]dt =$$

$$\int_a^b \frac{d}{dt} F(x(t),y(t))dt = F(x(b),y(b)) - F(x(a),y(a))$$

Insiemi semplicemente connessi
D dominio: chiusura di un insieme aperto di $\mathbb{R}^2$
Insiemi semplicemente connessi in $\mathbb{R}^2$: a livello intuitivo, essi coincidono con gli insiemi privi di buchi.
Definizione Un insieme aperto connesso $A \subset \mathbb{R}^2$ si dice semplicemente connesso se, data una qualsiasi curva φ semplice e chiusa regolare a tratti con sostegno contenuto in A, è la frontiera di un dominio limitato D interamente contenuto in A (l'interno di φ è contenuto in A) .
In $\mathbb{R}^2$ sono insiemi semplicemente connessi i seguenti insiemi:

- tutti gli aperti convessi (In $\mathbb{R}^2$ un insieme convesso è un insieme nel quale, per ogni coppia di punti, il segmento che li congiunge è interamente contenuto nell'insieme.)

In A semplicemente connesso una forma differenziale di classe C^1 chiusa è esatta.

Non sono invece semplicemente connessi in $\mathbb{R}^2$ gli insiemi:

- tutti gli aperti privati di un punto (in particolare, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$);
- le corone circolari.

In A semplicemente connesso una forma differenziale di classe C^1 chiusa è esatta.
Data la forma differenziale

$$\omega = [1 + \sin(x + y)]dx + \sin(x + y)dy.$$

(i) stabilire se è chiusa in $\mathbb{R}^2$,
(ii) stabilire se è esatta in $\mathbb{R}^2$.
(iii) calcolare una primitiva $(F(x, y) = x - \cos(x + y))$
(iv) Data la curva curva $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$ con $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, calcolare l'integrale curvilineo della forma sulla curva con l'orientamento dato dalla parametrizzazione.
$x(\frac{\pi}{2}) = \cos^3(\frac{\pi}{2}) = 0, y(\frac{\pi}{2}) = \sin^3(\frac{\pi}{2}) = 1$
$x(0) = \cos^3(0) = 1, y(0) = \sin^3(0) = 0$

$$F(x(\frac{\pi}{2}), y(\frac{\pi}{2})) - F(x(0), y(0)) = F(0, 1) - F(1, 0) =$$

$$-\cos(1) - 1 + \cos(1) = -1$$

In A semplicemente connesso una forma differenziale chiusa di classe C^1 è esatta.

Esercizio: calcolo di primitiva

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$$

$$\omega = \frac{-xy}{\sqrt{(y - x^2)}} dx + \left(\frac{3y - 2x^2}{2\sqrt{(y - x^2)}} + 2\right) dy$$

Sia ω una forma differenziale esatta in $\mathbb{R}^2$

$$\omega = a(x,y)dx + b(x,y)dy$$

Per il calcolo della primitiva procediamo in questo modo

- $$F_x = a \quad F(x,y) = \int a(x,y)dx + g(y)$$

  Imponendo la seconda condizione $F_y = b$ determiniamo per integrazione rispetto a y la funzione g e quindi la funzione F

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$$

$$\omega = \frac{-xy}{\sqrt{(y - x^2)}} dx + (\frac{3y - 2x^2}{2\sqrt{(y - x^2)}} + 2)dy$$

La forma differenziale è esatta: calcolo della primitiva

$$\int \frac{-xy}{\sqrt{(y - x^2)}} dx = y\sqrt{(y - x^2)} + g(y)$$

$$(y\sqrt{(y - x^2)} + g(y))_y = \frac{2y - 2x^2 + y}{2\sqrt{(y - x^2)}} + g'(y) = \frac{3y - 2x^2}{2\sqrt{(y - x^2)}} + 2$$

$$g'(y) = 2 \quad g(y) = 2y$$

La forma differenziale

$$\omega = (3x^2y - y^2)dx + (x^3 - 2xy + 1)dy$$

è esatta: calcolare una primitiva

$$F(x, y) = x^3y - xy^2 + y$$

Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale

$$\omega = xydy$$

su φ ove φ è l'arco di circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ percorso in senso orario situato nel quadrante positivo degli assi.

$$\int_{\varphi} \omega = -\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin t dt = ... = -\frac{1}{3}$$

Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale

$$\omega = (2x + 3y)dx$$

su φ ove φ è il bordo dell'insieme limitato definito dalla parabola $y = x^2$ e $y = \sqrt{3}x$ percorso in senso antiorario.

$$\varphi_1 : \int_0^{\sqrt{3}} (2t + 3t^2)dt = 3 + 3\sqrt{3}$$

$$\varphi_2 : -\int_0^{\sqrt{3}} (2t + 3\sqrt{3}t)dt = -3 - \frac{9}{2}\sqrt{3}$$

$$\int_\varphi \omega = -\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

- Esercizio 1 Data la forma differenziale

$$\omega = xdx + 2ydy$$

calcolare l'integrale esteso all'arco di circonferenza di equazioni parametriche

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

orientata nel verso indotto dal parametro.

- Esercizio 2 Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} - x - y$$

Calcolare eventuali punti stazionari e classificare tali punti (min, max, sella).

- Esercizio 3
  Sia data

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}) \\ \frac{1}{2} & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ 0 & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$$

  ripetuta in modo periodico in $\mathbb{R}$.Calcolare il coefficiente a_0, b_3, a_3 e a_{100} della serie di Fourier di f
  $(S = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$
- Esercizio 4 Selezione la risposta giusta motivando la risposta.
  La serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^{2n}}{(e^2)^{n+1}} x^n \quad \text{risulta}$$

[a] convergente per ogni x reale [b] sempre divergente
[c] nessuna delle precedenti

Data la forma differenziale

$$\omega = xdx + 2ydy$$

calcolare l'integrale esteso all'arco di circonferenza di equazioni parametriche

$$x(t) = \cos t, \;\; y(t) = \sin t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

orientata nel verso indotto dal parametro.

$$-\int_0^{\pi/2} \cos t \sin t dt + \int_0^{\pi/2} 2 \sin t \cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos t \sin t dt =$$

$$-\frac{1}{2} \cos^2 t|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}$$

Data la funzione

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} - x - y$$

Calcolare eventuali punti stazionari e classificare tali punti (min, max, sella).

$$f_x(x,y) = x^2 - 1 \quad f_y(x,y) = y^2 - 1$$

$$P_1 = (1,1) \;\; P_2 = (-1,1) \;\; P_3 = (1,-1) \;\; P_4 = (-1,-1)$$

$$f_{xx}(x,y) = 2x \quad f_{yy}(x,y) = 2y \quad f_{xy}(x,y) = \quad f_{yx}(x,y) = 0$$

$P_1 = (1,1)$ punto di minimo relativo $f(1,1) = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}$
$P_2 = (-1,1)$ punto di sella $f(-1,1) = 0$
$P_3 = (1,-1)$ punto di sella $f(1,-1) = 0$
$P_4 = (-1,-1)$ punto di massimo relativo
$f(-1,-1) = -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3}$

Sia data

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}) \\ \frac{1}{2} & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ 0 & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$$

ripetuta in modo periodico in $\mathbb{R}$. Calcolare il coefficiente a_0, b_3, a_3 e a_{100} della serie di Fourier.
La funzione risulta pari: $b_3 = 0$,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k}$$

$$a_3 = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\frac{3}{2}\pi)}{3} = -\frac{1}{3\pi}$$

$$a_{100} = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(50\pi)}{100} = 0$$

Selezione la risposta giusta motivando la risposta.
La serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^{2n}}{(e^2)^{n+1}} x^n \quad \text{risulta}$$

$\boxed{\text{a}}$ convergente per ogni x reale $\boxed{\text{b}}$ sempre divergente $\boxed{\text{c}}$ nessuna d

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^{2n}}{(e^2)^{n+1}} x^n = \frac{1}{e^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pi^2)^n}{(e^2)^n} x^n$$

Per il criterio della radice convenge per $|x| < \frac{e^2}{\pi^2}$ e dunque la risposta risulta (c).

Esercizio Classificare la seguente curva:

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \cos t \end{cases} \qquad t \in [0, 3\pi]$$

A) chiusa e semplice   B) chiusa ma non semplice
C) semplice ma non chiusa   D) né semplice né chiusa

Esercizio Siano date le due curve

$$\gamma_1 : \begin{cases} x(t) = \cos^3 t & t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x(t) = \cos t & t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

Possiamo dire che

A) Sono entrambe regolari B) Nessuna delle due é regolare

C) Soltanto γ_1 é regolare D) Soltanto γ_2 é regolare

Esercizio Sia data la forma differenziale definita in tutto $\mathbb{R}^2$

$$ye^{xy}\,dx + xe^{xy}\,dy$$

Calcolare l'integrale curvilineo di tale forma differenziale lungo la curva orientata nel verso indotto dal parametro

$$\begin{cases} x(t) = 1 + \cos t & \qquad t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

A) $e - 1$ B) $1 - e$
C) 2π D) -2π
E) nessuna delle precedenti risposte é corretta

Esercizio Sia data la forma differenziale definita in $\mathbb{R}^2$

$$\sqrt{1+(x+y)^2}\,dx + \sqrt[3]{1+(x+y)^2}\,dy$$

Tale forma é esatta in $\mathbb{R}^2$?
A) Si
B) No

Esercizio Sia data la forma differenziale definita in $\mathbb{R}^2$

$$\sqrt[3]{1+(x+y)^2}\,dx+\sqrt[3]{1+(x+y)^2}\,dy$$

Tale forma é esatta in $\mathbb{R}^2$?
A) Si
B) No

Esercizio Detta γ la curva $(\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi]$, calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma y e^x \, ds$$

A) $\frac{1}{e} - e$ B) $e - \frac{1}{e}$ C) 2 D) -2 E) nessuna delle precedenti risposte é corretta

Esercizio Il valore del parametro reale e positivo a per cui la cardiode

$$\rho = a(1 + \cos\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

ha lunghezza 5 vale

$\boxed{\text{a}}$ $\dfrac{5}{6}$ $\boxed{\text{b}}$ $\dfrac{6}{5}$

$\boxed{\text{c}}$ 1 $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti risposte é corretta

Esercizio
Sia $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Allora

$$f(x, y) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$$

é derivabile (parzialmente) in $(0, 0)$.

$\boxed{\text{a}}$ Vero $\boxed{\text{b}}$ Falso

Esercizio Sia $x \in \mathbb{R}$. Allora

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(2k)!}$$

$\boxed{\text{a}}$ Vero

$\boxed{\text{b}}$ Falso

Esercizio. Trovare i coefficienti della serie di Fourier di una funzione f definita
in $[-\pi, \pi)$ ripetuta per periodicità in $\mathbb{R}$. Sia

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \\ \frac{1}{5} & x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ 0 & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$$

in $[-\pi, \pi)$ ripetuta per periodicità in $\mathbb{R}$.
Calcolare il coefficiente a_{10}

Esercizio.
Calcolare il coefficiente a_{10}

$$a_{10} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{5}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(10x)\,dx =$$

$$\frac{1}{5\pi}\frac{1}{10}\sin(10x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{50\pi}\left(\sin(10\frac{\pi}{2}) - \sin(-10\frac{\pi}{2})\right) = 0$$

Esercizio.
Data la funzione

$$f(x, y) = 2e^{-x^2} + 5e^{-y^2}$$

(i) Determinare il gradiente di f
(ii) Determinare la matrice hessiana di f
(iii) Classificare eventuali punti in cui si annulla il gradiente.

$$Df(x,y) = (-4xe^{-x^2}, -10ye^{-y^2})$$

$$D^2f(x,y) = \begin{bmatrix} 8x^2e^{-x^2} - 4e^{-x^2} & 0 \\ 0 & 20y^2e^{-y^2} - 10e^{-y^2} \end{bmatrix}$$

$$D^2f(x,y)|_{(0.0)} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}$$

Il gradiente di annulla nel punto $(0,0)$. La matrice hessiana ha determinante positivo e primo elemento negativo. Il punto $(0,0)$ è di massimo relativo: $f(0,0) = 7$.

Esercizio.
$f(x, y) = xy$ è differenziabile in $(0, 0)$?

$\boxed{\text{a}}$ si $\qquad$ $\boxed{\text{b}}$ no

Esercizio. Calcolare le derivate parziali prime della funzione $f(x, y) = \arctan(xy)$.

$$f_x(x, y) = \frac{y}{1 + x^2y^2} \qquad f_y(x, y) = \frac{x}{1 + x^2y^2}$$

Esercizi.
Data la forma differenziale

$$e^x \sin y \, dx + e^y \cos x \, dy$$

stabilire se la forma è chiusa.
Calcolare l'integrale

$$\int_\gamma e^x \sin y \, dx + e^y \cos x \, dy,$$

con γ data dalla curva

$$\begin{cases} x(t) = 2t, \\ y(t) = 2t \end{cases}$$

orientata nel verso indotto dal parametro, da $t = \frac{\pi}{4}$ a $t = \frac{\pi}{2}$.

Esercizio. Data la forma differenziale

$$e^x \sin y \, dx + e^y \cos x \, dy$$

stabilire se la forma è chiusa.
Calcolare l'integrale

$$\int_\gamma e^x \sin y \, dx + e^y \cos x \, dy,$$

con γ data dalla curva

$$\begin{cases} x(t) = 2t, \\ y(t) = 2t \end{cases}$$

orientata nel verso indotto dal parametro, da $t = \frac{\pi}{4}$ a $t = \frac{\pi}{2}$.

La forma differenziale non è chiusa.

$$\int_\gamma e^x \sin y \, dx + e^y \cos x \, dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (2e^{2t} \sin(2t) + 2e^{2t} \cos(2t)) \, dt$$

$$\tau = 2t$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (e^\tau \sin(\tau) \, + e^\tau \cos(\tau)) \, d\tau$$

$$\int e^\tau \sin(\tau) \, d\tau = e^\tau \sin(\tau) - \int e^\tau \cos(\tau) \, d\tau \implies$$

$$\int e^\tau \sin(\tau) \, d\tau + \int e^\tau \cos(\tau) \, d\tau = e^\tau \sin(\tau)$$

$$\int_\gamma e^x \sin y \, dx + e^y \cos x \, dy = -e^{\frac{\pi}{2}}$$

Esercizio. Determinare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{3^{2n}}$$

Esercizio. Classificare la seguente curva:

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = \sin^3 t \\ y(t) = \cos^3 t \end{cases} \qquad t \in [0, 4\pi]$$

$\boxed{\text{a}}$ chiusa e semplice

$\boxed{\text{b}}$ né semplice né chiusa

$\boxed{\text{c}}$ semplice ma non chiusa

$\boxed{\text{d}}$ chiusa ma non semplice

Esercizio Siano date le due curve di equazioni polari

$$\gamma_1 : \rho = e^{-\theta} \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$
$$\gamma_2 : \rho = (1 + \cos\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

Possiamo dire che

$\boxed{\text{a}}$ Sono entrambe regolari

$\boxed{\text{b}}$ Nessuna delle due é regolare

$\boxed{\text{c}}$ Soltanto γ_1 é regolare

$\boxed{\text{d}}$ Soltanto γ_2 é regolare

Sia

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-\pi, -\frac{\pi}{4}] \\ \frac{1}{4} & x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \\ -1 & x \in [\frac{\pi}{4}, \pi) \end{cases}$$

in $[-\pi, \pi)$ ripetuta per periodicità in $\mathbb{R}$.
Calcolare il coefficiente a_7 della serie di Fourier

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

$$a_7 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4}\cos(7x)dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \cos(7x)dx \right) =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{28}\sin(7x)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{7}\sin(7x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{28\pi} - \frac{\sqrt{2}}{14\pi} = -3\frac{\sqrt{2}}{28\pi}$$

- Per la stessa funzione del punto precedente calcolare la serie di Fourier nel punto di salto $x = \pi/4$ della funzione (utilizzare il teorema di convergenza puntuale.)

$$x = \pi/4 \quad S = -\frac{3}{8}$$

Data la funzione

$$f(x,y) = ax^2 - y^2 + x^2y^2,$$

con $a > 0$ parametro reale.

- Determinare il gradiente di f
- Determinare la matrice hessiana di f
- Classificare eventuali punti in cui si annulla il gradiente.

$Df = (2ax + 2xy^2, -2y + 2x^2y)$.

$$2ax + 2xy^2 = 0 \implies x = 0,$$

ricordando che $a > 0$ e $y^2 = -a$ non fornisce radici in $\mathbb{R}$. Dalla seconda

$$-2y + 2x^2y = 0 \implies y = 0$$

infatti sostituendo nella prima $x = \pm 1$ non risulta accettabile. Il gradiente di annulla nel punto $(0, 0)$

$$D^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 2a + 2y^2 & 4xy \\ 4xy & -2 + 2x^2 \end{bmatrix}$$

Il gradiente di annulla nel punto $(0, 0)$. La matrice hessiana

$$D^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 2a & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

ha determinante $-4a < 0$. Il punto $(0, 0)$ è di sella.

$$\omega = \frac{1}{e^{x+y}+1}dx - \frac{e^{x+y}}{e^{x+y}+1}dy$$

La forma esatta in $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{\text{a}}$ vero $\boxed{\text{b}}$ falso

Calcolare una primitiva

$$F(x,y) = -\int \frac{e^{x+y}}{e^{x+y}+1}dy + \varphi(x)$$

$$F(x,y) = -\ln(e^{x+y}+1) + \varphi(x)$$

$$F_x(x,y) = -\frac{e^{x+y}}{e^{x+y}+1} + \varphi'(x) = \frac{1}{e^{x+y}+1}$$

$$\varphi'(x) = 1 \quad \varphi(x) = x$$

$$F(x,y) = x - \ln(e^{x+y}+1)$$

Determinare l'intervallo di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{|x-2|}{5} \right)^n$$

Posto

$$y = |x-2|,$$

si ottiene

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{y}{5} \right)^n$$

Il raggio di convergenza risulta uguale a 5. Quindi

$$|x-2| < 5, \quad -3 < x < 7$$

- Studiare il comportamento agli estremi dell'intervallo

La curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \ln t \end{cases}$$

$t \in [1, 2]$ è regolare.

$\boxed{\text{a}}$ vero $\boxed{\text{b}}$ falso

Calcolare l'integrale esteso alla curva φ di equazioni parametriche

$$x(t) = t \quad y(t) = \frac{1}{2}t^2 \quad t \in [0, \sqrt{\pi}]$$

della funzione

$$f(x, y) = \frac{xy \cos y}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Soluzione.

$$x(t) = t \quad y(t) = \frac{1}{2}t^2 \quad t \in [0, \sqrt{\pi}]$$

$$f(x, y) = \frac{xy \cos y}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2}tt^2 \cos\left(\frac{1}{2}t^2\right) \frac{\sqrt{1 + t^2}}{\sqrt{1 + t^2}} dt$$

$$s = \frac{1}{2}t^2 \qquad ds = tdt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} s \cos(s) ds = s \sin(s)\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(s) ds = \frac{\pi}{2} - 1$$

Insiemi semplicemente connessi Il sostegno di una curva piana, semplice e chiusa divide il piano in due aperti connessi, di cui uno è limitato e si dice interno della curva, l'altro è illimitato e viene detto esterno della curva.

Definizione degli insiemi semplicemente connessi in $\mathbb{R}^2$. A livello intuitivo, essi coincidono con gli insiemi privi di buchi.

Un insieme aperto connesso A di $\mathbb{R}^2$ si dice semplicemente connesso se, data una qualsiasi curva γ semplice e chiusa con sostegno contenuto in A, allora anche l' interno di γ è contenuto in A. Esempi nel piano di insiemi semplicemente connessi (i) gli aperti convessi; (ii) tutti gli aperti limitati con frontiera costituita da un'unica curva

Circonferenza: Una circonferenza C il cui centro ha coordinate (x_0, y_0) e raggio R ha la seguente forma parametrica:

$$C : \begin{cases} x = x_0 + R\cos(t) \\ \\ y = y_0 + R\ \sin(t) \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi]$$

Nel piano complesso una circonferenza di centro l'origine e raggio R

$$z(t) = Re^{it}$$

con $t \in [0, 2\pi]$.
Segue dalla formula di Eulero.

Funzioni di variabili complessa: proprietà integrali
Sia $f(z) \in C^0(A)$ A aperto connesso di $\mathbb{C}$, consideriamo un arco di curva regolare di estremi z_0 e z_1 che indicheremo con $\mathcal{C}(z_0, z_1)$ di equazione $z = z(t)$ dove

$$z(t) = x(t) + iy(t)$$

Vi è una corrispondenza biunivoca fra il punto $P \in \mathcal{C}$ e il parametro $t \in (t_0, t_1)$ potendo essere $z(t_0) = z(t_1)$ se e solo se la curva è chiusa. Inoltre, $z(t) \in C^1$ ed è $|z'(t)|^2 = (x'(t))^2 + (y'(t))^2 > 0 \; \forall \, t$ (esistenza della tangente in ogni punto). Definiremo

$$\int_{\mathcal{C}(z_0,z_1)} f(z)dz \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_0}^{t_1} f(z(t))\, z'(t)dt$$

Se $\mathcal{C}$ è la circonferenza di centro l'origine e raggio R di equazione

$$z = Re^{i\theta} \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

essendo $dz = iRe^{i\theta}d\theta$ avremo

$$\oint_{+\mathcal{C}} f(z)dz \stackrel{\text{def}}{=} i\int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta})e^{i\theta}Rd\theta$$

dove con $+\mathcal{C}$ si indica il verso antiorario di percorrenza.

Le regole per il calcolo di un integrale di una funzione di variabile complessa su una curva (generalmente) regolare del piano complesso sono le seguenti:

- Scrivere la curva $\mathcal{C}$ in forma parametrica $z = x(t) + iy(t)$ ovvero nel caso di una circonferenza $z = z_0 + re^{i\theta}$ $\mathcal{C}_r(z_0) = \{z : |z - z_0| = r\}$

- Calcolare mediante composizione la funzione integranda sulla curva

$$f(z(t)) \qquad \text{ovvero} \quad f(z_0 + re^{i\theta})$$

- Calcolare il differenziale

$$dz = (x'(t) + iy'(t))dt \qquad \text{ovvero nel caso di una circonferenza}$$

$$dz = ire^{i\theta}d\theta$$

- Integrare fra gli estremi la funzione di variabile reale così ottenuta

$$\int_{t_0}^{t_1} f(z(t))(x'(t)+iy'(t))dt \qquad \text{ovvero nel caso di una circonferenza}$$

$$\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})ire^{i\theta}d\theta$$

Consideriamo ora l'integrale di $f(z) = (z - z_0)^m$ lungo $\gamma(t)$ definito dalla circonferenza di centro z_0 e raggio 1

$$\gamma(t) = z_0 + e^{it} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\int_\gamma (z - z_0)^m dz = \int_0^{2\pi} (e^{it})^m i e^{it} dt =$$

$$i \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t} dt = \begin{cases} 2\pi i & m = -1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Caso particolare: L'integrale di contorno di $\frac{1}{z}$ vale $2\pi i$, dove il contorno scelto è la circonferenza unitaria percorsa percorso in senso antiorario.

$$\oint_C \frac{1}{z}\, dz.$$

Nel calcolare l'integrale, usiamo come contorno la circonferenza unitaria, $|z| = 1$, parametrizzato da

$$z(t) = e^{it} \quad t \in [0, 2\pi]; \quad \frac{dz}{dt} = ie^{it}$$

$$\oint_C \frac{1}{z}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it}\, dt = i \int_0^{2\pi} 1\, dt = \Big[\ t\ \Big]_0^{2\pi} i = (2\pi - 0)i = 2\pi i.$$

Esempio. Consideriamo la curva $\mathcal{C}$ data dal segmento $[0, 2+i]$

$$\int_{\mathcal{C}} z^2 dz$$

Scelto t come parametro

$$z(t) = t + \frac{it}{2} \qquad 0 \leq t \leq 2$$

$$dz = (1 + i/2)dt$$

e quindi

$$\int_{\mathcal{C}} z^2 dz = \int_0^2 t^2 (1+i/2)^2 (1+i/2) dt = \frac{8}{3}(1+i/2)^3 =$$

$$\frac{8}{3}(1+i/2)^3 = \frac{8}{3}(1 - \frac{i}{8} - \frac{3}{4} + 3\frac{i}{2}) = \frac{2}{3} + \frac{11}{3}\, i$$

Consideriamo ora l'integrale della stessa funzione lungo la spezzata

$$y = 0 \quad 0 \le x \le 2 \qquad x = 2 \quad 0 \le y \le 1$$

$$z(t) = t, \quad 0 \le t \le 2$$

$$z(t) = 2 + it, \quad 0 \le t \le 1$$

$$\int_{\mathcal{C}} z^2 dz = \int_0^2 t^2 dt + \int_0^1 (4+4it-t^2) i dt = \frac{8}{3} + 4i - 2 - \frac{i}{3} = \frac{2}{3} + \frac{11}{3} i$$

Vedremo in seguito in generale che per le funzioni olomorfe si ha l'indipendenza del cammino di integrazione negli aperti semplicemente connessi.

La disuguaglianza di Darboux è una disuguaglianza relativa all' integrazione sul piano complesso: essa afferma che il modulo dell' integrale di una funzione, lungo una curva del piano complesso, è sempre minore o uguale del massimo valore del modulo della funzione, moltiplicato per la lunghezza della curva.

$$\left| \int_\gamma f(z)\, dz \right| \leq \int_\gamma |f(z)|\, |dz| \leq M \cdot L$$

dove M è il massimo valore assunto dal modulo dalla funzione, e L è la lunghezza della curva.

$$|dz| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Dimostrazione.
Poniamo

$$I = \int_\gamma f\,(z)\,dz$$

$$|I| = |\int_\gamma f\,(z)\,dz| \quad I = |I|e^{i\omega}$$

$$|I| = Ie^{-i\omega} = \int_{t_0}^{t_1} e^{-i\omega} f\,(z(t))\,z'(t)dt, \;\; z(t_0) = z_0 \;\; z(t_1) = z_1$$

Poniamo

$$e^{-i\omega} f\,(z(t))\,z'(t) = u(t) + iv(t)$$

Poichè $|I|$ è reale

$$\int_{t_0}^{t_1} v(t)dt = 0$$

Quindi

$$\int_{t_0}^{t_1} |u(t)|dt \leq \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{u^2(t) + v^2(t)}dt =$$

$$\int_{t_0}^{t_1} |f(z(t))||z'(t)|dt = \int_{\gamma} |f(z)||dz|$$

Esercizio. Sia C la curva congiungente $z = 1$ e $z = i$. Stimare il modulo dell'integrale

$$\int_C \frac{1}{z^8} dz$$

$$L = \sqrt{2}$$

$$M = \max \frac{1}{|z^8|} = \frac{1}{\min |z^8|}$$

$$\min |z^8| =$$

$$\min\{(x^2 + y^2)^4 \quad y = 1 - x, \ 0 \le x \le 1\} =$$

$$\min\{(2x^2 + 1 - 2x)^4, \ 0 \le x \le 1\} = \frac{1}{2^4}$$

$$M = 16$$

Gli integrali nel campo complesso si possono intendere come integrali di forme differenziali di due variabili reali (secondo la convenzione $f(z) = f(x, y)$) $dz = dx + idy$

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = \int_{\mathcal{C}} f(x, y)dx + if(x, y)dy$$

essendo con le notazioni usuali

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = \int_{\mathcal{C}} f(x, y)dx + if(x, y)dy =$$

$$\int_{\mathcal{C}} (u(x, y) + iv(x, y))dx + (iu(x, y) - v(x, y))dy$$

Notiamo che: In termini di forme differenziali abbiamo che la forma differenziale:

$$f(z)dz = (u(x,y) + iv(x,y))dx + (iu(x,y) - v(x,y))dy$$

è una forma differenziale chiusa se valgono le condizioni di Cauchy-Riemann ed esatta se il dominio è semplicemente connesso.

$$\begin{cases} u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) \\ u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0) \end{cases}$$

Primitive Ogni funzione olomorfa in un aperto A semplicemente connesso è ivi dotata di primitiva olomorfa.
Dimostrazione

$$\omega = f(x,y)dx + if(x,y)dy$$

$$f_y = if_x = (if)_x \ \forall z \in A$$

da cui deduciamo ω è chiusa. Essendo A semplicemente connesso ω è esatta ammette quindi primitiva F. Per definizione di primitiva $iF_x = if = F_y$ che mostra l' olomorfia di F.

Il teorema integrale di Cauchy afferma che data una funzione olomorfa $f : A \to \mathbb{C}$, definita su un dominio A semplicemente connesso, per ogni curva chiusa e regolare a tratti contenuta in A vale

$$\oint_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

In termini di forme differenziali abbiamo che la forma differenziale è una forma differenziale chiusa se valgono le condizioni di Cauchy-Riemann ed esatta se il dominio è semplicemente connesso.

Inoltre: sia f una funzione continua $f : A \to \mathbb{C}$, definita su un dominio A semplicemente connesso. Se per ogni curva chiusa e regolare a tratti contenuta in A risulta

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

allora f è olomorfa in A.

Curve con gli stessi estremi

Sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa definita su un dominio A semplicemente connesso. Se γ_1, γ_2 sono due curve regolari a tratti in A che congiungono due punti P e Q, allora:

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

In altre parole, l'integrale su una curva dipende solo dagli estremi.

Dimostrazione

Sia γ la curva chiusa ottenuta concatenando γ_1 e γ_2, ove γ_2 percorsa in senso inverso. Per il teorema di Cauchy:

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Sia $f(z)$ una funzione olomorfa definita su un insieme A aperto del piano complesso $\mathbb{C}$. Sia γ una curva semplice chiusa contenuta in A e S la regione racchiusa da γ percorsa in senso antiorario e sia z un punto qualsiasi interno ad S dove la funzione è definita, che non sia sulla curva γ, allora vale la formula integrale di Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi.$$

La formula di Cauchy esprime quindi il valore di una funzione in ogni punto del dominio S mediante i valori che essa assume sul contorno di tale dominio, tramite un integrale di linea.

Consideriamo una circonferenza C_ε centrato in z di raggio ε interamente contenuto in S. Per il teorema integrale di Cauchy sono uguali i due integrali

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\varepsilon}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi.$$

Valutiamo ora

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\varepsilon}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi.$$

che calcoliamo con la sostituzione $\xi - z = \varepsilon e^{i\theta}$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\varepsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z + \varepsilon e^{i\theta}\right) \mathrm{d}\theta.$$

Ora per il teorema integrale di Cauchy l'integrale sulla circonferenza è indipendente dal raggio, pertanto possiamo calcolarlo per qualunque ε, facendo tendere ε a 0 per la continuità di $f(z)$ si ottiene

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z + \varepsilon e^{i\theta}\right) \mathrm{d}\theta = \frac{f(z)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = f(z),$$

da cui

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi = f(z).$$

Sia A un aperto del piano complesso $\mathbb{C}$, e z_0 un punto di A. Sia

$$f : A \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C},$$

una funzione olomorfa che in z_0 ha una singolarità isolata e quindi un unico sviluppo locale in serie di Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Il residuo di f in z_0 è dato dall'integrale di f lungo la circonferenza $\gamma_r = \{z : |z - z_0| = r\}$ diviso per $2\pi i$:

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r} f(z)\,\mathrm{d}z$$

dove il raggio r è sufficientemente piccolo da non contenere altre singolarità isolate.
Equivalentemente il residuo di f in z_0 è il coefficiente a_{-1} della serie di Laurent, e viene indicato con

$$\mathrm{Res}_{z_0} f(z) = a_{-1}.$$

Caso particolare: L'integrale di contorno di $\frac{1}{z}$ vale $2\pi i$, dove il contorno scelto è la circonferenza unitaria percorso in senso antiorario.

$$\oint_C \frac{1}{z}\, dz.$$

Nel calcolare l'integrale, usiamo come contorno la circonferenza unitaria, $|z| = 1$, parametrizzato da

$$z(t) = e^{it} \quad t \in [0, 2\pi]; \quad \frac{dz}{dt} = ie^{it}$$

$$\oint_C \frac{1}{z}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it}\, dt = i \int_0^{2\pi} 1\, dt = \Big[\ t\ \Big]_0^{2\pi} i = (2\pi - 0)i = 2\pi i.$$

Il calcolo del residuo di una funzione $f(z)$ in un punto z_0 risulta particolarmente semplice nel caso in cui la singolarità isolata sia un polo. In particolare, se z_0 é un polo semplice allora il residuo é:

$$a_{-1} = \lim_{z \to z_0} [(z - z_0) \cdot f(z)].$$

mentre se z_0 é un polo di ordine k il residuo é:

$$a_{-1} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}} \left[(z - z_0)^k \cdot f(z) \right]$$

Esempio

$$f(z) = \frac{1}{(z^3 + 1)(z^3 - 64)},$$

calcolare il residuo di f per $z_0 = -1$.

Sia A un aperto del piano complesso $\mathbb{C}$, e z_0 un punto di A. Sia

$$f : A \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C},$$

una funzione olomorfa che in z_0 ha una singolarità isolata e quindi un unico sviluppo locale in serie di Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Il residuo di f in z_0 è dato dall'integrale di f lungo la circonferenza $\gamma_r = \{z : |z - z_0| = r\}$ diviso per $2\pi i$:

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r} f(z)\,\mathrm{d}z$$

dove il raggio r è sufficientemente piccolo da non contenere altre singolarità isolate.
Equivalentemente il residuo di f in z_0 è il coefficiente a_{-1} della serie di Laurent, e viene indicato con

$$\mathrm{Res}_{z_0} f(z) = a_{-1}.$$

Calcoliamo
$$\int_{|z+1|=1} \frac{1}{(z^3+1)(z^3-64)}dz$$
Per calcolare l' integrale utilizziamo il teorema dei residui applicato al disco unitario di centro $(-1,0)$. Le singolarità della f sono gli zeri del denominatore

$$z^3+1=0 \iff z=-1 \quad z=e^{i\frac{\pi}{3}} \quad z=e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$z^3-64=0 \iff z=4 \quad z=4e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad z=4e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

L'unica singolarità interna al cerchio che ha come frontiera la circonferenza $|z+1|=1$ è data da

$$z_0=-1$$

pertanto

$$\int_{|z+1|=1}\frac{1}{(z^3+1)(z^3-64)}dz=2\pi i\mathrm{Res}_{z_0=-1}f(z)=-\frac{2}{195}\pi i.$$

Esercizio. Calcolare

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho^2 - 2\rho\cos(\theta) + 1} d\theta,$$

$\rho \in (0, 1)$. Trasformiamo l'integrale definito di funzione reale in un integrale curvilineo nella variabile complessa $z = e^{i\theta}$ dalla formula di Eulero per il coseno

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\rho^2 - 2\rho\cos(\theta) + 1 = \rho^2 - \rho e^{i\theta} - \rho e^{-i\theta} + 1 = \frac{\rho^2 z - \rho z^2 - \rho + z}{z}$$

$$\frac{1}{\rho^2 - 2\rho\cos(\theta) + 1} d\theta = \frac{1}{i} \frac{1}{\rho^2 z - \rho z^2 - \rho + z} dz$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho^2 - 2\rho\cos(\theta) + 1} d\theta = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{\rho^2 z - \rho z^2 - \rho + z} dz$$

La funzione presenta due singolarità che sono poli del primo ordine. Poichè $0 < \rho < 1$, l'unica singolarità interna a $|z| < 1$ è il punto $z = \rho$. Risulta

$$\mathrm{Res}_{z_0=\rho}\, f(z) = \frac{1}{1-\rho^2}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho^2 - 2\rho\cos(\theta) + 1} d\theta = \frac{2\pi}{1-\rho^2}$$

Esercizio Calcolare per $\rho = \frac{1}{4}$. Risultato $\frac{32}{15}\pi$

Domini normali

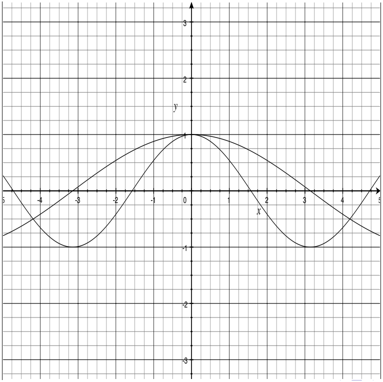
- Dominio normale rispetto a x; α, β funzioni continue.

$$D = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} : \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$$

- D dominio normale (rispetto a x) si dice regolare se α e β sono funzioni di classe C^1 e $\alpha(x) < \beta(x) \;\; \forall x \in (a, b)$

Esempio:

$$D = \{(x, y) \in [0, \pi] \times \mathbb{R} : \cos x \le y \le \cos \frac{x}{2}\}$$



Domini normali

- Dominio normale rispetto a y; δ, γ funzioni continue.

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times [c, d] : \delta(y) \leq x \leq \gamma(y)\}$$

- D dominio normale (rispetto a y) si dice regolare se δ e γ sono funzioni di classe C^1 e $\delta(y) < \gamma(y) \ \forall y \in (c, d)$

Esempio:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 : y \leq x \leq 1\}$$

- $$m(D) = \int_a^b (\beta(x) - \alpha(x))dx$$
- $$m(D) = \int_c^d (\gamma(y) - \delta(y))dy$$

Può accadere che un dominio risulti normale sia rispetto all'asse x che all'asse y. Ad esempio il triangolo T determinato da $(0,0)$,$(1,0)$ e $(1,1)$.

$$T = \{(x,y) \in [0,1] \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq x\}$$

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times [0,1] : y \leq x \leq 1\}$$

Generalizzare

$$T = \{(x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R} : a \leq y \leq x\}$$

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times [a,b] : y \leq x \leq b\}$$

Può accadere che un dominio non risulti normale rispetto all'asse x e non risulti normale rispetto all'asse y.
Esempio: corona circolare.
Un dominio regolare D è l'unione di un numero finito di domini normali regolari a due a due privi di punti in comune: la sua frontiera è unione finita di curve regolare a tratti.

Curve orientate.
Una curva orientata positivamente: curva piana semplice e chiusa tale che muovendosi sulla curva abbiamo l'interno alla nostra sinistra. Se scambiamo la sinistra con la destra otteniamo una curva orientata negativamente.

Calcolo dell'area di domini piani regolari con le formule di Gauss Green

$$area(A) = \int_{\varphi^+} xdy$$

$$area(A) = \int_{\varphi^+} -ydx$$

$$area(A) = \frac{1}{2}\int_{\varphi^+} -ydx + xdy$$

Area dell'ellisse

$$area(A) = \frac{1}{2}\int_{\varphi^+} -ydx+xdy = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} (ab\sin^2\theta + ab\cos^2\theta)d\theta = \pi ab$$

Area dell'asteroide $a = 1$

$$area(A) = \frac{1}{2}\int_{\varphi^+} -ydx + xdy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3\sin^4\theta\cos^2\theta + 3\sin^2\theta\cos^4\theta d\theta =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta)d\theta =$$

$$\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin(2\theta)}{2}\right)^2 d\theta =$$

$$\frac{3}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2(2\theta)d\theta = \frac{3}{16}\int_0^{4\pi}\sin^2 u\, du = \frac{3}{16}\frac{1}{2}(u - \sin u\cos u)|_0^{4\pi} =$$

$$\frac{3}{16}\frac{1}{2}4\pi = \frac{3}{8}\pi$$

Generalizzare $(a\cos^3 t, a\sin^3 t)$ con $a > 0$.

Formula dell'area di un settore piano utilizzando le formule di Gauss Green.
Settore individuato da $\theta \in [\alpha, \beta]$ $\;0 \leq \rho \leq \rho(\theta)$ $\rho(\theta)$ funzione positiva e continua in $[\alpha, \beta]$.

$$\begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta \\ y = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

con $\theta \in [\alpha, \beta]$, osserviamo che al crescere di $\theta \in [\alpha, \beta]$ la curva percorsa in senso antiorario (orientamento positivo della curva).
Sia $\rho \in C^1$ a tratti, allora

$$xdy - ydx =$$

$$[(\rho(\theta)\cos\theta)(\rho'(\theta)\sin\theta + \rho(\theta)\cos\theta) - \rho\sin\theta(\rho'(\theta)\cos\theta - \rho(\theta)\sin\theta)]d\theta =$$

$$\rho^2(\theta)d\theta$$

Formula dell'area (Gauss Green)

$$m(D) = \int\int_D dxdy = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)d\theta$$

Esercizio. Calcolo dell'area della cardioide $a = 1$

$$m(D) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos\theta)^2 d\theta = \frac{3}{2}\pi$$

Se la funzione f è non negativa al variare di $(x, y) \in D$ l'integrale doppio fornisce il volume del solido di $\mathbb{R}^3$ delimitato dall'insieme D del piano (x, y), dal grafico della funzione f (sostegno di una superficie e dai segmenti paralleli all'asse z passanti per i punti della frontiera di D.

Nel caso di due variabili, l'integrale di f continua in D su un dominio normale rispetto all'asse x, definito dalle funzioni $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ anch'esse continue con $\alpha(x) \leq \beta(x)$, x tra a e b risulta

$$\int\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\mathrm{d}y,$$

mentre, nel caso di dominio normale rispetto all'asse y, con δ, γ funzioni continue, con $\delta(y) \leq \gamma(y)$ y tra c e d si ha

$$\int\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\delta(y)}^{\gamma(y)} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

$$D = \{(x,y) \in [0,\pi] \times \mathbb{R} : \cos x \leq y \leq \cos \frac{x}{2}\} \quad f(x,y) = y$$

$$\int\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\mathrm{d}y =$$

$$\int_0^\pi \mathrm{d}x \int_{\cos x}^{\cos \frac{x}{2}} y\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^\pi (\cos^2 \frac{x}{2} - \cos^2 x)dx = 0$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}(x + \cos x \sin x) + c$$

$$\int\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$\int\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\delta(y)}^{\gamma(y)} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

Formula di inversione di Dirichlet

$$D = \{(x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R} : a \leq y \leq x\}$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times [a,b] : y \leq x \leq b\}$$

$$\int\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_a^x f(x,y)\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}y \int_y^b f(x,y)\mathrm{d}x.$$

Verifica.

$$D = \{(x,y) \in [0,1] \times \mathbb{R} : 0 \le y \le x\}$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times [0,1] : y \le x \le 1\}$$

Calcolare l'integrale doppio esteso a D nelle due formulazioni della funzione $f(x,y) = x^2 y$

$$\int\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 x^2\mathrm{d}x \int_0^x y\mathrm{d}y =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x^4\mathrm{d}x = \frac{1}{10}$$

$$\int\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 y\mathrm{d}y \int_y^1 x^2\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{3}\int_0^1 y(1-y^3)dy = \frac{1}{3}(\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{5}y^5)|_0^1 = \frac{1}{10}$$

Dato l'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D 2xye^{y^2} dxdy$$

$$\int\int_D 2xye^{y^2} dxdy = \int_0^1 x\, dx \int_0^{\sqrt{x}} 2ye^{y^2}\, dy =$$

$$\int_0^1 xe^{y^2} | t_0^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 x(e^x - 1)dx = xe^x - e^x|_0^1 - \frac{1}{2}x^2|_0^1 =$$

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Esercizio

Calcolare

$$\int\int_D \frac{dxdy}{x(x^2+y^2)}$$

$$D = \{x, y) \in \mathbb{R}^2 1 \leq x \leq \sqrt{3}, 0 \leq y \leq x^2\}$$

Svolgimento:

$$\int\int_D \frac{dxdy}{x(x^2+y^2)} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2} \arctan x dx =$$

$$-\frac{1}{x} \arctan x|_1^{\sqrt{3}} + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x(1+x^2)} dx = -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x} - \frac{x}{(1+x^2)} dx =$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + \ln x|_1^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)|_1^{\sqrt{3}} =$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + \ln \sqrt{3} + \frac{1}{2} \ln(2) - \frac{1}{2} \ln(4) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + \ln \sqrt{3} - \frac{1}{2} \ln(2).$$

Proprietà

- linearità: per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e per f, g integrabili in D

$$\int\int_D \alpha f(x,y) + \beta g(x,y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$\alpha \int\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \beta \int\int_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

- monotonia: per f, g integrabili in D

$$f(x,y) \leq g(x,y) \ \ \forall (x,y) \in D \implies$$

$$\int\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \int\int_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Se $\{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ costituiscono una partizione di D in domini normali (D_i a due a due privi di punti interni in comune)vale la formula

$$\int\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{n} \int\int_{D_i} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Dato il triangolo T del piano di vertici $(0,0),(1,0),(1,1)$

$$T = \{(x,y) \in [0,1] \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq x\}$$

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times [0,1] : y \leq x \leq 1\}$$

calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_T e^{x^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Considerazione sulla scelta della rappresentazione del dominio.
Se consideriamo T normale rispetto all'asse x l'integrale si svolge nel seguente modo

$$\int\int_T e^{x^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 e^{x^2} \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}y = \int_0^1 xe^{x^2} dx$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (2x)e^{x^2} dx = \frac{1}{2}e^{x^2}|_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)$$

Dato il dominio D

$$D = \{(x, y) \in [0,1] \times [3,4]\}$$

calcolare

$$\int\int_D \frac{1}{(x+y)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\int\int_D \frac{1}{(x+y)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_3^4 \frac{1}{(x+y)^2} \mathrm{d}y = \int_0^1 \left(-\frac{1}{x+y}\right)\Big|_3^4 \mathrm{d}x =$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} \mathrm{d}x =$$

$$\ln 4 - \ln 5 - \ln 3 + \ln 4 = \ln 16 - \ln 15$$

Dato il dominio D

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2\}$$

calcolare

$$\int\int_D (x + y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

r : $7/20$

$$\int\int_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^2} (x+y)\mathrm{d}y =$$

$$\int_0^1 [xy + \frac{1}{2}y^2]|_0^{x^2} \mathrm{d}x =$$

$$\int_0^1 (x^3 + \frac{1}{2}x^4)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{10}x^5|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{10} = \frac{7}{20}$$

Teorema di Gauss Green
Sia D un dominio regolare di $\mathbb{R}^2$. Sia $\partial^+ D$ la frontiera di D orientata positivamente. $f : D \to \mathbb{R}, \quad f \in C^1(D)$. Valgono le seguenti formule

$$\int\int_D f_x(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial^+ D} f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$\int\int_D f_y(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_{\partial^+ D} f(x,y)\mathrm{d}x$$

Dimostriamo
$$\int\int_D f_x(x,y) = \int_{\partial^+ D} f\,\mathrm{d}y$$
nel caso particolare D dominio normale rispetto all'asse y.

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times [c,d] : \delta(y) \le x \le \gamma(y)\}$$

$$\int\int_D f_x(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\delta(y)}^{\gamma(y)} f_x(x,y)\mathrm{d}x =$$

$$\int_c^d f(\gamma(y),y) - f(\delta(y),y)\mathrm{d}y$$

Nel piano la frontiera di D è costituita da quattro curve di cui due segmenti orientati paralleli all'asse x in cui $y = \textit{costante}$. Su tale segmenti l'integrale curvilineo della forma differenziale fornisce un contributo nullo. Dobbiamo calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale lungo γ e δ

$$\int_c^d f(\gamma(t),t)dt - \int_c^d f(\delta(t),t)dt$$

Formula di integrazione per parti
Siano f e g funzioni di classe C^1 in D dominio regolare di $\mathbb{R}^2$.
Allora

$$\int\int_D f\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial^+ D} fg\mathrm{d}y - \int\int_D \frac{\partial f}{\partial x}g\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\int\int_D f\frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_{\partial^+ D} fg\mathrm{d}x - \int\int_D \frac{\partial f}{\partial y}g\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

dim: Dalle formule di Gauss Green con fg al posto di f

Esercizio. Sia D la corona circolare di cento l'origine e raggi 2 e 1. Determinare l'orientamento positivo del bordo. Calcolare tramite la formula di Gauss Green

$$\int\int_D x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

Applicando la formula di Gauss Green

$$\int\int_D x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\int_D (\frac{x^3}{3})_x \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\int_{\partial^+ D} x^3 \mathrm{d}y =$$

$$\frac{1}{3}\left(\int_0^{2\pi} 16\cos^4 t dt\right) - \frac{1}{3}\left(\int_0^{2\pi} \cos^4 t dt\right)$$

Calcoliamo

$$\frac{1}{3}\left(\int_0^{2\pi} 16\cos^4 t dt\right) = \frac{16}{3}\left(\int_0^{2\pi} \cos^2 t dt - \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t dt\right) =$$

$$\frac{16}{3}\left(\int_0^{2\pi}\cos^2 t dt - \int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t dt\right) =$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t dt = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(\sin 2t)^2 dt =$$

$$u = 2t \ \ \frac{1}{8}\int_0^{4\pi}(\sin u)^2 du = \frac{1}{16}(u - \sin u\cos u)|_0^{4\pi} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 t dt = \frac{1}{2}(t + \cos t\sin t)|_0^{2\pi} = \pi$$

In conclusione vale

$$\int_0^{2\pi} cos^4 t dt = \frac{3\pi}{4}$$

Quindi

$$\frac{1}{3}\left(\int_0^{2\pi} 16\cos^4 t dt\right) - \frac{1}{3}\left(\int_0^{2\pi}\cos^4 t dt\right) = \frac{16}{3}\frac{3\pi}{4} - \frac{1}{3}\frac{3\pi}{4} = \frac{15\pi}{4}$$

Teorema della divergenza. Formula di Stokes.
Consideriamo la frontiera del dominio D e assumiamo che sia costituita da una curva regolare a tratti. Sia

$$x = x(t), y = y(t) \quad t \in [a, b]$$

la rappresentazione parametrica della curva e assumiamo che il verso di percorrenza indotto dalla rappresentazione coincida con l'orientamento positivo della frontiera ∂D

curva regolare: tangente e normale alla curva

- Tangente a una curva regolare in un punto $P = (x(t_0), y(t_0))$.

$$\tau = \left(\frac{x'(t_0)}{\sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}}, \frac{y'(t_0)}{\sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}} \right)$$

- Normale a una curva in un punto $P = (x(t_0), y(t_0))$.

$$\mathbf{n} = \left(\frac{y'(t_0)}{\sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}}, -\frac{x'(t_0)}{\sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}} \right)$$

Nel caso della circonferenza $\mathbf{n} = (\cos t, \sin t)$ ed orientato all'esterno del cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 1 di cui la circonferenza costituisce la frontiera.

Considerando uno spazio euclideo a tre dimensioni, **i j**e **k** relativi agli assi x, y e z, la divergenza di un campo vettoriale C^1

$$\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$$

la funzione scalare:

$$div\mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

$n = 2$

$$div\mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = F_1 \frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} - F_2 \frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}$$

Calcoliamo l'integrale curvilineo della funzione $F \cdot n$

$$\int_a^b \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \int_a^b \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt =$$

$$\int_a^b \left(\frac{F_1 y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + (y'(t)^2}} - \frac{F_2 x'(t)}{\sqrt{(x'(t)^2 + y'(t)^2}} \right) \sqrt{(x'(t)^2 + y'(t)^2} dt =$$

$$\int_a^b \Big(F_1 y'(t) - F_2 x'(t) \Big) dt = \int_{+\partial D} F_1 dy - F_2 dx$$

D'altra parte dalle formule di Gauss Green

$$\int\int_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\right) dxdy = \int_{+\partial D} -F_2 dx + F_1 dy$$

Abbiamo cosi dimostrato nel caso di frontiera costituita da una curva regolare regolare a tratti

Teorema della divergenza Sia D un dominio regolare del piano e $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ di classe $C^1(D)$. Si ha

$$\int\int_D div(\mathbf{F}) dxdy = \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$$

Ancora dalle formule di Gauss Green

$$\int\int_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\right) dxdy = \int_{+\partial D} -F_2 dx + F_1 dy \qquad (F)$$

dimostriamo la **Formula di Stokes**

$$\int\int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy = \int_{+\partial D} F_1 dx + F_2 dy$$

dim. Si applica la formula (F) con $(-F_2, F_1)$

$$\int\int_D \left(-\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy = \int_{+\partial D} -F_1 dx - F_2 dy$$

Cambiamento di variabili in un integrale doppio.
Consideriamo

$$\int\int_D f(x, y)dxdy$$

con D dominio regolare di $\mathbb{R}^2$ e f funzione continua in D, a valori reali. Sia T un dominio regolare di $\mathbb{R}^2$; sia $\phi : T \to \mathbb{R}^2$ costituita da una coppia (ϕ_1, ϕ_2) di funzioni a valori in $\mathbb{R}$. Supponiamo $\phi(T) = D$, le funzioni $\phi_1,\ \phi_2$ di classe $C^1(T)$ e ϕ invertibile.

Sia $\phi : T \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. La matrice jacobiana della funzione ϕ in $u = (u_1, \ldots, u_n)$ la matrice delle derivate parziali prime della funzione calcolate in u.

$$J_\phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_m}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_m}{\partial u_n} \end{bmatrix}, \qquad (J_\phi)_{ij} = \frac{\partial \phi_i(u)}{\partial u_j}.$$

Se $m = n$ allora la matrice jacobiana una matrice quadrata. Si puo' in tal caso calcolare il suo determinante, noto come jacobiano. $n = 2$: indichiamo ora con u, v le variabili indipendenti di ϕ. La matrice jacobiana di ϕ la matrice quadrata di ordine 2 avente come righe i gradienti delle componenti ϕ_1 e ϕ_2.

- coordinate polari.

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

$\rho \geq 0 \quad 0 \leq \theta < 2\pi$

$$\phi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$

Osserviamo che nel passaggio a coordinate polari nel piano ϕ risulta non iniettiva in quanto tutti i punti dell'asse θ si trasformano in $(0, 0)$.

$$J_\phi = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{bmatrix},$$

il cui determinante vale ρ.

Vale la seguente formula

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_{\phi^{-1}(D)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$$

Nel piano ρ, θ otteniamo, cambiando in coordinate polare,

$$T = \{(\rho,\theta) : \rho \in [0,2],\ \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}$$

Calcoliamo

$$\int\int_D x^2 dxdy$$

$$\int_0^2 \rho^3 d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta = 4\frac{1}{2}(\theta + \cos\theta\sin\theta)|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi$$

$$\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy,$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2+y^2 \leq 9, y \geq 0\}$$

$$T = \{(\rho,\theta) : 2 \leq \rho \leq 3, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

Ne segue

$$\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy = \int\int_T \rho^2 d\rho d\theta =$$

$$\int_0^{\pi} d\theta \int_2^3 \rho^2 d\rho = \int_0^{\pi} \frac{1}{3}\rho^3|_2^3 = \frac{19}{3}\pi$$

Calcolare

$$\int\int_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1] - x \le y \le x\}$$

$$\int\int_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{-x}^{x} (x^2+y^2)\mathrm{d}y = \int_0^1 x^2y+\frac{1}{3}y^3|_{-x}^{x}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 2x^3 + \frac{2}{3}x^3\mathrm{d}x = \frac{8}{3}\int_0^1 x^3\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$$

$$T = \{(\rho,\theta) : 0 \le \rho \le \frac{1}{\cos\theta} \quad \theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]\}$$

$$\int\int_T (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} \rho^3 d\rho = \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4\theta}d\theta =$$

$$\frac{1}{4}(\frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}) = \frac{1}{4}(\frac{2}{3}+2) = \frac{1}{4}\frac{8}{3} = \frac{2}{3}$$

Coordinate polari L'integrale da calcolare è

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x.$$

Il suo quadrato si può scrivere come

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \mathrm{d}y \right) = \int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{+\infty} \rho e^{-\frac{\rho^2}{2}} \mathrm{d}\rho$$

che può essere integrato ottenendo

$$I^2 = -\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \left[-e^{-\frac{\rho^2}{2}} \right]_{\rho=0}^{\rho=+\infty} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 2\pi$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}.$$

Integrali per sostituzione
($n = 2$, $n = 3$) Si puo' usare la sostituzione quando si integra funzioni in più variabili.

$$(x_1, \dots, x_n) = \phi(u_1, \dots, u_n)$$

deve essere C^1 invertibile con determinante jacobiano

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \dots x_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)} \neq 0$$

$$\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = |\det(\mathrm{D}\,\phi)(u_1, \dots, u_n)|\,\mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_n$$

Teorema di cambiamento di variabili negli integrali doppi
Siano T, D due domini regolari di $\mathbb{R}^2$ e $\phi : T \to D$ un'applicazione invertibile di classe C^1 con con determinante jacobiano $\neq 0$ in T.
Allora per ogni funzione continua $f : D = \phi(T) \to \mathbb{R}$ vale

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_T f(x(u,v), y(u,v))|det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|dudv$$

Calcolare

$$\int\int_D \frac{x}{y} dxdy$$

ove D il dominio racchiuso dalle rette $y = x$, $y = 3x$, $y = \frac{1-x}{3}$, $y = 1 - x$.

Disegnare il dominio.

Cambiamento di variabili

$$u = \frac{y}{x}, \quad v = \frac{y}{1-x}$$

$$T = \{(u, v) : 1 \leq u \leq 3, \quad \frac{1}{3} \leq v \leq 1\}$$

Da $u = \frac{y}{x}, \quad v = \frac{y}{1-x}$ si ottiene

$$ux = y \quad v(1-x) = y \implies (u+v)x = v \implies x = \frac{v}{u+v}$$

$$x = \frac{v}{u+v} \qquad y = \frac{uv}{u+v}$$

$$\begin{vmatrix} -\frac{v}{(u+v)^2} & -\frac{v}{(u+v)^2} + \frac{1}{u+v} \\ \frac{v}{u+v} - \frac{uv}{(u+v)^2} & \frac{u}{u+v} - \frac{uv}{(u+v)^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{v}{(u+v)^2} & \frac{u}{(u+v)^2} \\ \frac{v^2}{(u+v)^2} & \frac{u^2}{(u+v)^2} \end{vmatrix} = -\frac{uv}{(u+v)^3}$$

$$\int_{\frac{1}{3}}^{1} vdv \int_{1}^{3} \frac{1}{(u+v)^3} du = \int_{\frac{1}{3}}^{1} (-\frac{1}{2}\frac{1}{(u+v)^2})|_1^3 vdv =$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{3}}^{1} (\frac{v+3-3}{(3+v)^2} - \frac{v+1-1}{(1+v)^2}) dv = -\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{dv}{(3+v)} + \frac{3}{2}\int_{1}^{3} \frac{dv}{(3+v)^2} +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{dv}{(1+v)} - \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{dv}{(1+v)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(3+v)|_{\frac{1}{3}}^{1} - \frac{3}{2}\frac{1}{3+v}|_{\frac{1}{3}}^{1} + \frac{1}{2}\ln(1+v)|_{\frac{1}{3}}^{1} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+v}|_{\frac{1}{3}}^{1} =$$

$$\frac{1}{20}(-1 + 10\ln\frac{5}{4})$$

Esercizio. Data la funzione

$$f(x,y) = xy,$$

calcolare l'integrale doppio esteso a D

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x \leq 0, \;\; y \geq 0\}$$

$$(x-1)^2 + y^2 \leq 1 \qquad y \geq 0$$

corrisponde al semicerchio chiuso di centro $(1,0)$ e raggio 1 con $y \geq 0$.
Disegnare D

Scriviamo l'insieme come insieme normale rispetto all'asse x

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2,\ \ 0 \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}\}$$

$$\int\int_D xydxdy = \int_0^2 xdx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} ydy =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^2 x(2x - x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (2x^2 - x^3)dx = \frac{1}{2}(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4|_0^2) = \frac{2}{3}$$

Esercizio. Data la funzione

$$f(x,y) = xy,$$

calcolare l'integrale doppio esteso all'insieme

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x \leq 0, \;\; y \geq 0\}$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1, \;\; y \geq 0\}$$

Cerchio chiuso di centro $(1,0)$ e raggio 1 con $y \geq 0$: trasformiamo in coordinate polari

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad 0 \leq \rho \leq 2\cos\theta$$

Nel caso in esame (semicerchio)

$$\{0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \;\; 0 \leq \rho \leq 2\cos\theta\}$$

$$\int\int_D xydxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho^3 d\rho =$$

$$\frac{2^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos^5\theta d\theta = -4\frac{1}{6}\cos^6\theta|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

Esercizio. Data la funzione

$$f(x,y) = xy,$$

calcolare l'integrale doppio esteso all'insieme

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x-1)^2 + y^2 \le 1 \ \ y \ge 0\}$$

corrisponde al semicerchio chiuso di centro $(1,0)$ e raggio 1 con $y \ge 0$

Cambiamento di coordinate

$$\begin{cases} x = 1 + \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

$$0 \le \theta \le \pi, \ \ 0 \le \rho \le 1$$

$$\int\int_D xydxdy = \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^1 (1+\rho\cos\theta)\rho^2 d\rho =$$

$$\int_0^1 (1+\rho\cos\theta)\rho^2 d\rho = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cos\theta$$

$$\int_0^{\pi} \sin\theta(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cos\theta)d\theta = -\frac{1}{3}\cos\theta|_0^{\pi} + \frac{1}{4}\frac{1}{2}\sin^2\theta|_0^{\pi} = \frac{2}{3}$$

Disegnare l'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2y \leq 0, y \geq x\}$$

Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D x dx dy$$

Cambio in coordinate polari

$$\int\int_D x dx dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \cos\theta \int_0^{2\sin x} \rho^2 d\rho d\theta = \frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin^3\theta \cos\theta d\theta =$$

$$\frac{8}{3}\frac{1}{4}\sin^4\theta|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = -\frac{8}{3}\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = -\frac{8}{3}\frac{1}{4}\frac{4}{16} = -\frac{1}{6}$$

Calcolare l'integrale doppio della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2},$$

alla regione di piano D limitata da $x^2+y^2=4$ e $x^2+y^2=9$.
Disegnare D

$$\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_2^3 \rho^2 d\rho = 2\pi \frac{1}{3}\rho^3|_2^3 = \frac{38\pi}{3}$$

- Calcolare l'integrale doppio della funzione

$$f(x,y) = x^2+y^2,$$

alla regione di piano D limitata da $x^2+y^2=4$ e $x^2+y^2=9$

Descrivere la regione di piano D limitata da $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$ con $y \geq 0$ come dominio normale rispetto a x. Per fare ciò dobbiamo avere

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \;\; \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

Ora scegliamo $-2 \leq x \leq 2$ e aggiustiamo la variabilità di y scrivendo

$$\alpha(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2} & x \in [-1, 1] \\ 0 & x \in [-2, 2] \setminus (-1, 1) \end{cases}$$

e

$$\beta(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

Risolvere

$$\int\int_D \frac{y}{x^2+y^2}\,dxdy$$

Esercizio.Sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $p > 0$. Data la funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^p}$$

valutare per quali p l'integrale della funzione nel cerchio di centro (x_0, y_0) e raggio R risulta finito.
Trasformiamo in coordinate polari e consideriamo $0 < r < R$ (faremo poi tendere r a 0^+)

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_r^R \rho^{-2p} \rho d\rho = 2\pi \int_r^R \rho^{-2p+1} d\rho =$$

$$\frac{2\pi}{-2p+2}(R^{-2p+2} - r^{-2p+2}) = \frac{\pi}{1-p}(R^{-2(p-1)} - r^{-2(p-1)})$$

per $-2p+1 \neq -1$ $p \neq 1$. Se $p = 1$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_r^R \rho^{-1} d\rho = 2\pi(\ln R - \ln r)$$

r. $p < 1$

Domini normale rispetto all'asse x

Dominio normale rispetto all'asse x

Un insieme $D \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice normale rispetto all'asse x se esistono $a < b$ e funzioni continue $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tali che

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a \leq x \leq b, \ g(x) \leq y \leq f(x)\}.$$

In modo informale, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ è un dominio normale rispetto all'asse x se ogni retta parallela all'asse y incontra la frontiera di A in due punti.

Domini normale rispetto all'asse y

Dominio normale rispetto all'asse y

Un insieme $D \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice normale rispetto all'asse y se esistono $c < d$ e funzioni continue $h, \ell : [c, d] \to \mathbb{R}$ tali che

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, c \leq y \leq d,\, h(y) \leq x \leq \ell(y)\}.$$

In modo informale, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ è un dominio normale rispetto all'asse y se ogni retta parallela all'asse x incontra la frontiera di A in due punti.

Formule di riduzione integrali doppi su domini normali

Sia F una funzione continua su A.

- Se $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, a \leq x \leq b, \, g(x) \leq y \leq f(x)\}$ allora

$$\int \int_D F(x, y) dxdy = \int_a^b \Big(\int_{g(x)}^{f(x)} F(x, y) dy \Big) dx.$$

- Se $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, c \leq y \leq d, \, h(y) \leq x \leq \ell(y)\}$ allora

$$\int \int_D F(x, y) dxdy = \int_c^d \Big(\int_{h(y)}^{\ell(y)} F(x, y) dx \Big) dy.$$

Esercizio. Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D xy\,dxdy$$

ove

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq 2,\, 0 \leq y \leq 2x - x^2\}$$

Quindi

$$\int\int_D xydxdy = \int_0^2 \Big(\int_0^{2x-x^2} xydy\Big)dx.$$

Risolviamo l'integrale

$$\int_0^{2x-x^2} xydy = x\Big[\frac{y^2}{2}\Big]_0^{2x-x^2} = \frac{4x^3-4x^4+x^5}{2}.$$

Dunque

$$\begin{aligned}\int\int_D xydxdy &= \int_0^2 \frac{4x^3-4x^4+x^5}{2}dx\\ &= \frac{1}{2}\Big[\frac{4\cdot 16}{4} - \frac{4\cdot 32}{5} + \frac{64}{6}\Big] = \frac{8}{15}.\end{aligned}$$

Esercizio

Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D x dx dy$$

dove D è dato da

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq 1, -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}.$$

Dalla definizione abbiamo
Quindi

$$\int\int_D x dx dy = \int_0^1 \left(x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \right) dx$$
$$= \int_0^1 2x\sqrt{1-x^2} dx$$
$$= \left[-\frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D x^2 dxdy$$

dove A è dato da

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq y \leq 1,\, 1 - y^2 \leq x \leq 1\}.$$

Svolgimento esercizio

Dunque

$$\begin{aligned}
\int\int_D x^2 dxdy &= \int_0^1 \Big(\int_{1-y^2}^1 x^2 dx\Big) dy \\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 [1-(1-y^2)^3] dy \\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 [1-(1-3y^2+3y^4-y^6) dy \\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 [3y^2-3y^4+y^6] \\
&= \frac{1}{3}\Big[1-\frac{3}{5}+\frac{1}{7}\Big] = \frac{19}{105}.
\end{aligned}$$

Baricentro di un dominio normale D

$$x_0 = \frac{1}{m(D)} \int\int_D x \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$
$$y_0 = \frac{1}{m(D)} \int\int_D y \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

Esercizio.Calcolo del baricentro della porzione di cerchio di centro $(0,0)$ e raggio 1 del primo quadrante.

$$m(D) = \frac{\pi}{4}$$

$$x_0 = \frac{4}{\pi} \int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy = \frac{4}{\pi} \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx =$$
$$-\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right)|_0^1 = \frac{4}{3\pi}$$
$$y_0 = x_0$$

Teorema di Guldino sui solidi di rotazione. Sia S il solido generato dalla rotazione di un angolo α di un dominio normale D del piano intorno a un asse r non intersecante D. Il volume di S è dato dal prodotto dell'area di D per la lunghezza dell'arco di circonferenza decritto nella rotazione del baricentro

Rotazione rispetto all'asse x di 2π:

$$2\pi \int\int_D y \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

D descritto da

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

$$2\pi \int_a^b \mathrm{d}x \int_0^{f(x)} y \mathrm{d}y = \pi \int_a^b f^2(x) \mathrm{d}x$$

Esercizio. Volume della sfera ottenuto come rotazione del semicerchio con $y \geq 0$ della funzione

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Esercizio. Calcolare il volume del solido ottenuto ruotando di 2π rispetto all'asse x. la porzione di piano del primo quadrante delimitata dall'asteroide (con $a = 1$) e dagli assi

$$y = (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

$$V = \pi \int_{0}^{1} (1 - x^{\frac{2}{3}})^3 dx = \frac{16\pi}{105}$$

$$V = \pi \int_{0}^{1} (1 - 3x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{4}{3}} - x^2) dx == \pi(x - \frac{9}{5}x^{2/3+1} + \frac{9}{7}x^{\frac{4}{3}+1} - \frac{1}{3}x^3)|_0^1 =$$

$$\frac{16\pi}{105}$$

In tre dimensioni. Coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}$$

dove θ varia tra 0 e 2π, ϕ varia tra 0 e π ; $\rho \geq 0$
Lo jacobiano della trasformazione

$$\begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\sin\theta \\ \cos\phi & 0 & -\rho\sin\phi \end{vmatrix} = -\rho^2\sin\phi$$

$$= \cos\phi \begin{vmatrix} -\rho\sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\cos\theta \\ \rho\sin\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\sin\theta \end{vmatrix} - \rho\sin\phi \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= \cos^2\phi\sin\phi(-\rho^2\sin^2\theta - \rho^2\cos^2\theta) - \rho\sin^3\phi(\rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta) =$$
$$-\rho^2\cos^2\phi\sin\phi - \rho^2\sin^3\phi = -\rho^2\sin\phi$$

Il sistema di coordinate cilindriche un sistema di coordinate che estende il sistema bidimensionale polare aggiungendo una terza coordinata, che misura l'altezza di un punto dal piano base.
Le tre coordinate cilindriche possono essere convertite in coordinate cartesiane con le formule

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos\theta \\ y &= \rho \sin\theta \\ z &= z. \end{aligned}$$

Il determinante jacobiano vale ρ:

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho(\cos\theta)^2 + \rho(\sin\theta)^2 = \rho.$$

Integrale triplo.
D dominio del piano xy. L'insieme T dei punti dello spazio definito dalle condizioni

$$(x, y) \in D \qquad \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)$$

Dominio normale rispetto al piano xy

$$\int\int\int_T f(x, y, z) \mathrm{dxdydz} = \int\int_D \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z) \mathrm{dxdydz}$$

- Ipotesi di continuità delle funzioni

Sia T il dominio definito dalle limitazioni

$$(x,y) \in D \quad 0 \leq z \leq 1 - x - y$$

con D triangolo del piano (x,y)

$$D = \{x \geq 0,\ \ y \geq 0,\ \ x + y \leq 1\},$$

calcolare

$$Vol(T) = \int\int\int_T dxdydz$$

$$\int\int\int_T dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)dy = \int_0^1 (y - xy - \frac{1}{2}y^2)|_0^{1-x} dx =$$

$$\int_0^1 (1-x-x(1-x)-\frac{1}{2}(1-x)^2)dx = \int_0^1 (1-2x+x^2-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2})dx =$$

$$\int_0^1 (\frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}x^2)dx = \frac{1}{6}$$

Integrando la funzione $f(x, y, z) = 1$ su un cubo di spigolo unitario si ottiene

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 1\, dx\, dy\, dz = 1$$

Se abbiamo una funzione scalare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y, z) = x + y + z$$

si puo' calcolare

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (x + y + z)\; dx\, dy\, dz = \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{1}{2} + y + z\right)\; dy\, dz =$$

$$\int_0^1 (1 + z)\; dz = \frac{3}{2}$$

L'integrale di volume della funzione costante 1, fornisce il volume della regione $T \subseteq \mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{Vol}(T) = \iiint_T dx\,dy\,dz$$

Regione dello spazio racchiusa dalla sfera di centro l'origine e raggio R.
In coordinate sferiche il volume della sfera di raggio R

$$\iiint\limits_S \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

$$\begin{aligned}\text{Volume} &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \sin\phi \, \mathrm{d}\phi \int_0^R \rho^2 \, \mathrm{d}\rho \\ &= 2\pi \frac{R^3}{3} \int_0^{\pi} \sin\phi \, \mathrm{d}\phi = \frac{2}{3}\pi R^3 \Big[-\cos\phi\Big]_0^{\pi} = \frac{4}{3}\pi R^3\end{aligned}$$

Volume dell'ellissoide

Volume della regione di spazio racchiuso da

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$u = \frac{x}{a} \quad v = \frac{y}{b} \quad w = \frac{z}{c}$$

$$x = au \quad y = vb \quad z = cw$$

Volume regione spazio contenuto nella sfera

$$\{(u, v, w) : u^2 + v^2 + w^2 = 1\}$$

$$\text{Volume} = abc \iiint_T du\, dv\, dw$$

In coordinate sferiche il volume della sfera di raggio 1

$$\text{Volume} = abc \iiint_T \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi = abc \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \sin\phi\, \mathrm{d}\phi \int_0^1 \rho^2\, \mathrm{d}\rho$$

$$= abc 2\pi \frac{1}{3} \int_0^{\pi} \sin\phi\, \mathrm{d}\phi = \frac{2}{3} abc\pi \Big[-\cos\phi \Big]_0^{\pi} = \frac{4}{3}\pi abc$$

Esercizio.Sia

$$f : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \to \mathbb{C},$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$$

.

$$\mathrm{Res}(f(z), i) = \lim_{z \to i} \frac{z-i}{z^2+1} = \lim_{z \to i} \frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}$$

Esercizio

Determinare l'insieme di definizione, punti stazionari e la loro classificazione della seguente funzione

$$f(x, y) = x^y.$$

Svolgimento Esercizio

Poichè $f(x,y) = e^{y \log x}$ allora il dominio di f è data da

$$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > 0\}.$$

Per trovare i punti stazionari calcoliamo le derivate prime:

$$\begin{aligned} f_x &= (e^{y \log x})_x = e^{y \log x} \frac{y}{x}, \\ f_y &= (e^{y \log x})_y = e^{y \log x} \log x. \end{aligned}$$

I punti critici sono dati da

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Svolgimento Esercizio

Per la matrice Hessiana calcoliamo le derivate seconde:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \left(e^{y\log x}\frac{y}{x}\right)_x = \frac{y(y-1)}{x^2}e^{y\log x}, \\ f_{xy} &= (e^{y\log x}\log x)_x = \frac{e^{y\log x}}{x}\big(y\log x + 1\big), \\ f_{yy} &= (e^{y\log x}\log x)_y = e^{y\log x}(\log x)^2. \end{aligned}$$

Dunque

$$H(1,0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(1,0) & f_{xy}(1,0) \\ f_{xy}(1,0) & f_{yy}(1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Perció $\det H(1,0) = -1 < 0$ e $(1,0)$ è un punto di sella.

Trovare i coefficienti della serie di Fourier di una funzione f definita in $[-\pi, \pi)$ ripetuta per periodicità in $\mathbb{R}$. Sia

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \\ \frac{1}{2} & x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ 0 & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$$

in $[-\pi, \pi)$ ripetuta per periodicità in $\mathbb{R}$.
Calcolare il coefficiente a_{10}

Calcolare il coefficiente a_{10}

$$a_{10} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(10x)\, dx =$$

$$\frac{1}{2\pi}\frac{1}{10}\sin(10x)|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{20\pi}\left(\sin(10\frac{\pi}{2}) - \sin(-10\frac{\pi}{2})\right) = 0$$

Data la funzione

$$f(x,y) = (1+xy)e^{-x^2}$$

calcolare

- $\boxed{\text{i}}$ eventuali punti in cui $Df = 0$
- $\boxed{\text{ii}}$ la matrice Hessiana $Hf(x,y)$
- $\boxed{\text{iii}}$ la matrice Hessiana nei punti in cui $Df = 0$
- $\boxed{\text{iv}}$ Classificare i punti in cui $Df = 0$

Calcolare

$$\int\int_D \sin^2 y dx dy$$

ove

$$D = \{(x.y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \quad 0 \le y \le x\}$$

$f(x,y) = (1+xy)e^{-x^2}$

$$D_x f = -2x(1+xy)e^{-x^2} + ye^{-x^2} = (-2x - 2x^2y + y)e^{-x^2}$$

$$D_y f = xe^{-x^2}$$

$$x = 0 \quad y = 0$$

$$D_{xx} f = (-4xy - 2 - 2xy + 4x^2(1+xy))e^{-x^2}$$

$$D_{yy} f = 0$$

$$D_{yx} f = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}$$

Esercizio Scrivere come polinomio trigonometrico la funzione

$$f(x) = \sin^2 x + \cos x$$

Calcolare

$$\int\int_D \sin^2 y dxdy$$

ove

$$D = \{(x.y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad 0 \leq y \leq x\}$$

Esercizio. Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D x(2+y)dxdy$$

$$D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, \;\; x^2 \leq y \leq x\}$$

Data la forma differenziale

$$\omega = 2xydx + x^2dy$$

calcolare l'integrale lungo la curva individuata dalla circonferenza $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

Data la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{2 + \frac{1}{xy}},$$

calcolare l'insieme di definizione e le derivate parziali prime.

Data la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n x^n$$

determinare l'intervallo di convergenza.

Data
$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0, \\ \sin x & 0 \leq x < \pi, \end{cases}$$
e ripetuta in modo periodico in $\mathbb{R}$, determinare i coefficienti a_0 e b_2 della serie di Fourier

Funzioni di variabile complessa: data $f(z) = z^4$ scrivere come $u(x, y) + iv(x, y)$, verificare che risulta derivabile in senso complesso tramite le condizioni di Cauchy-Riemann.

$$u_x = v_y, u_y = -v_x$$

Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D (x+y)dxdy$$

$$D = \{(x,y) : x+y \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}$$

(a) Fornire la definizione di integrale curvilineo di una forma differenziale.
(b) Data la forma differenziale

$$\omega = (2x \sin y + x)dx + x^2 \cos y dy$$

calcolare l'integrale lungo la curva individuata dall'arco di circonferenza $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, \;\; x \geq 0 \;\; y \geq 0\}$ nel verso che va da $P_1 = (1, 0)$ a $P_2 = (0, 1)$

Data la funzione

$$f(x,y) = e^{-x^2+ay^2},$$

con a parametro reale non nullo, calcolare eventuali punti stazionari e classificare tali punti (min, max, sella) al variare del parametro a non nullo.

Selezionare la risposta giusta. La serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n \quad \text{risulta}$$

$\boxed{\text{a}}$ convergente per ogni x reale

$\boxed{\text{b}}$ sempre divergente

$\boxed{\text{c}}$ nessuna delle precedenti

Data

$$f(x) = 1 + \sin x - 2\sin^2 x,$$

scrivere nella forma di polinomio trigonometrico determinando i coefficienti
$a_0/2 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$.

Funzioni di variabile complessa: data $f(z) = z^3 + \cos z$ scrivere come $u(x, y) + iv(x, y)$, verificare che risulta derivabile in senso complesso tramite le condizioni di Cauchy-Riemann.

$$u_x = v_y, u_y = -v_x$$

Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D x dx dy$$

ove

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, \;\; 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

tenendo conto che D è un dominio normale e verificare il risultato applicando le formule di Gauss Green.

Soluzione.

$$\int_0^2 \sqrt{x}x dx = \frac{2}{5}2^{5/2} = \frac{8}{5}\sqrt{2}$$

$$\gamma_1 : \quad x = t, \; y = 0, \; t \in [0, 2],$$

$$\gamma_2 : \quad x = 2, \, y = t, \;\; t \in [0, \sqrt{2}] \;\; -\gamma_3 : \quad x = t, \;\; y = \sqrt{t} \;\; t \in [0, 2]$$

Con la formula di Gauss-Green

$$\int\int_D (xy)_y dxdy = -\int_{\partial D} xydx = -\int_0^2 t0dt - \int_0^{\sqrt{2}} 2t0dt + \int_0^{\sqrt{2}} 2t^{3/2}dt =$$

$$\frac{8}{5}\sqrt{2}$$

Con la formula di Gauss-Green

$$\int\int_D (x^2/2)_x dxdy = \int_{\partial D} x^2/2dy = \int_0^{\sqrt{2}} 4/2dt + \int_0^2 t^{3/2}/4dt =$$

$$2\sqrt{2} - 2^{3/2}/5 = \frac{8}{5}\sqrt{2}$$

Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale

$$\int_C (7x + y)dx + (7y - x)dy.$$

ove C è la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ percorsa in senso antiorario.
Soluzione.

$$\int_C (7x + y)dx + (7y - x)dy =$$

$$\int_0^{2\pi} \Big((7\cos\theta + \sin\theta)(-\sin\theta) + (7\sin\theta - \cos\theta)\cos\theta \Big) d\theta =$$

$$-\int_0^{2\pi} \sin^2\theta + \cos^2\theta d\theta = -2\pi$$

Data $f(x) = 2x^2 + 3x^3 \cos x + x^7 \cos x$ in $[-\pi, \pi)$ ripetuta in modo periodico in $\mathbb{R}$, determinare i coefficienti a_0 e a_n della serie di Fourier
$S = a_0/2 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2x^2 dx = \frac{2}{\pi} \frac{2}{3} \pi^3 = \frac{4}{3} \pi^2$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2x^2 \cos(nx) dx = \frac{4}{\pi} \frac{1}{n} \int_0^{\pi} x^2 (\sin(nx))' dx = 0 - \frac{8}{\pi n} \int_0^{\pi} x \sin(nx$$

Dalla formula di integrazioni per parti rimane solo il contributo agli estremi:

$$\frac{8}{\pi n^2} x \cos(nx)|_0^{\pi} = (-1)^n \frac{8\pi}{\pi n^2}$$

$$a_n = (-1)^n \frac{8}{n^2}$$

Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D y dx dy$$

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \;\; x^4 \leq y \leq x\}$$

$$\int_{x^4}^{x} y dy = \frac{1}{2}(x^2 - x^8)$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (x^2 - x^8) dx = \frac{1}{2}(\frac{1}{3} - \frac{1}{9}) = \frac{1}{9}$$

Data la forma differenziale $\omega = y^2 dx$ in $\mathbb{R}^2$. Sia γ la curva che descrive il perimetro del quadrato $[0,2] \times [0,2]$ percorsa in senso antiorario, calcolare l'integrale curvilineo della forma su γ.
Calcoliamo il valore dell'integrale

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega + \int_{\gamma_3} \omega + \int_{\gamma_4} \omega$$

$$\gamma_1 : \quad y = 0 \quad 0 \le x \le 2$$

l'integrale vale 0

$$\gamma_2 : \quad x = 2 \quad 0 \le y \le 2$$

l'integrale vale 0

$$-\gamma_3 : \quad y = 2 \quad 0 \le x \le 2$$

l'integrale vale -8

$$-\gamma_4 : \quad x = 0 \quad 0 \le y \le 2$$

l'integrale vale 0. Risultato$=-8$

Calcolare i punti stazionari (in cui si annullano le derivate prime) della funzione $f(x, y) = \sin(xy)$

$$y \cos(xy) = 0 \quad x \cos(xy) = 0$$

$$(0, 0) \cup \{xy = \pi/2 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale

$$\int_C (ax + y)dx + (ay - x)dy.$$

ove C è la circonferenza $x^2 + y^2 = 4$ percorsa in senso antiorario, al variare del parametro a reale.

$$\int_C (ax + y)dx + (ay - x)dy = \int_C ydx - xdy = -8\pi$$

Risultato $= -8\pi$

Analisi complessa:
(a) Utilizzando $\sin z = \frac{e^z - e^{-z}}{2i}$ dimostrare dimostrare

$$\sin(z_1 + z_2) + \sin(z_1 - z_2) = 2 \sin z_1 \cos z_2$$

(b) Calcolare i poli e i rispettivi ordini della funzione

$$f(z) = \frac{z+1}{z(z-2)^2},$$

(a)

$$\frac{e^z - e^{-z}}{2i} = \frac{e^{z_1+z_2} - e^{-z_1-z_2}}{2i} + \frac{e^{z_1-z_2} - e^{-z_1+z_2}}{2i}$$

$$= \frac{e^{z_1}(e^{z_2} + e^{-z_2})}{2i} - \frac{e^{-z_1}(e^{-z_2} + e^{z_2})}{2i} = 2 \cos z_2 \sin z_1$$

(b) $z = 0$ (polo di ordine 1), $z = 2$(polo di ordine 2).

Calcolare il volume del solido generato dalla rotazione di 2π intorno all'asse x della curva descritta dal grafico della funzione $f(x) = x^2$ per $0 \leq x \leq 1$.

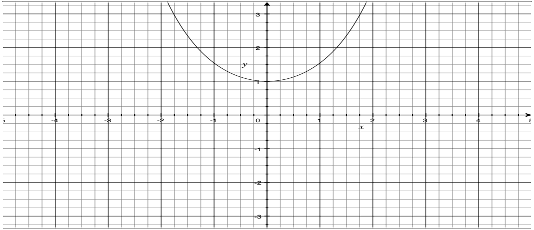
$$V = 2\pi \int\int_D y dx dy$$

Se D il rettangoloide di base $[a, b]$ determinato da una funzione f continua e non negativa.

$$V = 2\pi \int_a^b dx \int_0^{f(x)} y dy = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

$$V = \pi \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}\pi$$

Calcolare il volume del solido generato dalla rotazione 2π intorno all'asse x della curva descritta dal grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, per $0 \leq x \leq 1$



$$V = \pi \int_0^1 \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 dx =$$

$$\frac{\pi}{4}(\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + 2x)|_0^1 =$$

$$\frac{\pi}{4}(\frac{1}{2}(e^2 - e^{-2}) + 2) = \frac{\pi}{8}(e^2 - e^{-2}) + \frac{\pi}{2}$$

Ricordiamo che un polinomio di grado 3 ha esattamente 3 radici (con eventuale molteplicità) e che se i coefficienti sono reali le radici posso essere: tre radici reali; una radice reale e due complesse coniugate. Infatti il teorema della radice complessa coniugata afferma che dato P polinomio in una variabile a coefficienti reali se $x + iy$ è una sua radice, allora anche $x - iy$ è una radice di P.

Radici di polinomi.
Gerolamo Cardano (1501-1576).Tartaglia (1500-1557) Ludovico Ferrari (1522-1565)
b, c, d numeri reali.

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$x = y + k$$

Prima riduzione: determinare il valore di k per rendere 0 il coefficiente di y^2.

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$
$$(y + k)^3 + b(y + k)^2 + c(y + k) + d = 0$$

$$y^3 + 3ky^2 + 3k^2y + k^3 + by^2 + 2bky + bk^2 + cy + ck + d = 0$$

$$y^3 + (3k + b)y^2 + (3k^2 + 2bk + c)y + k^3 + bk^2 + ck + d = 0$$

Allora

$$3k + b = 0 \qquad k = -\frac{b}{3}$$

$$3k^2 + 2bk + c = 3\frac{b^2}{9} - 2\frac{b^2}{3} + c = -\frac{b^2}{3} + c$$

$$k^3 + bk^2 + ck + d = -\frac{b^3}{27} + \frac{b^3}{9} - c\frac{b}{3} + d = \frac{2b^3}{27} - c\frac{b}{3} + d$$

Sostituiamo

$$x = y - b/3$$

nell'equazione

$$y^3 + (-\frac{b^2}{3} + c)y + \frac{2b^3}{27} - c\frac{b}{3} + d = 0$$

$$p = -b^2/3 + c$$

$$q = 2b^3/27 - bc/3 + d$$

Quindi

$$y^3 + py + q = 0$$

Seconda riduzione: cercare y come la somma di u e v (da determinare).

$$y = u + v$$

Sostituendo nell'equazione

$$y^3+py+q = (u+v)^3+p(u+v)+q = u^3+v^3+(3uv+p)(u+v)+q = 0$$

Allora

$$u^3 + v^3 = -q$$

$$u^3 v^3 = -p^3/27$$

Abbiamo la somma e il prodotto di u^3 e v^3: possiamo costruire l'equazione di secondo grado di cui sono soluzioni.
Ricorda z^2- somma $z+$ prodotto $=0$

$$z^2 + qz - p^3/27 = 0$$

Ad esempio, la formula di Tartaglia fornisce la soluzione dell'equazione $x^3 - x = 0$.
$y^3 + py + q = 0 \implies p = -1, q = 0$

Completare l'esercizio.