DISPENSA DI ANALISI MATEMATICA I

Paola Loreti

Dipartimento di Scienze di Base, e Applicate per l'Ingegneria, Via Scarpa n.16, 00161 Roma, Italy

Indice

Capitolo 1. Introduzione v

Capitolo 2. Prime nozioni:Lezioni 30-09-2013 vii
1. Alcune lettere dell'alfabeto greco minuscolo di frequente uso vii
2. Alcuni numeri vii
3. I numeri irrazionali viii
4. Insiemi ix
5. Insieme delle parti 1

Capitolo 3. Le proprietà dei numeri reali 3
1. Proprietà algebriche 3
2. Ordinamento 5
3. Minimo e massimo tra due numeri reali 6
4. Topologia in $\mathbb{R}$ 7
5. Il simbolo di somma e prodotto 7
6. Esercizi 8
7. Altri esempi di strutture 9
8. Parte intera 11
9. Minimo e massimo di un insieme di numeri reali 11
10. Assioma di completezza 13
11. Esercizi 14

Capitolo 4. Il principio di Induzione 15
1. La disuguaglianza di Bernoulli e altri casi 15
2. Medie 18
3. Disuguaglianza di Young per esponenti razionali 19
4. Formula del binomio 19
5. Esercizi 20

Capitolo 5. Esempi di funzioni 21
1. Funzione composta 21
2. Funzione inversa 22
3. Funzione finestra 22
4. Le funzioni trigonometriche 23
5. Il modulo di x 24
6. Funzione potenze, radici e esponenziali 24
7. La funzione esponenziale 25
8. Logaritmi e proprietà dei logaritmi in base 2 25
9. Funzioni trigonometriche inverse 26
10. Esercizi 28
11. Esercizi 28

Capitolo 6. Successioni 29
1. Successioni limitate 29
2. Successioni monotone 29
3. Successioni divergenti positivamente e negativamente 32
4. Successione non regolare 34
5. Permanenza del segno per successioni 34
6. Calcolo di limiti 35
7. Il teorema fondamentale sulle successioni monotone 35

Capitolo 7. Il numero di Nepero 37
1. introduzione al numero di Nepero 37
2. Le buste e le lettere 40
3. Logaritmi e proprietà dei logaritmi in base neperiana 40
4. Applicazione della formula del binomio al calcolo di limiti 41
5. Un teorema di Cesaro 41
6. Esercizi 41

Capitolo 8. Serie 43
1. Serie geometrica 43
2. Insieme di Cantor 44
3. Serie armonica 45
4. Serie armonica generalizzata 47
5. Convergenza assoluta 51
6. Esercizi 53

Capitolo 9. I numeri complessi 55
1. L'unita immaginaria: il numero i 55
2. Forma algebrica dei numeri complessi 55
3. Argomento principale 57
4. Prodotto 58
5. Forma esponenziale di un numero complesso 58
6. Formule di Eulero 58
7. Radici n–sime di un numero complesso 59
8. La formula del Binomio e la Formula di Eulero 60
9. Principio di identità dei polinomi 62
10. Esercizi 62

Capitolo 10. Limiti 65
1. Sulla definizione 65
2. Simbolo di Landau: o piccolo 67

Capitolo 11. Continuità e Derivabilità 69
1. Continuità 69
2. Minimo e massimo assoluti per funzioni continue 69
3. Teorema degli zeri 69
4. Il teorema dei valori intermedi 69
5. Rapporti incrementali. 70
6. Derivabilità 71
7. La derivata e la formula di Eulero 73
8. Minimi e massimi interni per funzioni derivabili:Teorema di

Fermat 73
9. Teorema di Rolle e Lagrange 74
10. Monotonia: crescenza e descrescenza) 74
11. Concavità e Convessità 75
12. Teorema di De l'Hopital 76
13. Lo sviluppo di Mac Laurin 77
14. La formula di Taylor 78
15. Serie di Taylor 80
16. Formula di Stirling 81
17. Esercizi 83

Capitolo 12. Integrale 85
1. Calcolo dell'area 85
2. Definizione di integrale 86
3. Proprietà dell'integrale 87
4. Primitive 88
5. Integrale Indefinito 90
6. Integrazione per sostituzione 90
7. Integrazione per parti 90
8. Resto Integrale e di Lagrange 90
9. Trascendenza di e 92
10. Esercizi 94

Capitolo 13. Studio di funzioni 101
1. Studio di funzioni 101
2. Grafici di funzioni elementari 101
3. La funzione esponenziale 103
4. La Funzione logaritmo 104
5. La funzione seno cardinale 104
6. Esercizi 106
7. Derivate parziali prime e seconde 118
8. Massimi e minimi interni per funzioni C^2 119
9. Esercizi 120

Capitolo 14. Cenni sulle equazioni differenziali ordinarie 121
1. Introduzione 121
2. Equazioni del primo ordine omogenee: formula risolutiva 122
3. Equazioni del primo ordine : formula risolutiva 122
4. Equazioni del secondo ordine omogenee a coefficienti costanti 122
5. Equazioni del secondo ordine non omogenee a coefficienti costanti:alcuni casi 123

Capitolo 15. Esercizi di Ricapitolazione 125
Esercizio 1 125
Esercizio 2 125
Esercizio 3 125
Esercizio 4 125
Domanda 1 125
Domanda 2 126
1. Esercizi teorici 127

Capitolo 16. Conclusione 129

CAPITOLO 1

Introduzione

Queste note hanno come protagonista il numero e. Pur non tralasciando gli argomenti di base, si è cercato di utilizzare gli argomenti svolti per mettere in luce le molte proprietà del numero e. Abbiamo finalizzato le nostre conoscenze via via maggiori per cogliere aspetti di questo numero. Durante il percorso, abbiamo studiato la formula matematica

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

nota come l'identità di Eulero. L' Identità di Eulero è considerata la più bella formula della matematica. In questa formula interagiscono in modo conciso e non banale l'uguaglianza, la moltiplicazione, l'addizione, il numero 1 (elemento neutro della moltiplicazione), il numero 0 (elemento neutro della somma), π (rapporto tra la circonferenza e il diametro di un cerchio), e base naturale dei logaritmi, il numero complesso i unità immaginaria ($i^2 = -1$), Per fare ciò studieremo, oltre al numero e le operazioni in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{C}$, i numeri 0,1 e i, il numero π.

Il numero e è la base dei logaritmi naturali, trovati da John Napier.

$$e \approx 2.718281828459045235360287471352 7.....$$

La lettera greca π, che sta ad indicare la prima lettera greca della parola periphèria (circonferenza) è usata per rappresentare il numero π. Il suo studio parte dall'antichità, il primo accenno alla rettificazione della circonferenza si trova addirittura nella Bibbia. Il problema della quadratura del cerchio si ritrova nel Papyrus Rhind, attribuito ad Ahmose (circa 2000 a.C., Egitto), in cui vengono individuate due cifre corrette, per arrivare all'opera di Archimede *Misura del cerchio* in cui viene fornita un'approssimazione per difetto e per eccesso, consentendo quindi una precisione accurata del calcolo di π. Il risultato ottenuto approssimando il cerchio, dall'interno con poligoni regolari inscritti e dall'esterno con poligoni regolari circoscritti. Dopo il lavoro di Archimede altre scoperte sul numero π sono dovute a J. H. Lambert che prova nel 1768 l'irrazionalità di π, e a F. von Lindemann che nel 1882 ne dimostra la trascendenza.

Domanda: Chi è più grande tra e^{π} e π^{e}? (Dimostrare)

Riferimento bibliografico: Ivan Niven The Two-Year College Mathematics Journal, Vol. 3, No. 2. (Autumn, 1972), pp. 13-15. La soluzione è alla fine del testo.

Il testo è stato scritto per gli studenti della Sapienza Università di Roma

Roma, Agosto 2013

Primi simboli $\exists$ esiste
$\forall$ per ogni
$\in$ appartiene
$\cup$ unione insiemistica
$\cap$ intersezione insiemistica
$\emptyset$ insieme vuoto
ϵ epsilon
δ delta
$\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali
$+\infty$ più infinito
$-\infty$ meno infinito
$\mathbb{R}$ Insieme dei numeri reali
$\mathbb{R}_+$ Insieme dei numeri reali positivi
$\mathbb{R}^*$ Insieme dei numeri reali con l'aggiunta di $-\infty$ e $+\infty$
$\mathbb{C}$ lnsieme dei numeri complessi
$\lim_{n\to+\infty} a_n$ limite di a_n per n che tende a più infinito
$y = \log_a x$ si legge y è il logaritmo in base a di x
$\exists!$ esiste ed è unico
$m|n$ ossia m divide n
$a \equiv b \mod n$ ossia a e b sono congrui modulo n , cio $a - b$ è un multiplo di n

0.1. Costanti fondamentali.

$$e \approx 2.71828182845904523536028747135 27$$

$$\pi \approx 3,14159265358979323846264338327 9$$

Nomi che associeremo a formule e teoremi: Nepero, Archimede, Weierstrass, De Moivre, Fermat, Leibniz, Newton, Lagrange, Rolle, de l'Hopital, Dirichlet, Riemann.

CAPITOLO 2

Prime nozioni:Lezioni 30-09-2013

1. Alcune lettere dell'alfabeto greco minuscolo di frequente uso

- α (alpha)
- β (beta)
- δ (delta)
- ϵ (epsilon)
- η(eta)
- θ (teta)
- λ (lambda)
- μ (mu)
- ω(omega)
- ρ(ro)
- ξ(xi)

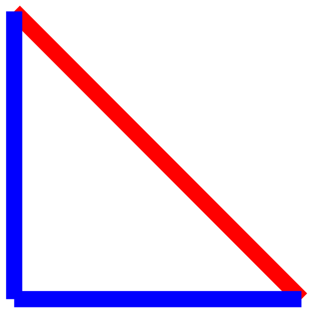
Esercizio 1.1. *Utile informazione*

$$\Pi\alpha\omega\lambda\alpha \quad \Lambda\omega\rho\epsilon\tau\iota \qquad tel.(7)^2 - (90 + e^{i\pi}\sin(\frac{3}{2}\pi)) - 6799$$

2. Alcuni numeri

$$0$$
$$1$$
$$i$$
$$\sqrt{2} \approx 1.41421$$
$$\pi \approx 3.14159$$
$$e \approx 2.71828$$

$$0 < 1 < \sqrt{2} < e < \pi$$

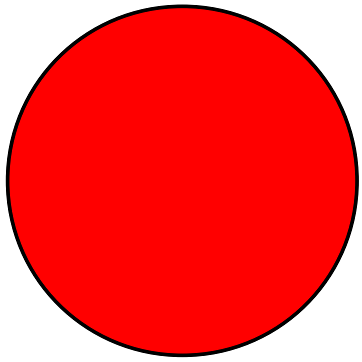


1.

e l'unità immaginaria i? ($i^2 = -1$) non possiamo confrontarla
$\sqrt{2}$ costante di Pitagora (Samo 570 a.C.- Metaponto 495 a.C.)

$$C = 2\pi r \qquad A = \pi r^2 \qquad V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

π costante di Archimede (287 a.C.-212 a.C., Siracusa)



e costante di Nepero (John Napier 1550-1617)
i notazione introdotta da Gauss 1777-1855

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Un altro problema noto nell'antichità è la duplicazione del cubo. Da una lettera di Eratostene al re Tolomeo III: mettendo in scena re Minosse alla visione del sepolcro di re Glauco di forma cubica (lato l) richiese di rendere doppio il sepolcro di volume v.

Raddoppiando il lato il sepolcro sarebbe stato otto volte più grande.

$$L = \sqrt[3]{2}l \qquad V = (\sqrt[3]{2}l)^3 = 2v$$

Osserviamo

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}.$$

3. I numeri irrazionali

Ci sono numeri reali che non appartengono all'insieme $\mathbb{Q}$. Sono i numeri irrazionali. Un numero irrazionale è quindi un numero reale che non può essere scritto come una frazione $\frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{Z}$, con $n \neq 0$. Alcuni numeri irrazionali sono numeri irrazionali algebrici come la radice quadrata di due e gli irrazionali algebrici sono radici di equazioni algebriche a coefficienti interi (esempio la la radice quadrata di due è soluzione di $x^2 - 2 = 0$), altri sono numeri irrazionali trascendenti come e,π e gli irrazionali trascendenti non sono radici di equazioni algebriche a coefficienti interi. I numeri trascendenti furono per la prima volta distinti dagli irrazionali algebrici da Kronecker.

Lemma 3.1. *Se m^2 pari allora m è pari*

DIMOSTRAZIONE. Se m fosse dispari $m = 2k+1$, $k \in$ allora $m^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ risulterebbe dispari contro l'ipotesi. □

Proposizione 1. *Il numero $\sqrt{2}$ non è un numero razionale.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $\sqrt{2}$ sia un numero razionale. Allora esistono due interi m e n privi di fattori comuni eccetto l'unità, tali che $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Elevando al quadrato si ha

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad m^2 = 2n^2$$

Questo implica che m^2 pari, e che quindi m è pari, ossia esiste k intero tale che $m = 2k$. Sostituendo a $m^2 = 2n^2$abbiamo che anche n è pari, e quindi m e n hanno in comune un fattore 2, il che impossibile perchè abbiamo assunto m e n privi di fattori comuni. Abbiamo ottenuto una contraddizione con l'ipotesi. □

4. Insiemi

A e B due insiemi di un insieme ambiente S. Con $\emptyset$ si denota l'insieme vuoto

$\cup$ unione insiemistica

$$A \cup B = \{x : x \in A \,\mathrm{o}\, \mathrm{x} \in \mathrm{B}\}$$

- Per ogni A, B
$$A \cup B = B \cup A$$
- Per ogni A, B, C
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
- $\emptyset$ tale che per ogni A si ha
$$A \cup \emptyset = A$$

$\cap$ intersezione insiemistica

$$A \cap B = \{x : x \in A \,\mathrm{e}\, \mathrm{x} \in \mathrm{B}\}$$

- Per ogni A, B
$$A \cap B = B \cap A$$
- Per ogni A, B, C
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$
- $\emptyset$ tale che per ogni A

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

Esercizio 4.1. *Sia* $A = \{\ \beta,\ \delta,\ \epsilon,\ \eta,\ \theta,\ \lambda,\ \mu,\ \omega,\ \rho,\ \xi\ \}$ *e*
$B = \{\alpha\}$
Trovare $A \cap B$ *e* $A \cup B$.

Per l'insieme dei numeri naturali si trova in letteratura la notazione

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

e

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

oppure

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}.$$

Questa modalità descrive l'insieme tramite gli elementi che lo compongono, non è importante l'ordine in cui gli elementi vengono elencati.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z},$$

perchè ogni numero naturale è anche un intero (non essendo vero il viceversa). L'insieme dei numeri razionali è descritto tramite la proprietà che i suoi elementi devono soddisfare

$$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \,\text{con}\, m, n \in \mathbb{Z}, \,\text{con}\, n \neq 0\}$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

$$7 \in \mathbb{N},\ -1 \in \mathbb{Z},\ 0.9 \in \mathbb{Q},\ \frac{7}{9} \in \mathbb{Q}$$

.

Due insiemi A e B sono uguali quando si verifica

$$A = B \iff A \subseteq B,\, B \subseteq A$$

.

L'insieme vuoto ha la proprietà di essere contenuto in ogni insieme. Grazie alla definizione precedente (detto principio di doppia inclusione) possiamo dedurre l'unicità di un insieme cosi fatto. Infatti supponiamo che ne esistano due

$$\emptyset,\ \tilde{\emptyset},$$

allora

$$\emptyset \subseteq \tilde{\emptyset},\quad \tilde{\emptyset} \subseteq \emptyset,$$

ottenendo

$$\emptyset = \tilde{\emptyset}.$$

.

Osservazione 1.

$$A \subseteq A \cup B$$
$$A \cap B \subseteq A$$

5. Insieme delle parti

Se l'insieme A ha N elementi, possiamo considerare l'insieme costituito da tutti e e solo i sottoinsiemi di A:

$$A = \{1, 2\}$$
$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, A, \{1\}, \{2\}\}$$

Quanti sono gli elementi di $\mathcal{P}(A)$ se A ha N elementi?

CAPITOLO 3

Le proprietà dei numeri reali

1. Proprietà algebriche

Si indica con $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali. In $\mathbb{R}$ sono definite le operazioni di *Addizione* e *Moltiplicazione* ed una *relazione d'ordine totale* $\leq$ (minore o uguale) con le seguenti proprietà

(1) Per ogni coppia di numeri reali a, b si ha

$$a + b = b + a$$

(proprietà commutativa dell'Addizione)

(2) Per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ si ha

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

(proprietà associativa dell'Addizione)

(3) Esiste ed è unico l'elemento 0 (zero) tale che per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$0 + a = a + 0 = a.$$

(esistenza dell'elemento neutro rispetto all'Addizione)

(4) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ esiste un unico simmetrico rispetto all'Addizione, detto anche opposto, $-a \in \mathbb{R}$ tale che

$$a + (-a) = 0$$

(5) Per ogni coppia di numeri reali a, b si ha

$$a \cdot b = b \cdot a$$

(proprietà commutativa della Moltiplicazione)

(6) Per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ si ha

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

(proprietà associativa della Moltiplicazione)

(7) Esiste ed è unico l'elemento 1 (uno),diverso da 0, tale che per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a.$$

(esistenza dell'elemento neutro rispetto alla Moltiplicazione)

(8) Per ogni $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ esiste un unico simmetrico rispetto alla Moltiplicazione, detto l'inverso o il reciproco di a, indicato con a^{-1} o con $1/a$ tale che

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$$

(9) Per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ si ha

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

(proprietà distributiva della Moltiplicazione rispetto all'Addizione)

Si indica con $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri $1, 2, \ldots,$ Si indica con $\mathbb{Z}$ (insieme degli interi) l'insieme dei numeri naturali unito con i loro opposti e lo 0. L'insieme $\mathbb{Q}$ è l'insieme delle frazioni di interi. Un generico elemento in Q è del tipo $\frac{m}{n}$, , con $n \neq 0$. Le proprietà algebriche descritte prima in (3) valgono in $\mathbb{Q}$. Come conseguenza dell'operazione di moltiplicazione in $\mathbb{R}$ è definita l'operazione **potenza**

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ volte}} \quad \forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

con le proprietà seguenti

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Dato un numero reale $a \geq 0$ esiste ed è univocamente determinato il numero b **radice aritmetica** n-esima di a definita come

$$b = a^{1/n} \iff b^n = a$$

Ricordiamo che $+\infty$ e $-\infty$ **non** sono numeri reali.

Esercizio 1.1. *Vale la* legge di cancellazione dell'addizione

$$a + b = a + c \implies b = c$$

$$b = b + 0 = b + a - a = a + b - a = a + c - a = a - a + c = 0 + c = c$$

Esercizio 1.2. *Vale* l'unicità dell'opposto .
Supponiamo che esistano due opposti $a + (-a) = 0, \qquad a + \alpha = 0$. *Allora*

$$a + (-a) = a + \alpha$$

Per la legge di cancellazione dell'addizione si ottiene $-a = \alpha$.

Esercizio 1.3.

$$[1]\, \forall a \in \mathbb{R}, \qquad a \cdot 0 = 0$$
$$[2]\, \forall a \in \mathbb{R}, \qquad -(-a) = a$$
$$[3]\, \forall a \in \mathbb{R}, \qquad (-1) \cdot a = -a$$

Dimostrazione. [1] $a + a0 = a1 + a0 = a(1 + 0) = a = a + 0$,
segue dalla legge di cancellazione dell'addizione.

[2] $a + (-a) = (-a) + a = 0$ $\;a$ è l'opposto di $-a$, ossia $a = -(-a)$. per l'unicità dell'opposto

[3] $(-1)a + a = [-1 + 1]a = 0a = 0$, quindi $(-1)a$ è l'opposto di a.

□

Esercizio 1.4. *Per ogni* a, $b \in \mathbb{R}$

$$ab = 0 \iff a = 0 \,\text{oppure}\, b = 0$$

DIMOSTRAZIONE. Se $a = 0$ oppure $b = 0$ si ha $a0 = 0$ per quanto precedentemente dimostrato. Se $ab = 0$ allora se $a = 0$ l'asserto è vero, se $a \neq 0$ allora $\exists a^{-1}$ tale che $aa^{-1} = 1$. Allora

$$b = b1 = b(aa^{-1}) = (ba)a^{-1} = aba^{-1} = 0a^{-1} = 0,$$

ossia $b = 0$. □

2. Ordinamento

La relazione $\leq$ è di ordine totale in $\mathbb{R}$ ossia, comunque si considerino due numeri reali a, b necessariamente deve aversi $a \leq b$ oppure $b \leq a$ e sono vere entrambe se e solo se $a = b$.
Inoltre tale relazione $\leq$ è compatibile con le operazioni nel senso precisato dalle proprietà : $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$

$$a \leq b \Longrightarrow a + c \leq b + c$$
$$0 \leq a \text{ e } 0 \leq b \Longrightarrow 0 \leq a + b, \quad 0 \leq a \cdot b$$

Notazione: $a < b \Longleftrightarrow a \leq b$ e $a \neq b$
Per ogni coppia di numeri reali $a, b \in \mathbb{R}$ vale una ed una sola delle seguenti relazioni

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b.$$

Ricordiamo che una disequazione può essere portata a una disequazione equivalente (ossia che ammette le stesse soluzioni)

- aggiungendo al primo e secondo membro uno stesso numero reale senza toccare il verso della disuguaglianza.
- moltiplicando primo e secondo membro per uno stesso numero reale **positivo** (i.e. > 0) senza toccare il verso della disuguaglianza.
- moltiplicando primo e secondo membro per uno stesso numero reale **negativo** (i.e. < 0) **cambiando** il verso della disuguaglianza

I numeri reali possono essere pensati come punti su una retta. I numeri corrispondenti agli interi sono ugualmente spaziati. La distanza tra due interi consecutivi è pari a 1. La distanza tra due numeri naturali pari consecutivi è pari a 2. La distanza tra due reali consecutivi $x_n = \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$ come si comporta asintoticamente per n grande?

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

(diventa sempre più piccolo).

La distanza tra due naturali consecutivi $x_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$ come si comporta asintoticamente per n grande?

$$x_{n+1} - x_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$$

(diventa sempre più grande)

La distanza tra due reali consecutivi $x_n = \sqrt{n^2 + 1}$, $n \in \mathbb{N}$ come si comporta asintoticamente per n grande?

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{(n+1)^2+1} - \sqrt{n^2+1} =$$
$$\frac{2n}{\sqrt{(n+1)^2+1} + \sqrt{n^2+1}}$$

Osserviamo

$$\sqrt{(n+1)^2+1} = \sqrt{n^2(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})} = n\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

$$\sqrt{n^2+1} = \sqrt{n^2(1+\frac{1}{n^2})} = n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}$$

$$\sqrt{(n+1)^2+1} + \sqrt{n^2+1} = n[\sqrt{(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}] \approx 2n$$

In definitiva

$$\sqrt{(n+1)^2+1} - \sqrt{n^2+1} \approx 1$$

Osservazione 2. *Oscillazioni*

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \qquad a_n = (-1)^n$$

Confrontiamo il grafico di a_n con il grafico delle funzioni seno e coseno.

$$I(x_0, \delta) = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\},$$

Definizione 2.1. *Un punto x_0 è punto di accumulazione per l'insieme X se in un qualsiasi intorno del punto x_0 cade almeno un punto appartenente all'insieme I diverso da x_0.*

Esercizio 2.2. *Mostrare che $x = 0$ è un punto di accumulazione per*

$$X = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n} \ \ n \in \mathbb{N}\}$$

Osservazione 3. *Riflettiamo sulla dimostrazione*

$$x \in \mathbb{Q}, \iff \exists m, n \in \mathbb{Z}\, x = \frac{m}{n}, \ n \neq 0$$

Cosa vuol dire negare $x \in \mathbb{Q}$?

$$x \notin \mathbb{Q}, \iff \forall m, n \in \mathbb{Z}\, x \neq \frac{m}{n}, \ n \neq 0$$

3. Minimo e massimo tra due numeri reali

Ricordiamo che l'operazione $\min\{a, b\}$ ̀definisce il più piccolo numero tra a e b, ossia

$$\min\{a, b\} = \begin{cases} a, & \text{se } a \leq b \\ b. & \text{altrimenti} \end{cases}$$

L'operazione $\max\{a, b\}$ ̀definisce il più più grande numero tra a e b, mentre

$$\max\{a, b\} = \begin{cases} a, & \text{se } a \geq b \\ b. & \text{altrimenti} \end{cases}$$

3.1. Gli intervalli di $\mathbb{R}$.

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R}\ a \leq x \leq b\}$$
$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R}\ a < x < b\}$$
$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R}\ a < x \leq b\}$$
$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R}\ a \leq x < b\}$$

4. Topologia in $\mathbb{R}$

Un intorno di un punto x_0 si scrive

$$I(x_0, \delta) = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\},$$

$\delta > 0$ rappresenta la semiampiezza dell'intorno.

In generale tratteremo insiemi semplici di $\mathbb{R}$ come semplici unione e semplici interserzioni di intervalli. Occorre tener presente che i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ possono avere proprietà piu' complicate. (vedere la sezione (2)).

Esercizi su unione e intersezione di intervalli.

5. Il simbolo di somma e prodotto

La sommatoria è un simbolo matematico che indica la somma di un certo insieme di numeri. Si usa la lettera $\sum$. Si deve indicare l'intervallo di valori dove la somma ha luogo ossia il valore inferiore e superiore dell'indice della somma; alla destra del simbolo $\sum$ vi e' un' espressione algebrica che in generale dipende dall'indice di sommatoria. Sia $k_0 \leq k \leq k_1$ allora

$$a_{k_0} + \cdots + a_{k_1} = \sum_{k=k_0}^{k_1} a_k.$$

Fissiamo $k_0 = 1, k_1 = N$. Si ha

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_N = \sum_{k=1}^{N} a_k$$

Valgono le seguenti regole

- $$\sum_{k=1}^{N} a_k = \sum_{j=1}^{N} a_j$$
- $$\sum_{k=1}^{N} a_k + \sum_{k=1}^{N} b_k = \sum_{k=1}^{N} (a_k + b_k)$$
  $$\sum_{k=1}^{N} c a_k = c \sum_{k=1}^{N} a_k, \qquad c \in \mathbb{R}$$
- Per $1 \leq J \leq N$
  $$\sum_{k=1}^{J} a_k + \sum_{k=J+1}^{N} a_k = \sum_{k=1}^{N} a_k$$

- Per $p \in \mathbb{N}$
$$\sum_{k=1}^{N} a_k = \sum_{K=p+1}^{N+p} a_{K-p}$$
-
$$\sum_{k=1}^{N} 1 = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{N \text{ volte}} = N$$

Esercizio 5.1. *Vero o falso*
$$\sum_{k=1}^{N} a_{k-1} = \sum_{k=2}^{N+1} a_k$$
Vero o falso
$$\sum_{k=1}^{N} a_{k-1} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k$$
Vero o falso
$$\sum_{k=1}^{N} a_{k+1} = \sum_{k=1}^{N} a_k$$

La produttoria è un simbolo matematico che indica il prodotto di un certo insieme di numeri. Si usa la lettera $\prod$. Si deve indicare l'intervallo di valori dove la produttoria ha luogo ossia il valore inferiore e superiore dell'indice della produttoria; alla destra del simbolo $\prod$ vi è un'espressione algebrica che in generale dipende dall'indice di produttoria
$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_N = \prod_{k=1}^{N} a_k$$

6. Esercizi

Insiemi di definizione delle funzioni
$$f(x) = \sqrt{x-3}$$
$$f(x) = \sqrt{x^2-9x}$$
$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{x+1}}$$
$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$$
$$f(x) = \sqrt{x^2-3x+2}$$
$$f(x) = \sqrt[3]{x^2-9x}$$
Semplificare le espressioni
$$\sqrt[4]{81} \qquad \sqrt[4]{x^2+2x+1} \qquad \sqrt{16}$$

7. Altri esempi di strutture

Consideriamo $\mathbb{R}_{\min} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ con le operazioni

$$\oplus := \min, \qquad \odot := +$$

dove

$$\mathbf{0} = +\infty, \qquad \mathbf{1} = 0.$$

Per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}_{\min}$

$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c); \qquad (a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c);$$

$$a \oplus b = b \oplus a; \qquad a \odot b = b \odot a$$
$$\mathbf{0} \oplus a = a \oplus \mathbf{0} = a; \qquad \mathbf{1} \odot a = a \odot \mathbf{1} = a;$$

$$a \oplus \mathbf{0} = a; \quad a \odot \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

$$a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c).$$

Vale la proprietà di idempotenza

$$a \oplus a = a.$$

TABELLA 1. Tabellina $\oplus$

$\oplus$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3	3	3	3
4	1	2	3	4	4	4	4	4	4
5	1	2	3	4	5	5	5	5	5
6	1	2	3	4	5	6	6	6	6
7	1	2	3	4	5	6	7	7	7
8	1	2	3	4	5	6	7	8	8
9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

TABELLA 2. Tabellina $\odot$

$\odot$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Verificare che nella struttura $\mathbb{R}_{\min} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ con l' operazione

$$\oplus := \min$$

vale il cosidetto **freshman's dream**

$$(a \oplus b)^3 = a^3 \oplus b^3$$

8. Parte intera

Possiamo considerare l'applicazione $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ che associa la parte intera,

$$\lfloor x \rfloor = \text{il più grande intero } \leq x,$$

e la parte intera superiore

$$\lceil x \rceil = \text{ il più piccolo intero } \geq x$$

Valori di $\lfloor x \rfloor$ e $\lceil x \rceil$

$$\lfloor 0 \rfloor = 0 \quad \lfloor 1/2 \rfloor = 0 \quad \lfloor -3.7 \rfloor = -4$$
$$\lceil 0 \rceil = 0 \quad \lceil 1/2 \rceil = 1 \quad \lceil -3.7 \rceil = -3$$

Valgono le proprietà

- $$\lfloor \lfloor x \rfloor \rfloor = \lfloor x \rfloor \text{ idempotenza}$$
- $$\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor \ \forall x \in \mathbb{R}$$
- $$\lceil k/2 \rceil + \lfloor k/2 \rfloor = k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

8.1. La mantissa di x.

Dato $x \in \mathbb{R}$

$$x = \lfloor x \rfloor + \underbrace{(x - \lfloor x \rfloor)}_{\text{mantissa}},$$

ossia x è la somma della sua parte intera e della parte decimale. Disegnare il grafico di

$$f(x) = x - \lfloor x \rfloor$$

Osservazione 4. *Ricordare, nelle operazioni consuete,*

$$(a+b)^2,\ (a-b)^2, (a+b)^3,\ (a-b)^3,\ (a^3-b^3),\ (a^3+b^3)$$

9. Minimo e massimo di un insieme di numeri reali

Dato un insieme X di numeri reali un numero reale m è un minorante per X se

$$\forall x \in X \ \ x \geq m.$$

Se l'insieme X ha un minorante, X si dice inferiormente limitato.
Dato un insieme X di numeri reali un numero reale M è un maggiorante per X se

$$\forall x \in X \ \ x \leq M.$$

Se l'insieme X ha un maggiorante, X si dice superiormente limitato.
Un insieme inferiormente e superiormente limitato si dice limitato.

Esempio 9.1.

- *L'insieme*

  $$X = \{x = (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

  è inferiormente e superiormente limitato. L'insieme dei minoranti è dato da

  $$X_m = \{x \in \mathbb{R},\ x \leq -1\}$$

  L'insieme dei maggioranti è dato da

  $$X_M = \{x \in \mathbb{R},\ x \geq 1\}.$$

- *X può essere non limitato sia superiormente che inferiormente*
$$X = \{x = (-1)^n n,\ n \in \mathbb{N}\}$$
- *X può essere non limitato superiormente*
$$X = \{x = n,\ \ n \in \mathbb{N}\}$$
L'insieme dei minoranti è dato da
$$X_m = \{x \in \mathbb{R},\ x \leq 1\}$$
- *X può essere non limitato inferiormente*
$$X = \{x = -n,\ \ n \in \mathbb{N}\}$$
L'insieme dei maggioranti è dato da
$$X_M = \{x \in \mathbb{R},\ x \geq -1\}.$$

Se il numero più grande dei minoranti appartiene all'insieme, tale numero è il minimo dell'insieme.Se il numero più piccolo dei maggioranti appartiene all'insieme,tale numero è il massimo dell'insieme. L'insieme
$$X = \{x = (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}\}$$
ha come insieme dei minoranti
$$X_m = \{x \in \mathbb{R},\ x \leq -1\},$$
il cui massimo è è -1 (minimo dell'insieme X), mentre l'insieme dei maggioranti è dato da
$$X_M = \{x \in \mathbb{R},\ x \geq 1\},$$
il cui minimo è 1 (massimo dell'insieme X). Se esistono, il minimo e il massimo o appartengono all'insieme: puo' accadere che l'insieme non ammetta massimo o minimo. Ad esempio
$$X = \{x = \frac{1}{n},\ \ n \in \mathbb{N}\},$$
non ammette minimo. L'insieme dei minoranti
$$X_m = \{x \in \mathbb{R},\ x \leq 0\},$$
ammette però massimo. Il numero 0 non è il minimo di X. È l'estremo inferiore dell'insieme X. Analogamente
$$X = \{x = -\frac{1}{n},\ \ n \in \mathbb{N}\},$$
non ammette massimo. L'insieme dei maggioranti
$$X_M = \{x \in \mathbb{R},\ x \geq 0\},$$
ammette però minimo. Il numero 0 non è il massimo di X. È l'estremo superiore dell'insieme X.

M é l'estremo superiore dell'insieme X ossia M è il minimo dei maggioranti dell'insieme X.

m é l'estremo inferiore dell'insieme X ossia m è il massimo dei minoranti dell'insieme X.

Proposizione 2. *Non esiste $c \in Q$ elemento separatore degli insiemi*

$$Y = \{q \in \mathbb{Q}\ q > 0, q^2 > 2\}$$
$$X = \{q \in \mathbb{Q}\ q < 0\} \cup \{q \geq 0,\ q^2 \leq 2\}.$$

Dimostrazione. Dovrà risultare

$$x \leq c \leq y,\ \forall x \in X, \forall y \in Y$$

Se $c \in X$, sia $c > 0$ allora $c^2 \neq 2$ (per quanto precedentemente dimostrato), e dovrà risultare $c^2 < 2$.

Si ha per $N \in \mathbb{N}$ e

$$N > \frac{2c+1}{2-c^2},$$

allora

$$c + \frac{1}{N} \in X.$$

Infatti $c + \frac{1}{N} \in \mathbb{Q}$ e

$$\big(c + \frac{1}{N}\big)^2 = c^2 + \frac{1}{N^2} + \frac{2c}{N} < 2.$$

Abbiamo trovato un elemento di X maggiore di c, contro l'ipotesi

$$x \leq c,\ \forall x \in X$$

□

Esercizio 9.2. *Svolgere il caso $c \in Y$.*

10. Assioma di completezza

Siano A e B due insiemi non vuoti di numeri reali con $a \leq b\ \forall a \in A$, $\forall b \in B$. Allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $a \leq c \leq b\ \forall a \in A$, $\forall b \in B$

Teorema 10.1. *Ogni insieme X di numeri reali che non sia vuoto e che sia limitato superiormente possiede un estremo superiore.*

Dimostrazione. Indichiamo con Y l'insieme dei maggioranti di X. $Y \neq \emptyset$. Applichiamo l'assioma di completezza. Esiste M reale tale che

$$x \leq M \leq y,\ \forall x \in X, \forall y \in Y$$

M è un maggiorante di X ossia $M \in Y$, ed è minore di tutti gli elementi di Y. Quindi M è il minimo dei maggioranti. □

Analogamente

Teorema 10.2. *Ogni insieme X di numeri reali che sia non vuoto e inferiormente limitato possiede un estremo inferiore.*

Per ogni insieme numerico X non limitato superiormente si pone

$$\sup X = +\infty$$

Tali insiemi sono caratterizzati dalla proprietà seguente

$$\forall M \in \mathbf{R}, \quad \exists\, x_1 \in X \text{ t.c. } x_1 > M.$$

In modo analogo, se X non è limitato inferiormente allora non ha minoranti. Cioè, comunque si consideri un numero reale m, esiste un elemento in X minore di m.

Per ogni insieme numerico X non limitato inferiormente si pone

$$\inf X = -\infty$$

Tali insiemi sono caratterizzati dalla proprietà

$$\forall m \in \mathbb{R}, \quad \exists x_2 \in X \text{ t.c. } x_2 < m.$$

11. Esercizi

Esercizio 11.1. *Dimostrare*

$$\begin{aligned}
&\forall a, b \in \mathbb{R}, \qquad -(a+b) = (-a) + (-b) \\
&\forall a, b \in \mathbb{R}, \qquad (-a) \cdot b = -(a \cdot b) \\
&\forall a, b \in \mathbb{R}, \qquad (-a) \cdot (-b) = a \cdot b \\
&\forall a, b \in \mathbb{R}, \qquad a \cdot b = 0 \ \textit{e} \ a \neq 0 \Longrightarrow b = 0 \\
&\forall a, b \in \mathbb{R}, \qquad a \cdot b = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \ \textit{oppure} \ b = 0
\end{aligned}$$

Esercizio 11.2. *Vero o falso*

$\boxed{V}$ $\boxed{F}$ $\sqrt{a^2} = a \ \forall a \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$ $-1 \in \mathbb{N}$

$\boxed{V}$ $\boxed{F}$ $\pi \in \mathbb{Q}$ $\qquad$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$ $[0, 5] \subset [1, 6]$

Esercizio 11.3. *Quale è vera?*

$\boxed{a}$ $\sqrt{a} = a$ *non ammette soluzione in* $\mathbb{R}$ $\qquad$ $\boxed{b}$ $a^2 = b^2 \iff a = b$

$\boxed{c}$ $0,\overline{3} \in \mathbb{Q}$ $\qquad$ $\boxed{d}$ *un numero naturale è anche razionale*

Esercizio 11.4. *Quale è vera?*

$\boxed{a}$ $\max\{a, b\} > \min\{a, b\} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

$\boxed{b}$ $\max\{a, b\} \geq \min\{a, b\} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

$\boxed{c}$ *un numero reale al quadrato è sempre* > 0.

CAPITOLO 4

Il principio di Induzione

In *Arithmetices principia* Peano introduce i numeri naturali $\mathbb{N}$ dando le seguenti regole

- 1 è un numero $\in \mathbb{N}$,
- Il successivo di un numero $\in \mathbb{N}$ è un numero $\in \mathbb{N}$,
- 1 non è successivo di nessun numero $\in \mathbb{N}$,
- se i successivi di due numeri $\in \mathbb{N}$ sono uguali, anche i due numeri sono uguali,
- Se un insieme A contiene il numero 1 e il successivo di ogni suo elemento, allora $A = \mathbb{N}$,

Gli assiomi riguardano l' operazione del passaggio da un numero naturale al suo successivo, l'ultimo dei quali particolarmente importante nel definire le operazioni in $\mathbb{N}$. Esso è il principio di induzione. Data una proposizione $\mathcal{P}(n)$, con $\mathcal{P}(1)$ vera se **dall'assumere** $\mathcal{P}(n)$ **vera** (ipotesi induttiva), risulterà $\mathcal{P}(n+1)$ vera, allora la proposizione sarà vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

0.0.1. *La somma dei primi n numeri naturali e la somma dei loro quadrati.*

Proposizione 3.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Dimostare come esercizio

1. La disuguaglianza di Bernoulli e altri casi

Spesso alla base di dimostrazioni di teoremi, la disuguaglianza di Bernoulli asserisce che

Proposizione 4.

$$(1+x)^n \geq 1 + nx, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ x \geq -1.$$

Dimostrazione. La disuguaglianza è verificata per $n = 1$. **Assumendo vera la disuguaglianza** *al passo n* si ha

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) \geq 1 + (n+1)x.$$

□

Esercizio 1.1. *Dimostrare al variare di $x \in \mathbb{R}$*

$$|x^n| = |x|^n,\ n \in \mathbb{N}$$

Esercizio 1.2. *Dimostrare, assumendo x_j distinti tra loro al variare di $j = 1, \dots,$*

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j\Big)^2 < n \sum_{j=1}^{n} x_j^2, \; n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

DIMOSTRAZIONE. La disuguaglianza è verificata per $n = 2$. **Assumendo vera la disuguaglianza** *al passo n* dobbiamo dimostare

$$\Big(\sum_{j=1}^{n+1} x_j\Big)^2 < (n+1) \sum_{j=1}^{n+1} x_j^2.$$

$$\Big(\sum_{j=1}^{n+1} x_j\Big)^2 = \Big(\sum_{j=1}^{n} x_j + x_{n+1}\Big)^2$$

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j\Big)^2 + x_{n+1}^2 + 2x_{n+1} \sum_{j=1}^{n} x_j <$$

$$n \sum_{j=1}^{n} x_j^2 + x_{n+1}^2 + 2x_{n+1} \sum_{j=1}^{n} x_j =$$

$$(n+1) \sum_{j=1}^{n} x_j^2 + n x_{n+1}^2 + x_{n+1}^2 - \underbrace{x_{n+1}^2 + \dots x_{n+1}^2}_{n \text{ volte}} - \sum_{j=1}^{n} x_j^2 + 2x_{n+1} \sum_{j=1}^{n} x_j =$$

$$(n+1) \sum_{j=1}^{n+1} x_j^2 - \Big(\sum_{j=1}^{n+1} \big(x_j - x_{n+1}\big)^2 < (n+1) \sum_{j=1}^{n+1} x_j^2.$$

□

1.0.2. *Disuguglianze.* Introduciamo il simbolo ! (fattoriale di n o n fattoriale): è un'applicazione di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ che agisce cos`ì

$$1! = 1, \qquad n! = n(n-1)!$$

Esempio :

$$5! = 5(4!) = 54(3!) = 543(2!) = 54321 = 120$$

Dimostriamo tramite il principio di induzione

$$n! \geq 2^{n-1}, \qquad \forall n \geq 1, n \in N$$

DIMOSTRAZIONE. Per $n = 1$ è verificata. **Assumendo vera la disuguaglianza** *al passo n* , si ha

$$(n+1)! = n!(n+1) \geq 2^{n-1}2 = 2^n$$

□

Dimostriamo tramite il principio di induzione

$$2^n > n, \qquad \forall n \geq 1, n \in N$$

DIMOSTRAZIONE. Per $n = 1$ è verificata. **Assumendo vera la disuguaglianza** *al passo n* , si ha

$$2^{n+1} = 2^n 2 > 2n \geq n+1.$$

□

Sia $a \geq 1$. Dimostrare che

$$\sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a-1}{n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

DIMOSTRAZIONE. Prendendo $x = \frac{a-1}{n}$, applichiamo la disuguaglianza di Bernoulli

$$\left(1 + \frac{a-1}{n}\right)^n \geq a,$$

passando alla radice $n$esima si ha il risultato. □

1.0.3. *Un altro caso.*

Proposizione 5. *Se il prodotto di n numeri reali e positivi è uguale ad 1, la loro somma risulta $\geq$ di n.*

DIMOSTRAZIONE. Il risultato è vero per $n = 1$.
Supponiamo che $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$ e $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$ e dimostriamo che se

$$x_1 x_2 \cdots x_n x_{n+1} = 1,$$

allora

$$x_1 + x_2 \cdots + x_n + x_{n+1} \geq n + 1.$$

Se

$$x_1 x_2 + \cdots + x_n x_{n+1} = 1,$$

allora

- tutti i fattori sono uguali. Quindi sono tutti uguali ad 1 e la loro somma vale $n + 1$, e il risultato è dimostrato.
  Se non,
- Esisterà almeno un fattore più piccolo di 1 ed un fattore più grande di 1.

Supponiamo

$$x_1 < 1, \qquad x_{n+1} > 1.$$

Poniamo

$$y_1 = x_1 x_{n+1},$$

abbiamo

$$y_1 x_2 \cdots x_n = 1,$$

possiamo dunque applicare il risultato assunto vero al passo n, ne segue

$$y_1 + x_2 \cdots + x_n \geq n,$$

ma

$$x_1 + x_2 \cdots x_n + x_{n+1} = (y_1 + x_2 \cdots x_n) + x_{n+1} - y_1 + x_1 \geq$$

$$n + 1 + x_{n+1} - y_1 + x_1 - 1 = n + 1 + x_{n+1} - x_1 x_{n+1} + x_1 - 1 =$$

$$n + 1 + (x_{n+1} - 1)(1 - x_1)$$

Poichè

$$(x_{n+1} - 1)(1 - x_1) \geq 0,$$

il risultato è dimostrato al passo $n + 1$. □

2. Medie

Teorema 2.1. *Siano dati $x_1, x_2, x_3, x_4 \dots x_n$, non negativi, $n \in \mathbb{N}$. La media geometrica M_g è il numero*

$$M_g := (x_1 x_2 x_3 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}.$$

La media aritmetica M_a è il numero

$$M_a := \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}.$$

Si ha

$$M_a \geq M_g.$$

Dimostrazione. Consideriamo $\frac{x_1}{M_g}, \dots, \frac{x_2}{M_g}, \frac{x_n}{M_g}$, allora la radice ennesima del prodotto vale 1 ossia $\frac{x_1}{M_g}\frac{x_2}{M_g} \cdots \frac{x_n}{M_g} = 1$, e per il risultato precedente $\frac{x_1}{M_g} + \frac{x_2}{M_g} + \frac{x_n}{M_g} \geq n$, ossia $M_a \geq M_g$. □

Diamo un'altra dimostrazione per induzione che fa uso della disuguaglianza di Bernoulli

Dimostrazione.

- Per $n = 1$ la disuguaglianza è vera risultando

$$x_1 = x_1$$

- Supponiamo che al passo $n-1$ risulti

$$M_g' = \sqrt[n-1]{\prod_{i=1}^{n-1} x_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i}{n-1} = M_a'$$

Si ha

$$M_a = \frac{(n-1)}{n} M_a' + \frac{x_n}{n} = \left(M_a' + \frac{(x_n - M_a')}{n} \right),$$

$$\frac{M_a}{M_a'} = \left(1 + \frac{x_n - M_a'}{M_a'} \frac{1}{n} \right), \qquad \left(\frac{M_a}{M_a'} \right)^n = \left(1 + \frac{x_n - M_a'}{M_a'} \frac{1}{n} \right)^n$$

Per applicare la disuguaglianza di Bernoulli dovrà risultare $-M_a' + x_n \geq -nM_a'$ ossia $(n-1)M_a' + x_n \geq 0$, che risulta verificata. Pertanto

$$\left(\frac{M_a}{M_a'} \right)^n \geq \left(1 + \frac{x_n - M_a'}{M_a'} \right) = \frac{x_n}{M_a'}$$

$$(M_a)^n \geq x_n (M_a')^{n-1},$$

e quindi per l'ipotesi induttiva

$$(M_a)^n \geq x_n (M_g')^{n-1} = x_1 \cdot x_2 \dots x_n = \prod_{i=1}^{n} x_i = (M_g)^n.$$

e la dimostrazione è completa □

3. Disuguaglianza di Young per esponenti razionali

Come applicazione della disuguaglianza tra la media aritmetica e geometrica dimostriamo la disuguaglianza di Young per esponenti razionali.

Definizione 3.1. *Dato $p > 1$, $p \in \mathbb{R}$ diciamo coniugato di p il numero reale q tale che*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Se $p = \frac{n}{m}$, $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$ il coniugato di p è dato da

$$q = \frac{n}{n-m}.$$

Teorema 3.2. *Disuguaglianza di Young (esponenti razionali): dati due numeri reali positivi x e y, e dati p, q numeri razionali verificanti $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, si ha*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

Dimostrazione. Dalla disuguaglianza sulle medie

$$(x_1 x_2 x_3 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

Fissiamo

$$x_1 = x_2 = \ldots x_m = x^p \qquad x_{m+1} = \ldots x_n = b^q$$

Fissiamo $p = \frac{n}{m}$ con $m < n$, segue che il coniugato di p è dato da $q = \frac{n}{n-m}$. allora

$$((x^p)^m (y^q)^{n-m})^{\frac{1}{n}} \leq \frac{mx^p + (n-m)y^q}{n}$$

$$((x^p)^{\frac{m}{n}} (y^q)^{\frac{n-m}{n}} \leq \frac{m}{n} x^p + \frac{n-m}{n} y^q,$$

segue allora la disuguaglianza. □

4. Formula del binomio

Definiamo

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Dimostrare per esercizio, per $1 \leq k \leq n$, ($0! = 1$, per convenzione.)

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

Applicare la formula precedente per costruire il triangolo di Tartaglia

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

Proposizione 6. *Dimostrare per induzione*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

per ogni coppia di numeri reali a e b.

DIMOSTRAZIONE. L'asserto è vero per $n = 1$. Assumendo vera la formula al passo n la dimostriamo al passo $n + 1$. Vogliamo dimostrare che

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.$$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) = \Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\Big)(a+b) =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} =$$

$$a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} =$$

$$a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} a^{n+1-j} b^j + b^{n+1} =$$

$$a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} =$$

$$a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + a^{n+1} + b^{n+1} =$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.$$

□

5. Esercizi

Esercizio 5.1. *Dimostrare*

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \qquad 0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}.$$

$$(\sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\sqrt{2}-1)^k,$$

Esercizio 5.2. *Dimostrare tramite il principio di induzione*

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$$

CAPITOLO 5

Esempi di funzioni

Dati due insiemi di numeri reali X e Y, f è una relazione che a ogni $x \in X$ (X=Dom(f) dominio di f) fa corrispondere un unico $y = f(x) \in Y$.

$$f : X \to Y,$$

$Im(f)$ Ì'insieme dei punti $y \in Y$, ottenuti come $y = f(x)$.

$$Im(f) = \{y \in Y : \exists x \in X : y = f(x)\}$$

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\}$$

La funzione si dice *suriettiva* se $Im(f) = Y$ e *iniettiva* se

$$\forall x_1, x_2 \in X \text{ si ha } x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

È importante associare alla funzione

- X l' insieme di definizione
- $Im(f)$ il codominio
- Il grafico

Osservazione 5. *Osserviamo che se $im(f)$ viene sostituito con un insieme più ampio, sostanzialmente la funzione non cambia. Talvolta il codominio viene lasciato imprecisato.*

Esercizio 0.3. *Calcolare dominio, codominio e disegnare $f(x) = |x|$, al variare di $x \in \mathbb{R}$. Calcolare dominio, codomio e disegnare $f(x) = \max\{-|x|, x\}$, al variare di $x \in \mathbb{R}$. Calcolare dominio, codomio e disegnare $f(x) = \max\{|x|, -x\}$, al variare di $x \in \mathbb{R}$.*

- Traslazioni in x. $y = f(x + k), k \in \mathbb{R}$, il grafico subisce una traslazione orizzontale, verso sinistra se $k > 0$, verso destra se $k < 0$.
- Traslazioni in y. $y = k + f(x), k \in \mathbb{R}$, il grafico subisce una traslazione verticale, verso l'alto se $k > 0$, verso il basso se $k < 0$.

1. Funzione composta

$f : X \to Y$, $g : Z \to W$ e supponiamo $Y \subset Z$. Per ogni $x \in X$, si ha $f(x) \in Y \subset Z$,

$g \circ f(x) = g(f(x)) = w \in W$.

$g \circ f$ si dice funzione composta mediante f e g. L'operazione di composizione non è commutativa, ed è generalmente diverso $f \circ g$ da $g \circ f$.

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f(x) = x^2 + 1$$

$$g(x) = x + 1$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = (x^2+1)+1 = x^2+2 \in \mathbb{N}$$
$$f \circ g(x) = f(g(x)) = (x+1)^2+1 = x^2+2+2x \in \mathbb{N}$$

2. Funzione inversa

Sia $f : X \to Y$ iniettiva. Resta definita la funzione
$$f^{-1} : f(X) \to X$$
$$\forall y \in f(X),\ f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$
Come esempio consideriamo la funzione
$$f(x) = x+3,\ x \in \mathbb{Z}$$
La funzione è iniettiva in $\mathbb{Z}$, e $Im(f) = \mathbb{Z}$. Quindi
$$f^{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$
$$\forall y \in \mathbb{Z},\ f^{-1}y = x \iff f(x) = y$$
ossia
$$\forall y \in \mathbb{Z},\ x+3 = y \,\text{i.e.}\, x = y-3$$
e
$$f^{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f^{-1}(y) = y-3.$$

3. Funzione finestra

Una funzione finestra una funzione $f : \mathbb{R} \to Y$, a supporto compatto: vale zero al di fuori di un intervallo $[a,b]$ e 1 nei punti dell'intervallo $[a,b]$. Osserviamo che $Im(f) = \{0,1\}$.

- Esempio di funzione finestra.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{in [0,1]} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Serve per localizzare una funzione: si moltiplica la funzione per la funzione finestra. In generale l'operazione rende la funzione risultante meno regolare.
$$g(x) = x^2 f(x)$$
$$g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{in [0,1]} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$
Nel punto $x = 1$ la funzione ha un salto verso il basso.

Consideriamo
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{in [-1,1]} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

4. Le funzioni trigonometriche

Sia 2π la lunghezza della circonferenza di raggio 1. Al generico punto P appartenente alla circonferenza viene associato $(\cos x, \sin x)$, con le proprietà:

- $$|\cos x| \leq 1, \qquad |\sin x| \leq 1, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
- $$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
- $$\sin x = -\sin(-x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
- $$\cos x = \cos(-x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
- $$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$
- $$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$
- $$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$$
- $$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x-y}{2} \sin \frac{x+y}{2}$$

Dalla relazione $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, si osservi che le funzioni $\cos x$ e $\sin x$ non si annullano mai contemporaneamente, pertanto non esistono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = 0 \end{cases}$$

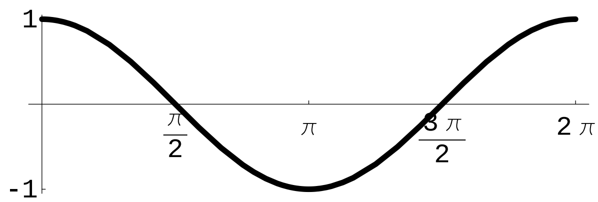


FIGURA 1. Grafico di $f(x) = \cos x$

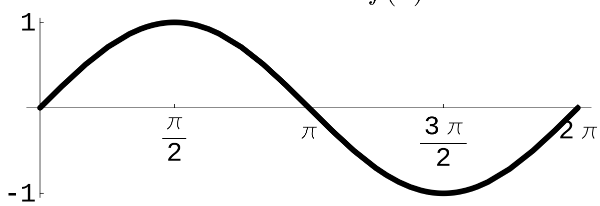


FIGURA 2. Grafico di $f(x) = \sin x$

Moltiplicando per una costante reale positiva n l'argomento di una funzione trigonometrica, ossia considerando la funzione $f(nx)$, si determina una variazione del periodo da T a $\frac{T}{n}$.

FIGURA 3. Grafico di $f(x) = \sin x$ $f(x) = \sin 2x$ $f(x) = \sin(\frac{1}{2}x)$

5. Il modulo di x

Dato $x \in \mathbb{R}$ il modulo di x è definito

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Osserviamo che

$$|x| = \max\{x, -x\}$$

Vale per $x, y \in \mathbb{R}$

- $|x| \geq 0$
- $x \neq 0$ se e solo se $|x| > 0$
- $|x| = |-x|$
- -$|x| \leq x \leq |x|$
- $|x| \leq r$ se e solo se $-r \leq x \leq r$ r reale positivo.
- $|x| < r$ se e solo se $-r < x < r$, r reale positivo.
- $|xy| = |x||y|$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$
- $||x| - |y|| \leq |x - y|$
- $|x| = |y|$ se e solo se $x^2 = y^2$,
  $|x| < |y|$ se e solo se $x^2 < y^2$.

Esercizio 5.1. *Dati N numeri reali a_k, $k \in \mathbb{N}$, dimostrare*

$$|\sum_{k=1}^{N} a_k| \leq \sum_{k=1}^{N} |a_k|$$

6. Funzione potenze, radici e esponenziali

La potenza di x. Per $n \in \mathbb{N}$, con $n > 1$ consideriamo

$$f(x) = x^n,$$
$$g(x) = n^x,$$
$$h(x) = x^{\frac{1}{n}}$$

e distinguiamo il caso n pari e n dispari. Per n pari, ad esempio $n = 2$

$$f(x) = x^2,$$
$$g(x) = x^{\frac{1}{2}},$$
$$h(x) = 2^x$$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Dom}(g) = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$, $\mathrm{Dom}(h) = \mathbb{R}$,
$\mathrm{Im}(f) = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$ $\mathrm{Im}(g) = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$, $\mathrm{Im}(h) = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$.
Per n dispari, ad esempio $n = 3$

$$f(x) = x^3,$$
$$g(x) = x^{\frac{1}{3}},$$
$$h(x) = 3^x$$

Dom $(f) = \mathbb{R}$, Dom$(g) = \mathbb{R}$, Dom$(h) = \mathbb{R}$
Im$(f) = \mathbb{R}$, Im$(g) = \mathbb{R}$, Im$(h) = \mathbb{R}_+$

7. La funzione esponenziale

Al variare di $x \in \mathbb{R}$ consideriamo per $a > 1$

$$f(x) = a^x$$

Si dice logaritmo in base a di un numero x l'esponente da dare ad a per ottenere x.

$$x = a^y \iff y = \log_a x$$

(si legge: y il logaritmo in base a di x). Pensiamo al caso paricolare

$$f(x) = 2^x$$

8. Logaritmi e proprietà dei logaritmi in base 2

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $x > 0$, , il logaritmo in base 2 ha la proprietà

$$2^{\log_2 x} = x.$$

Si ha

$$\log_2 1 = 0.$$

Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ con $x, y > 0$, vale

- $\log_2 xy = \log_2 x + \log_2 y$. Perchè

$$\log_2 xy = \log_2(2^{\log_2 x}2^{\log_2 y}) = \log_2(2^{\log_2 x + \log_2 y}) = \log_2 x + \log_2 y$$

- $\log_2 \frac{1}{x} = -\log_2 x$. Perchè

$$0 = \log_2 1 = \log_2(xx^{-1}) = \log_2 x + \log_2 x^{-1},$$
$$-\log_2 x = \log_2 x^{-1}$$

- $\log_2 \frac{x}{y} = \log_2 x - \log_2 y$.

$$\log_2 \frac{x}{y} = \log_2(x\frac{1}{y}) = \log_2 x + \log_2 \frac{1}{y} = \log_2 x - \log_2 y$$

- Per $n \in \mathbb{N}$, $\log_2 x^n = n \log_2 x$. Perchè

$$\log_2 x^n = \log_2 \underbrace{x \cdot x \ldots x}_{\text{n volte}} = \log_2 x + \log_2 x + \ldots \log_2 x = n \log_2 x$$

- Per ogni $x \neq 0, \log_2 x^2 = 2 \log |x|$ Perchè se $x > 0$

$$\log_2 x^2 = \log_2 xx = \log_2 x + \log_2 x = 2 \log_2 x,$$

se $x < 0$ allora $-x > 0$

$$\log_2 x^2 = \log_2(-x)(-x) = \log_2(-x) + \log_2(-x) = 2 \log_2(-x),$$

ossia $x \neq 0, \log_2 x^2 = 2 \log |x|$

- per ogni x, y con $xy > 0$,
$\log xy = \log |x| + \log |y|$. Perchè se $x > 0$ $y > 0$ allora

$$\log_2 xy = \log_2 x + \log_2 y,$$

se $x < 0$ $y < 0$ allora

$$\log_2 xy = \log_2(-x)(-y) = \log_2(-x) + \log_2(-y)$$

9. Funzioni trigonometriche inverse

9.1. Grafici di funzioni trigonometriche inverse. La funzione $f(x) = \sin(x), x \in \mathbb{R}$ non è invertibile in $\mathbb{R}$. Possiamo renderla invertibile se limitiamo il suo dominio all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, in cui la funzione è monotona. La sua inversa è la funzione $f(x) = \arcsin(x)$.

La sua inversa $f(x) = \arcsin(x)$ è definita in $[-1, 1]$ a valori in $[-\pi/2, \pi/2]$

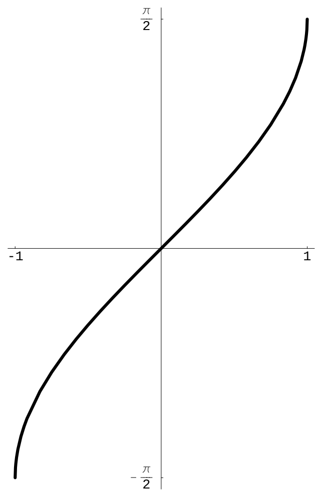


FIGURA 4. Grafico di $f(x) = \arcsin(x)$.

La funzione $f(x) = \cos(x), x \in \mathbb{R}$ non è invertibile in $\mathbb{R}$. Possiamo renderla invertibile se limitiamo il suo dominio all'intervallo $[0, \pi]$, in cui la funzione è monotona. La sua inversa è la funzione $f(x) = \arccos(x)$. La sua inversa $f(x) = \arccos(x)$ è definita in $[-1, 1]$ a valori in $[0, \pi]$.

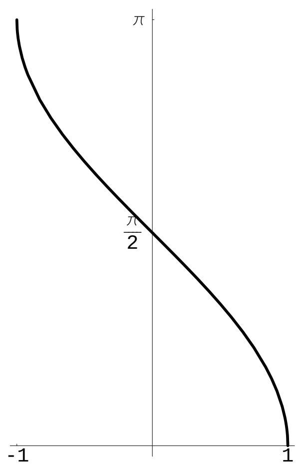


FIGURA 5. Grafico di $f(x) = \arccos(x)$.

La funzione

$$f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

è definita per ogni $x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, è periodica di periodo π

$$\tan(\theta + \pi) = \tan\theta.$$

È una funzione dispari

$$\tan(-x) = -\tan x$$

ed è ovunque crescente.

Per alcuni angoli noti

$$\tan 0 = 0 \quad \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \tan\frac{\pi}{4} = 1 \quad \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

Se restringiamo lo studio della funzione tangente in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, utilizzando la stessa notazione per indicare la funzione in tale intervallo la funzione risulta iniettiva e $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$ La funzione tangente è invertibile: la funzione inversa è indicata con

$$\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

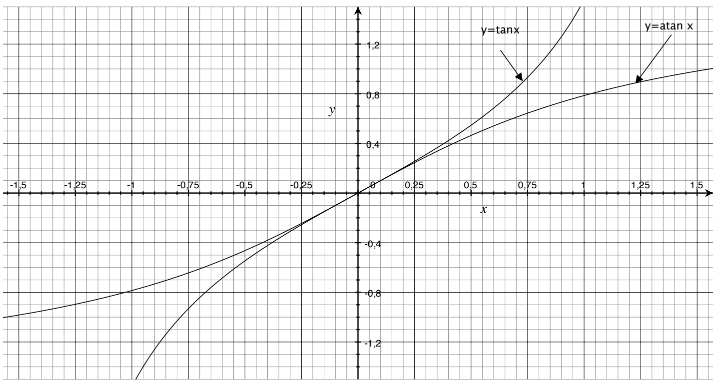


FIGURA 6. Grafico di $f(x) = \tan(x)$, grafico di $f(x) = \arctan(x)$

Risolvere

$$\begin{cases} \tan s = t \\ s \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi] \cup (-\pi, \pi) = (-\pi, \pi] - \{\pm\frac{\pi}{2}\} \end{cases}$$

- $$\begin{cases} \tan s = t \\ s \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

  Sia

  $$-\frac{\pi}{2} < s < \frac{\pi}{2},$$

  allora

  $$t = \tan s \quad \text{se e solo se } s = \arctan t$$

- $$\begin{cases} \tan s = t \\ s \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

  Sia $\frac{\pi}{2} < s \leq \pi$, allora

  $$s - \pi = s^\star \quad \text{tale che } s^\star \in (-\frac{\pi}{2}, 0]$$

Poichè
$$\tan s = \tan(\pi + s^\star) = \tan s^\star$$
;
$$t = \tan s = \tan s^\star$$
e
$$s^\star = \arctan t \quad \text{ossia} \quad s - \pi = \arctan t.$$
In conclusione
$$s = \pi + \arctan t$$
Sia
$$-\pi < s < -\frac{\pi}{2},$$
poniamo
$$s + \pi = s^\star \text{ in modo tale che } \quad s^\star \in (0, \frac{\pi}{2}]$$
Sappiamo che
$$\tan s = \tan s^\star$$

$$t = \tan s \quad \text{ossia} \quad t = \tan s^\star$$
Quindi
$$s^\star = \arctan t$$
$$s + \pi = \arctan t.$$
In conclusione
$$s = -\pi + \arctan t$$
Quindi l'unica soluzione s è data da
$$s = \begin{cases} \arctan t & t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \pi + \arctan t, & t \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \\ -\pi + \arctan t, t \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

10. Esercizi

Esercizio 10.1. *Disegnare* $f(x) = |x-5|, f(x) = |x+3|, f(x) = |x| - 7, f(x) = |x| + 8$. *Disegnare* $f(x) = \sin|x|, f(x) = |\sin x|, f(x) = \sin x + 2$. *Disegnare* $f(x) = \cos|x|, f(x) = |\cos x|, f(x) = \cos x + 2$

11. Esercizi

Esercizio 11.1. *Determinare l'estremo inferiore e superiore dell'insieme numerico*
$$X = \left\{ x_n = \frac{(-1)^n}{2n} + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$
r. *L'estremo inferiore di* X *è* 0*, l'estremo superiore di* X *è* $\frac{3}{4}$.

CAPITOLO 6

Successioni

1. Successioni limitate

Definizione 1.1. *Una successione di numeri reali è un'applicazione dall'insieme* $\mathbb{N}$ *dei numeri naturali in* $\mathbb{R}$*:*

$$n \in \mathbb{N} \longrightarrow x_n \in \mathbb{R}$$

L'elemento $x_n \in \mathbb{R}$ *è quindi l'immagine del numero* $n \in \mathbb{N}$

Una successione di numeri reali si dice inferiormente limitata se esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che $x_n \geq m$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Una successione di numeri reali si dice superiormente limitata se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $x_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Una successione si dice limitata se risulta inferiormente e superiormente limitata.

2. Successioni monotone

Una successione si dice
monotona crecente

$$x_{n+1} \geq x_n,$$

Esempio: 2^n.
monotona decrescente

$$x_{n+1} \leq x_n,$$

Esempio: $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
Osserviamo che una successione può non essere monotona ma essere oscillante (esempio $(-1)^n$)

Proposizione 7. *Dimostriamo che la successione*

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

è monotona crescente.

Dimostrazione. Consideriamo il rapporto

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right) = \left(\frac{n+2}{(n+1)} \frac{n}{(n+1)}\right)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$= \left(\frac{n^2+2n}{(n^2+2n+1)}\right)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right) = \left(\frac{n^2+2n+1-1}{(n^2+2n+1)}\right)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right) =$$

$$\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n+1} - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Dalla disuguaglianza di Bernoulli (che vale in senso stretto per ogni $h \neq 0$) si ha,

$$(1+h)^n \geq 1+nh, \quad \forall \quad \text{real} \quad h \geq -1, \quad \forall n \in N$$

abbiamo

$$h = -\frac{1}{n^2+2n+1} > -1, \quad \forall n$$

poichè

$$\frac{1}{n^2+2n+1} < 1, \quad \forall n.$$

E quindi sostituendo nella disuguaglianza precedente

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right) = 1.$$

Ciò conclude la prima dimostrazione. □

Dimostrazione. Diamo ora un'altra dimostrazione basata sulla disuguaglianza tra la media aritmetica e geometrica dell'asserto: la successione (x_n) definita da

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

è limitata e crescente.

Applicando la disuguaglianza

$$\sqrt[n+1]{a_1 \ldots a_{n+1}} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_{n+1}}{n+1}$$

con

$$a_1 = \cdots = a_n = 1 + \frac{1}{n} \quad \text{and} \quad a_{n+1} = 1,$$

otteniamo

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \leq \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Ciò è equivalente a $x_n \leq x_{n+1}$. Quindi (x_n) è crescente ed è inferiormente limitata da $x_1 = 2$.

In più applicando la disuguaglianza

$$\sqrt[n+2]{a_1 \ldots a_{n+2}} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_{n+2}}{n+2}$$

con

$$a_1 = \cdots = a_n = 1 + \frac{1}{n} \quad \text{and} \quad a_{n+1} = a_{n+2} = \frac{1}{2}$$

otteniamo

$$\sqrt[n+2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \leq \frac{n+2}{n+2} = 1.$$

Equivalente a $x_n \leq 4$. Quindi (x_n) è limitata superiormente da 4. □

Esercizio 2.1. *Dimostrare* $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ *è limitata*

DIMOSTRAZIONE.
$$0 \le \left(1-\frac{1}{n}\right)^n < 1$$
□

Proposizione 8. *La successione*
$$x_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n,$$
è crescente.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo
$$x_2 > x_1$$
Per $n > 1$ consideriamo il quoziente
$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n$$
$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n}\right) = \left(\frac{n}{(n+1)}\frac{n}{(n-1)}\right)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n}\right)$$
$$= \left(\frac{n^2}{(n^2-1)}\right)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n}\right) =$$
$$\left(\frac{n^2-1+1}{(n^2-1)}\right)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n}\right) = \left(\frac{n^2-1}{n^2-1}+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1}\left(\frac{n}{n-1}\right).$$
Applichiamo la disuguaglianza di Bernoulli, con
$$0 < h = \frac{1}{n^2-1}, \quad \forall n > 1$$
Da cui sostituendo nella precedente disuguaglianza
$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)\left(\frac{n}{n-1}\right) > 1, \quad \forall n > 1$$
Anche la successione (x_n) definita da
$$x_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$
è crescente come applicazione della
$$\sqrt[n+1]{a_1 \ldots a_{n+1}} \le \frac{a_1 + \cdots + a_{n+1}}{n+1}$$
with
$$a_1 = \cdots = a_n = 1 - \frac{1}{n} \quad \text{and} \quad a_{n+1} = 1,$$
otteniamo
$$\sqrt[n+1]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} \le \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$
Ciò è equivalente a $x_n \le x_{n+1}$. Quindi (x_n) è crescente. □

Proposizione 9. *Dimostrare* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ *è limitata*

Dimostrazione.

$$0 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < 8$$

□

Proposizione 10. *La successione*

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

è decrescente.

Dimostrazione. Abbiamo

$$x_2 < x_1$$

Per $n > 1$ consideriamo il quoziente

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} = \frac{n}{n+1}\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} =$$

$$\frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \geq \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$$

□

3. Successioni divergenti positivamente e negativamente

Definizione 3.1. *Una successione* $(x_n)_{\mathbb{N}}$ *si dice* divergente positivamente, *se per ogni numero reale* $M > 0$ *esiste* $\nu \in \mathbb{N}$ *tale che*

$$n > \nu \Longrightarrow x_n > M.$$

In questo caso si scrive

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty.$$

Definizione 3.2. *Una successione* $(x_n)_{\mathbb{N}}$ *si dice* divergente negativamente, *se per ogni numero reale* $M > 0$ *esiste* $\nu \in \mathbb{N}$ *tale che*

$$n > \nu \Longrightarrow x_n < -M.$$

In questo caso si scrive

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

Esempio di successione divergente positivamente : $x_n = 2^n$

$$\lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty$$

Esempio di successione divergente negativamente : $x_n = \ln\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \ln\frac{1}{n} = -\infty$$

Definizione 3.3. *Si dice che la successione* $(x_n)_{\mathbb{N}}$ converge *al numero reale* l*, se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\nu \in \mathbb{N}$ *tale che* $n > \nu \Longrightarrow |x_n - l| < \varepsilon$*. In simboli*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l,$$

che si legge limite di x_n rispetto a n uguale ad l.

Poichè $|x_n - l| < \varepsilon$ equivale a

$$-\varepsilon < x_n - l < \varepsilon,$$

cioè

$$l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon,$$

si può anche scrivere

$$n > \nu \Longrightarrow l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon.$$

Esempio di successione convergente : $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Teorema Se $(x'_n)_{\mathbb{N}}$ e $(x''_n)_{\mathbb{N}}$ sono successioni regolari (cioè successioni che ammettono limite $\in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$), si ha

(1) $\lim_{n\to\infty}(c_1 x'_n + c_2 x''_n) = c_1 \lim_{n\to\infty} x'_n + c_2 \lim_{n\to\infty} x''_n$,
(2) $\lim_{n\to\infty}(x'_n \cdot x''_n) = \lim_{n\to\infty} x'_n \cdot \lim_{n\to\infty} x''_n$,
(3) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x'_n}{x''_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} x'_n}{\lim_{n\to\infty} x''_n}$,

in tutti i casi in cui il secondo membro ha significato in $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Forme Indeterminate

Se $x'_n \to -\infty$ e $x''_n \to +\infty$, allora $x'_n + x''_n$ non può essere inquadrata in nessuno dei casi già considerati.

Questo rientra infatti tra quelli in cui il secondo membro $-\infty + (+\infty)$ non ha significato in $\tilde{\mathbb{R}}$.

Facciamo vedere, per mezzo di esempi, come la successione $x'_n + x''_n$ può essere di qualunque tipo.

$$x'_n = -n,\ x''_n = n \quad x'_n + x''_n = 0,\ \textit{convergente};$$

$$x'_n = -n,\ x''_n = n + (-1)^n \quad x'_n + x''_n = (-1)^n,\ \textit{non regolare};$$

$$x'_n = -n,\ x''_n = n^2 \quad x'_n + x''_n = (n-1)n, \quad \longrightarrow +\infty;$$

$$x'_n = -n^3,\ x''_n = n^2 \quad x'_n + x''_n = n^2(1-n), \quad \longrightarrow -\infty.$$

Per questo motivo quando

$$\begin{cases} x'_n & \to -\infty \\ x''_n & \to +\infty \end{cases}$$

si dice che la successione

$$x'_n + x''_n$$

si presenta sotto la forma indeterminata $\boxed{\infty - \infty}$.

Analoghe considerazioni valgono per $x'_n - x''_n$ se $x'_n \to +\infty$ e $x''_n \to +\infty$ o anche se $x'_n \to -\infty$ e $x''_n \to -\infty$.

- Se
$$\begin{cases} x'_n & \to 0 \\ x''_n & \to \pm\infty \end{cases}$$
la successione
$$x'_n \cdot x''_n,$$
si presenta nella forma indeterminata $\boxed{0 \cdot \infty}$.
- Se invece
$$\begin{cases} x'_n & \to \pm\infty \\ x''_n & \to \pm\infty \end{cases}$$
si dice che la successione
$$\frac{x'_n}{x''_n},$$
si presenta nella forma indeterminata $\boxed{\dfrac{\infty}{\infty}}$.
- Quando, infine
$$\begin{cases} x'_n & \to 0 \\ x''_n & \to 0 \end{cases}$$
si dice che la successione
$$\frac{x'_n}{x''_n},$$
si presenta nella forma indeterminata $\boxed{\dfrac{0}{0}}$.

4. Successione non regolare

Definizione. Una successione $(x_n)_{\mathbb{N}}$ si dice *non regolare o oscillante* se non ammette limite.
Esempio di successione non regolare: $x_n = (-1)^n$ non esiste il $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$

Proposizione 11. *Dato l'applicazione $i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. $i(k) = j$ con $i(k+1) > i(k)$, una successione estratta è la successione ristretta a $i(k)$. Se x_n converge a $x \in \mathbb{R}$ (oppure diverge positivamente o negativamente) allora ogni estratta di x_n converge a x (oppure diverge positivamente o negativamente).*

Esempio 4.1. *Non esiste il $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ perchè calcolata nell'estratta di indici pari la sottosuccessione converge a 1, nell'estratta di indici dispari la sottosuccessione converge a -1.*

5. Permanenza del segno per successioni

Sia $\lim_{n\to+\infty} x_n = l$ con $l > 0$ allora esiste ν tale che $x_n > 0$ per $n > \nu$.
Sia
$$\lim_{n\to+\infty} x_n = l \qquad \lim_{n\to+\infty} y_n = l'$$

- Se $x_n < 0$ per ogni n allora $x \leq 0$. Ricordare l'esempio $x_n = -\frac{1}{n}$ $x_n < 0$ per ogni n ma $l = 0$
- Se $x_n \leq 0$ per ogni n allora $l \leq 0$.
- Se $x_n \leq y_n$ per ogni n allora $l \leq l'$

Esercizio 5.1. *Dimostrare che se per x, y reali risulta $x < y + \frac{1}{\sqrt{n}}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $x \leq y$.*

5.1. Il teorema del confronto.

Teorema 5.2. *Siano x_n, y_n, e z_n tre successioni.*
- *Se $x_n \to x \in \mathbb{R}$, $z_n \to x \in \mathbb{R}$, e $x_n \leq y_n \leq z_n$, allora $y_n \to x$*
- *Se $y_n \to +\infty$ e $x_n \geq y_n$, allora $x_n \to +\infty$.*
- *Se $y_n \to -\infty$ e $x_n \leq y_n$, allora $x_n \to -\infty$.*

6. Calcolo di limiti

Sia x_n una successione a termini positivi. Posto

$$y_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

si ha: se $\lim_{n\to+\infty} y_n < 1$ allora $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.
Applicazione. $x > 1, c > 0, n \in \mathbb{N}$

- $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^c}{x^n} = 0$$
- $$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

7. Il teorema fondamentale sulle successioni monotone

Teorema 7.1. *Se x_n è crescente e superiormente limitata allora*

$$\sup_n x_n = \lim_{n\to\infty} x_n$$

Se x_n è decrescente e inferiormente limitata allora

$$\inf_n x_n = \lim_{n\to\infty} x_n$$

Se x_n è crescente e superiormente non limitata allora

$$\sup_n x_n = \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

Se x_n è decrescente e inferiormente non limitata allora

$$\inf_n x_n = \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo, per fissare le idee, che $(x_n)_\mathbb{N}$ sia crescente. Se non è limitata, non lo è superiormente. Infatti x_1 è un minorante.

Comunque si scelga un numero $M \in \mathbb{R}$ esiste un elemento della successione, x_ν, tale che $x_\nu > M$.

Per ogni $n > \nu$ si avrà $x_n \geq x_\nu > M$ e questo significa $x_n \to +\infty$.

Se $(x_n)_\mathbb{N}$ è limitata, avrà estremo superiore $e_M \in \mathbb{R}$. Per le proprietà dell'estremo superiore, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un termine della successione, sia x_ν, tale che $x_\nu > e_M - \varepsilon$.

Per $n > \nu$ si avrà $x_n \geq x_\nu$ e $x_n \leq e_M$. Perciò da $n > \nu$ segue

$$e_M - \varepsilon < x_\nu \leq x_n \leq e'_M < e_M + \varepsilon.$$

Ciò significa $x_n \to e'_M$.

In modo analogo si prova l'altro caso. □

Esercizio 7.2. *Come esercizio sul teorema fondamentale sulle successioni monotone provare il teorema nel caso di successioni decrescenti e limitate. (suggerimento* $l' = \inf_n x_n$*. Per definizione di estremo inferiore* $x_n \geq l'$*, per ogni* n*; inoltre* $\forall \epsilon > 0$ *esiste* ν *tale che* $x_\nu - \epsilon < l'$*. Ma* $x_\nu \leq x_n$ *se* $n > \nu$*....).*

CAPITOLO 7

Il numero di Nepero

1. introduzione al numero di Nepero

Scoperto da John Napier, e indicato con la lettera e , il numero di Nepero è ora universalmente noto con la lettera e, dopo l'uso di tale lettera da parte di Eulero. Ecco alcune altre notazioni tra 1690 e il 1787, tratto da un libro di Florian Cajori, matematico del XIX secolo (wikipedia).

1690 b Leibniz, Letter to Huygens

1691 b Leibniz, Letter to Huygens

1703 a A reviewer, Acta eruditorum

1727 e Euler, Meditatio in Experimenta explosione tormentorum nuper instituta

1736 e Euler, Mechanica sive motus scientia analytice exposita

1747 c D'Alembert, Histoire de l'Académie

1747 e Euler, various articles.

1751 e Euler, various articles.

1760 e Daniel Bernoulli, Histoire de l'Académie Royal des Sciences

1763 e J. A. Segner, Cursus mathematici

1764 c D'Alembert, Histoire de l'Académie

1764 e J. H. Lambert, Histoire de l'Académie

1771 e Condorcet, Histoire de l'Académie

1774 e Abb Sauri, Cours de mathématiques

Consideriamo l'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} \quad \text{tali che } x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad n \in \mathbb{N}\}.$$

Dimostriamo che l'estremo superiore di A è un numero reale. Come precedentemente dimostrato, $k! \geq 2^{k-1}, \quad \forall k \geq 1, k \in \mathbb{N}$. Si ha

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-1}} \leq 1 + 2 = 3$$

Inoltre

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} > 2$$

Da cui si evince

$$2 \leq \sup_n A \leq 3.$$

Per definizione, poniamo

$$e = \sup_n A.$$

Abbiamo $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ che è una successione monotona crescente. Dal teorema fondamentale sulle successioni monotone, deduciamo

$$e = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Dalla formula del binomio di Newton

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k}\frac{1}{k!}$$

Ma,

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n\dots n_{k-\text{volte}}}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n\dots n_{k-\text{volte}}} = 1(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\dots(1-\frac{k-1}{n})\dots \leq 1.$$

Allora,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!},$$

e passando al sup, definendo

$$A' = \{x \in R \quad \text{tale che } \mathrm{x}_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad n \in N\},$$

si ha

$$\sup_n A' \leq \sup_n A$$

Dalla limitarezza di A' si evince il suo estremo superiore e' è un numero reale.

Fin'ora abbiamo dimostrato

$$e' \leq e$$

Vogliamo in realtà dimostrare che $e' = e$.

Prendiamo $n > m$. Allora

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k}\frac{1}{k!} \geq \sum_{k=0}^{m} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k}\frac{1}{k!}$$

Da cui passando all'estremo superiore su m

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k}\frac{1}{k!} =$$

Osservando che

$$1 = \sup_n \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k}$$

Passando all'estremo superiore su n,

$$\sup_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Allora otteniamo l'altra disuguaglianza, e quindi l'uguaglianza.

1.1. La funzione esponenziale. Al variare di $x \in \mathbb{R}$ consideriamo

$$f(x) = e^x$$

Per analogia a quanto visto precedentemente poniamo

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

1.2. Ancora sul numero di Nepero. Precedentemente abbiamo verificato

$$e = \sup_n \left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right\}$$

e $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è una successione monotona crescente. Dal teorema fondamentale sulle successioni monotone, deduciamo

$$e = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Inoltre vale per il teorema del prodotto dei limiti

$$e = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Sappiamo che $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ è una successione monotona decrescente inferiormente limitata Dal teorema fondamentale sulle successioni monotone, deduciamo

$$e = \inf_n \left\{ (1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Si ha

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

e passando ai logaritmi

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 < \log\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

ossia

$$\frac{1}{n+1} < \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

2. Le buste e le lettere

Date n e le corrispondi n buste in quanti modi possiamo mettere le lettere nelle buste in modo tale che nessuna lettera sia nella busta giusta? Per ogni sottoinsieme di $A \subset \{1, \ldots, n\}$ denotiamo con $f(A)$ il numero di permutazioni $\{1, \ldots, n\}$ che lasciano fisso ogni elemento di A. Allora

$$f(A) = (n - |A|)!,$$

con $|A|$ il numero degli elementi di A.

Si ha che il numero N di tali permutazioni è il numero naturale più vicino a $\frac{n!}{e}$ ossia è la parte intera di $\frac{1}{e} + \frac{n!}{e}$.

Dimostrazione. Osserviamo che il risultato è banale per $n = 1$; per una busta e una lettera: $N = 0$. Assumiamo quindi $n \geq 2$.

Osserviamo che $\forall k,\ 0 \leq k \leq n$, ci sono esattamente $\binom{n}{k}$ sottoinsiemi di k elementi di $\{1, \ldots, n\}$, otteniamo allora

$$\begin{aligned} N(n) &= \sum_{A \subset \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|A|} f(A) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! \\ &= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Ne segue dalle stime per serie alterne

$$\left| \frac{N(n)}{n!} - \frac{1}{e} \right| < \frac{1}{(n+1)!}.$$

e anche

$$\frac{n!}{e} < N(n) < \frac{n!}{e} + \frac{1}{(n+1)} \qquad N(n) = \lfloor \frac{n!}{e} + \frac{1}{(n+1)} \rfloor.$$

$\square$

3. Logaritmi e proprietà dei logaritmi in base neperiana

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $x > 0$, , il logaritmo in base neperiana ha la proprietà

$$e^{\log x} = x.$$

Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ con $x, y > 0$, vale

- $\log xy = \log x + \log y$.
- $\log \frac{1}{x} = -\log x$.
- $\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$.
- Per t reale, $\log x^t = t \log x$.
- Per ogni $x \neq 0, \log x^2 = 2 \log |x|$
- per ogni x, y con $xy > 0$,
  $\log xy = \log |x| + \log |y|$.

4. Applicazione della formula del binomio al calcolo di limiti

$$\lim_{n\to\infty}(n)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

DIMOSTRAZIONE. Dall'identità

$$\left[\left((n)^{\frac{1}{n}} - 1\right) + 1\right]^n = n$$

Dalla formula del binomio,

$$[\left((n)^{\frac{1}{n}} - 1\right) + 1\Big]^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left((n)^{\frac{1}{n}} - 1\right)^k,$$

considerando nella somma unicamente l'addendo ottenuto per $k = 2$, otteniamo

$$\frac{n(n-1)}{2}\left((n)^{\frac{1}{n}} - 1\right)^2 < n,$$

quindi

$$0 \leq (n)^{\frac{1}{n}} - 1 < \sqrt{\frac{2}{n-1}},$$

$$1 \leq (n)^{\frac{1}{n}} < 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}},$$

Passando al limite,

$$\lim_{n\to\infty}(n)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

□

5. Un teorema di Cesaro

Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali positivi. Allora

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = l \implies \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = l,$$

qualinque sia $l \in \cup\{-\infty, +\infty\}$.

E' facile vedere che un' applicazione del teorema di Cesaro è la seguente

$$\lim_{n\to\infty}(n)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Infatti basta applicare il teorema con $a_n = n$.

6. Esercizi

Esercizio 6.1. *Calcolare*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

Dalla disuguaglianza di Bernoulli

$$1 - \frac{1}{n} < \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n < 1$$

Da cui, passando al limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n=1$$

Esercizio 6.2. *Tenuto conto dell'esercizio precedente calcoliamo*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n.$$

Abbiamo

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

allora

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}$$

Esercizio 6.3. *Dimostrare che non esiste il limite della successione*

$$a_n=\begin{cases}(\frac{n-1}{n+1})^n & \textit{se } n \textit{ è pari,}\\ (\frac{n-1}{n})^n & \textit{se } n \textit{ è dispari.}\end{cases}$$

r. *Il termine generale della successione si può anche scrivere*

$$a_n=\begin{cases}(\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}})^n & \textit{se } n \textit{ è pari}\\ (1-\frac{1}{n})^n & \textit{se } n \textit{ è dispari}\end{cases}$$

Cosicchè se n è pari $a_n\to\frac{1}{e^2}$ mentre se n è dispari $a_n\to\frac{1}{e}$, quindi la successione non ammette limite.

CAPITOLO 8

Serie

1. Serie geometrica

- $$x_n = q^n$$

  Allora

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} +\infty & q > 1 \\ 1 & q = 1 \\ 0 & q \in]-1,1[\\ \nexists & q \leq -1 \end{cases}$$

Consideriamo

- $$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + \cdots$$

  serie geometrica di ragione q.

Ridotta $-n$sima

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$$

.

Se $q = 1$ si ha

$$s_n = 1 + 1 + \cdots + 1 = n.$$

Sia $q \neq 1$. Abbiamo dimostrato che

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Se $|q| < 1$ allora $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ e pertanto

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

Se $q > 1$, poichè $\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{1}{q - 1} \cdot \lim_{n\to\infty} q^n - 1 = \frac{1}{q - 1} \cdot +\infty = +\infty$$

Sia ora $q = -1$,

$$s_n = \frac{1 - (-1)^n}{2} = \begin{cases} 0 & , \quad n = 2p \\ 1 & , \quad n = 2p + 1 \end{cases}$$

Pertanto la successione $(s_n)_{\mathbb{N}}$ non è regolare.

Sia infine $q < -1$. Possiamo scrivere $q = -|q|$, e quindi

$$s_n = \frac{1 - (-|q|)^n}{1 + |q|} = \frac{1 - (-1)^n |q|^n}{1 + |q|}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{1 - |q|^{2p}}{1 + |q|}, & n = 2p \\ \dfrac{1 + |q|^{2p-1}}{1 + |q|}, & n = 2p - 1 \end{cases}$$

Ne segue che $S_{2p} \to -\infty$ e $S_{2p-1} \to +\infty$ e pertanto $\nexists \lim_{n\to\infty} s_n$
Allora

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} +\infty & q \geq 1 \\ \dfrac{1}{1-q} & q \in]-1, 1[\\ \nexists & q \leq -1 \end{cases}$$

Ripassiamo la funzione generatrice di un numero decimale. Calcoliamo dapprima la frazione generatrice di $1,5$

$$1,5 = 15/10 = 3/2$$

Calcoliamo ora la frazione generatrice di $1,\overline{5}$

$$1,\overline{5} = 1 + 5(10)^{-1} + 5(10)^{-2} + \cdots + 5(10)^{-n} + \cdots = 5\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 1 + \frac{5}{9} = \frac{14}{9}$$

Calcoliamo ora la frazione generatrice di $1,8\overline{5}$

$$1,8\overline{5} = 1 + \frac{8}{10} + 5(10)^{-2} + 5(10)^{-3} + \cdots + 5(10)^{-n} + \cdots = 1 + \frac{4}{5} + 5\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n =$$

$$1 + \frac{4}{5} + \frac{5}{99} = ..$$

Esercizio 1.1. *Dimostare che la frazione generatrice di $0.\overline{5}$ ùguale a $5/9$*
Soluzione.

$$0,\overline{5} = 5(10)^{-1} + 5(10)^{-2} + \cdots + 5(10)^{-n} + \cdots = 5\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{5}{9}$$

2. Insieme di Cantor

Dividiamo $[0, 1]$ in tre parti uguali e togliamo lintervallo aperto centrale di ampiezza $1/3$ Dividiamo ciascuno dei due intervalli chiusi che rimangono in tre parti uguali e rimuoviamo i due intervalli aperti centrali di ampiezza $1/9$ e cosi via. L'insieme che si ottiene si chiama insieme ternario di Cantor. Nell'intorno di ogni punto dell'insieme di Cantor ci sono sia punti contenuti nell'insieme che punti contenuti nel suo complementare. Ogni punto dell'insieme di Cantor è un punto di accumulazione. Se calcoliamo la misura dell'insieme dei punti che vengono via via rimossi dall'intervallo $[0, 1]$

osserviamo che vale

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{3^{n+1}}=1.$$

In realtà, anche se la misura dell'insieme di Cantor vale 0, l'insieme contiene molti punti. Infatti si può dimostare che l'insieme di Cantor contiene tanti punti quanti ne contiene l'intervallo [0, 1], ossia l'insieme di Cantor ha la cardinalità del continuo.

3. Serie armonica

Si chiama *serie armonica* la serie di temine generale $x_n = 1/n$.

Teorema 3.1. *La serie armonica*

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

diverge positivamente.

Dimostrazione. Consideriamo per $k \in \mathbb{N}$

$$a_k = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$$

Allora $e \geq \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ Poichè la funzione $\ln x$ è crescente in $(0, +\infty)$

$$1 = \ln e = \ln a_k \geq k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$$

Da cui

$$\frac{1}{k} \geq \ln(k+1) - \ln k$$

Facendo le somme da 1 a n

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n}\ln(k+1) - \ln k = \ln(n+1)$$

In conclusione $s_n \geq \ln(n+1)$ e quindi la serie armonica diverge per il teorema di confronto sulle successioni. □

Importante notare

Osservazione 6. *Per la serie armonica*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

è verificata la condizione $x_n \to 0$*; questa condizione è perciò necessaria, ma non è sufficiente per la convergenza della serie.*

3.1. Teorema (criterio del confronto asintotico. Sia x_n una successione a termini non negativi per cui esiste il limite e

$$\lim_{n\to+\infty} n x_n = l \neq 0.$$

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = +\infty$$

Esempio Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

$$\lim_{n\to+\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n}\right] = e$$

ossia

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n} \sim \frac{e}{n} \quad \text{per } \ n \to \infty,$$

Dal criterio del confronto asintotico segue immediatamente che la serie è positivamente divergente

4. Serie armonica generalizzata

Per p numero reale e positivo. La serie armonica generalizzata è data da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} +\infty & p \leq 1 \\ < \infty & p > 1 \end{cases}$$

Dimostrazione del caso di convergenza.

La successione delle ridotte n-sime è regolare, pertanto per valutarne il limite possiamo considerare una sottosuccessione.

$$s_{2^h-1} = 1 + \left[\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right] + \ldots.. \left[\frac{1}{(2^{h-1})^p} + \frac{1}{(2^{h-1}+1)^p} + \ldots\ldots\ldots \frac{1}{(2^h-1)^p}\right] <$$

$$1+2\frac{1}{2^p}+4\frac{1}{4^p}+\ldots\ldots\ldots 2^{h-1}\frac{1}{(2^{h-1})^p} = \sum_{k=1}^{h}\left[\frac{1}{(2^{p-1})^{k-1}}\right] < \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{(2^{p-1})^{k-1}}\right] < +\infty$$

teorema (criterio del confronto asintotico) Sia p un numero reale e positivo. Supponiamo $p \leq 1$. Sia x_n una successione a termini non negativi tale che per cui esiste il limite e

$$\lim_{n\to+\infty} n^p x_n = l \neq 0.$$

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = +\infty$$

Esempio Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = e$$

ossia

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{e}{\sqrt{n}} \quad \text{per } n \to \infty,$$

Dal criterio del confronto asintotico segue immediatamente che la serie è positivamente divergente.

teorema (criterio del confronto asintotico) Sia $p > 1$ un numero reale. Sia x_n una successione a termini non negativi tale che per cui esiste il limite in $\mathbb{R}$ di

$$\lim_{n\to+\infty} n^p x_n$$

Allora
$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n < +\infty$$

Esempio 4.1. *Studiare il carattere della serie*
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n^2}$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$
Pertanto
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n^2} \sim \frac{e}{n^2} \quad \text{per } \ n \to \infty,$$
ossia
$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$
Dal criterio del confronto asintotico segue immediatamente che la serie è convergente.

Esempio 4.2. *Studiare il carattere della serie*
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n^{2\alpha}}$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$
Pertanto
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n^{2\alpha}} \sim \frac{e}{n^{2\alpha}} \quad \text{per } \ n \to \infty,$$
ossia
$$\lim_{n\to+\infty} n^{2\alpha} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$
Dal criterio del confronto asintotico segue immediatamente che la serie è convergente per $\alpha > \frac{1}{2}$ *(*$\iff 2\alpha > 1$*) e divergente per* $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$.

Esercizio 4.3. *Studiare il comportamento della serie*
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+k+1}.$$
La serie è convergente, infatti
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+k+1} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$
. Studiare la convergenza applicando il confronto asintotico.

Esercizio 4.4. *Studiare il comportamento della serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n! + 2^n)}{(n+1)!}.$$

r. *Abbiamo*

$$\frac{(n! + 2^n)}{(n+1)!} \geq \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

Dunque la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(n! + 2^n)}{(n+1)!}$$

è positivamente divergente.
Studiare la convergenza applicando il confronto asintotico.

Esercizio 4.5. *Studiare il comportamento della serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}.$$

r. *La serie è divergente.*

$$\sqrt{k^2+1} \leq \sqrt{k^2+1+2k} = k+1,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j} = +\infty.$$

Quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} \geq \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j} = +\infty.$$

Studiare la convergenza applicando il confronto asintotico.

Esercizio 4.6. *Studiare il comportamento della serie*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{k+1}{k} \right)^k.$$

r. *La serie è positivamente divergente. Infatti*

$$\frac{1}{k} \left(\frac{k+1}{k} \right)^k = \frac{1}{k} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k \geq \frac{2}{k}.$$

Il risultato segue allora dal confronto con la serie armonica.
Studiare la convergenza applicando il confronto asintotico.

Proposizione 12. *Data una serie a termini positivi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ tale che esista il limite*

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = l, \text{ con } a_n \neq 0 \text{ per } n \text{ grande},$$

si ha

- *se $l > 1$ la serie diverge*
- *se $l < 1$ la serie converge*
- *non ne stabilisce il comportamento $l = 1$.*

Proposizione 13. *Data una serie a termini positivi* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *tale che esista il limite*

$$\lim {a_n}^{1/n} = l,$$

- *se* $l > 1$ *la serie diverge*
- *se* $l < 1$ *la serie converge*
- *non ne stabilisce il comportamento* $l = 1$*.*

Esercizio 4.7. *Dopo aver determinato dalla formula ricorsiva*

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \frac{e}{n+1} \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

l'espressione di a_n*, studiare il comportamento della serie*

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n.$$

r. *Si ha*

$$a_n = \frac{e^n}{n!}.$$

Si può procedere alla dimostrazione utilizzando il principio di induzione. La formula è vera al primo passo e se supponiamo che sia vera per $n-1$*, ossia*

$$a_{n-1} = \frac{e^{n-1}}{(n-1)!},$$

si ha

$$a_n = a_{n-1}\frac{e}{n}.$$

Dal passo $n-1$ *si ricava*

$$a_n = \frac{e^{n-1}}{(n-1)!}\frac{e}{n} = \frac{e^n}{n!},$$

da cui l'asserto.

Si tratta ora di studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^n}{n!}.$$

È verificata la condizione necessaria per la convergenza

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n!} = 0.$$

La serie è a termini positivi, pertanto la convergenza semplice ed assoluta si equivalgono. Applicando il criterio del rapporto si ha

$$\frac{e^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{e^n} = \frac{e}{n+1} < 1 \qquad \forall n > 1.$$

Proposizione 14. *Approssimazione di e . Per n sufficientemente grande*

$$e \approx 2,71828$$

Dimostrazione. Ricordiamo

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Calcoliamo

$$\sum_{k=0}^{n+m} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots \frac{1}{(n+m)!} =$$

$$\frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{(n+2)} + \dots \frac{1}{(n+2)\cdots(n+m)}\right) \leq$$

$$\frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{(n+2)} + \dots \frac{1}{(n+2)^{m-1}}\right) < \frac{1}{nn!}$$

Allora per $m \to +\infty$, troviamo

$$0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{1}{nn!},$$

disuguaglianza che consente il calcolo approssimato di e. □

Proposizione 15. *e non è un numero razionale*

Dimostrazione. Sappiamo $e > 2$. Ricordiamo

$$0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{1}{nn!},$$

per $n = 1$ si ha $e < 3$; assumiamo per contraddizione che e sia un numero razionale $e = \frac{p}{q}$ con p, q interi positivi primi tra loro e $q > 1$. Allora

$$0 < \frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < \frac{1}{qq!},$$

e

$$0 < q!\left(\frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!}\right) < \frac{1}{q},$$

e otteniamo una contraddizione poichè il primo membro è un intero positivo e il secondo membro è un numero minore di uno. □

5. Convergenza assoluta

Consideriamo le due serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$$

Si ha

- $$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \text{ converge} \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge}$$
- $$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge} \;\not\Longleftarrow\; \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \text{ converge}$$

Per avere due serie differenti nel carattere, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ dovrà contenere un numero infinito di cambi di segno. Una serie prototipo di questo tipo è

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}.$$

Proposizione 16. *La serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

è convergente.

Osservazione 7. *Per questa serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} \quad ma \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n} = +\infty$$

Dimostrazione. Infatti indicato con

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$$

si ha

$$s_{2n+2} = \sum_{k=1}^{2n+2}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} =$$

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} + (-1)^{2n+1}\frac{1}{2n+1} + (-1)^{2n+2}\frac{1}{2n+2} =$$

$$s_{2n} - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}.$$

In forza di

$$-\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \leq 0,$$

si evince

$$s_{2n} \geq s_{2n+2},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ciò mostra che la ridotta di ordine pari è monotona decrescente ed è inferiormente limitata da $s_2 = \frac{1}{3}$. Esiste il limite per $n \to +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} s_{2n} = S_p$$

Si ha

$$s_{2n+3} = \sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} =$$

$$\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} + (-1)^{2n+2}\frac{1}{2n+2} + (-1)^{2n+3}\frac{1}{2n+3} =$$

$$s_{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3}.$$

In forza di

$$\frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} \geq 0$$

si evince
$$s_{2n+1} \leq s_{2n+3}, \, \forall n \in \mathbb{N}.$$
Inoltre
$$s_{n+1} = s_{2n} - \frac{1}{2n+1} \leq s_{2n} \leq s_2$$
Ciò mostra che la ridotta di ordine dispari è monotona crescente ed è superiormente limitata da $s_2 = \frac{1}{3}$. Esiste il limite per $n \to +\infty$
$$\lim_{n\to+\infty} s_{2n+1} = S_d,$$
e risulta, passando al limite per $n \to +\infty$
$$S_p = S_d, \text{ perchè } s_{n+1} = s_{2n} - \frac{1}{2n+1}$$

Essendo S_p il limite delle somme parziali pari, per la definizione di limite $\forall\epsilon\exists m$ (pari) tale che $|s_n - S_p| < \epsilon \; \forall n > m$, n pari. Essendo S_d il limite delle somme parziali dispari, per la definizione di limite $\forall\epsilon \; \exists j$ (dispari) tale che $|s_n - S_d| < \epsilon \; \forall n > j$, n dispari. Sappiamo $S_p = S_d$, perciò prendendo $h = \max\{m, j\}$ la disuguaglianza $|s_n - S| < \epsilon$ vale per ogni per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > h$, quindi
$$\lim_{n\to+\infty} s_n = S,$$
e la serie converge. □

Vale il Criterio di Leibniz

Teorema 5.1. *Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia a_n positivo, decrescente e infinitesimo. Allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$ converge a S. In più vale la stima*
$$|S_n - S| < |a_{n+1}|$$

6. Esercizi

Esercizio 6.1. *Fare la dimostrazione precedente nel caso più generale, assumendo a_n positivo, decrescente e infinitesimo.*

Esercizio 6.2. *Data la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

(i) *Definire la successione delle ridotte N-sime.*
(ii) *Dare la definizione di convergenza assoluta della serie.*
(iii) *Fare un esempio di serie convergente, ma non assolutamente convergente*

CAPITOLO 9

I numeri complessi

1. L'unita immaginaria: il numero i

Non tutte le equazioni $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$ con $a_0, a_1, \ldots a_n \in \mathbb{Z}$ hanno una soluzione nell'insieme dei numeri reali. Estendiamo i numeri reali affinchè equazioni polinomiali $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$ abbiamo almeno una soluzione nell'estensione di $\mathbb{R}$ che indichiamo con $\mathbb{C}$ (chiusura algebrica di $\mathbb{R}$). In particolare l'equazione $x^2+1=0$ non ha soluzioni rin $\mathbb{R}$. Definiamo l'unità immaginaria i soluzione dell'equazione $x^2+1=0$. La proprietà del numero i è data dalla relazione

$$i^2=-1.$$

2. Forma algebrica dei numeri complessi

Un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ corrisponde ad una coppia ordinata di numeri reali (x, y). Definiamo forma algebrica di un numero complesso z

$$z=x+iy.$$

x e y sono rispettivamente la parte reale e il coefficiente dell'unita immaginaria immaginaria, e vengono scritti tramite la notazione

$$x=\Re z \qquad y=\Im z$$

La forma algebrica si presta facilmente all'operazione di somma .
Dati due numeri complessi $z=x+iy$ e $w=u+iv$

l'operazione di somma $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ si definisce al seguente modo

$$(z, w)\to z+w=(x+u)+i(y+v)$$

Ricordiamo che

$$z=0 \iff (x, y)=(0,0).$$

Nell'operazione di prodotto$\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ si opera algebricamente sapendo che $i^2=-1$.

$$z\cdot w=(xu-yv)+i(yu+xv)$$

Molto spesso si omette il simbolo $\cdot$ usando più praticamente zw.
L'opposto $-z$ è dato da

$$-z=-x-iy\ ,$$

mentre il reciproco

$$z^{-1}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}\ , z\neq 0\ (x, y)\neq(0,0).$$

I numeri complessi si possono identificare con i punti del piano reale ed è particolarmente importante la simmetria rispetto all'asse delle ascisse espressa dall'operazione di coniugio $C \to C$. Dato $z = x + iy$ il conuigato di z è il numero complesso

$$\overline{z} = x - iy.$$

L'operazione di coniugio è una funzione complessa di variabile complessa che vediamo. Studiamone le proprietà.

Dato z e $w \in \mathbb{C}$, $z + w$ è un numero complesso, a cui possiamo applicare l'operazione di coniugio. Il risultato non cambia se consideriamo z e ne facciamo il coniugato, consideriamo w e ne facciamo il coniugato, e poi sommiamo i due. In simboli

- $$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$$

  Dato z e $w \in \mathbb{C}$ zw è un numero complesso, a cui possiamo applicare l'operazione di coniugio. Il risultato non cambia se consideriamo ze ne facciamo il coniugato, consideriamo w e ne facciamo il coniugato, e poi moltiplichiamo i due. In simboli
- $$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

  Inoltre se operiamo due volte l'operazione di coniugio otteniamo il numero di partenza.
- $$\overline{\overline{z}} = z$$

Ha interesse considerare il prodotto di z per il suo coniugato$\overline{z}$. Mentre il prodotto di z con se stesso produce un nuovo numero complesso z^2 il prodotto di di z per il suo coniugato$\overline{z}$ fornisce un numero reale.

$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2 \tag{1}$$

essendo

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2} \textit{ modulo di } z.$$

Notiamo che $|z| = 0 \iff z = 0$. Per $z \neq 0$ si ha

$$z\frac{\overline{z}}{|z|^2} = 1 \qquad \text{per cui} \qquad z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

da cui si ottiene la formula del reciproco.

Valgono le relazioni

$$\Re z = \frac{z + \overline{z}}{2} \qquad \Im z = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

2.1. Forma trigonometrica dei numeri complessi. La rappresentazione nel piano dei numeri complessi permette una rappresentazione mediante coordinate polari *forma trigonometrica di z*. La forma trigonometrica è particolarmente utile nelle operazioni di prodotto e radice.

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta, \\ y = \rho \sin\theta, \end{cases} \qquad \rho \in \mathbb{R}, \rho > 0, \ \theta \in [0, 2\pi)$$

Dato $z = x + iy$ si ha

$$z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$$

dove $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2}$ e $\theta = \ \arg z$.

L'argomento θ è individuato a meno di multipli interi di 2π. Si ha quindi un insieme $\theta + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$. Osserviamo che se $\rho = 0$ (cioè $z = 0$) arg z resta indeterminato. Partendo dalla condizione $z_1 - z_2 = 0$ si ha

$$z_1 = z_2 \iff \Re z_1 = \Re z_2 \quad \Im z_1 = \Im z_2,$$

conseguentemente

$$z_1 = z_2 \iff |z_1| = |z_2| \;\; \arg z_1 = \arg z_2 + 2k\pi$$

3. Argomento principale

Può essere conveniente fissare un argomento. L' argomento principale., Arg z, è fissato in modo che risulti

$$-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$$

$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} (\operatorname{sign}(y))\frac{\pi}{2}. & x = 0, \\ \arctan\frac{y}{x} & x > 0, \text{ ossia} \quad \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \pi + \arctan\frac{y}{x} & x < 0,\, y \geq 0, \quad \text{ossia} \quad \theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \\ -\pi + \arctan\frac{y}{x} & x < 0,\, y < 0, \quad \text{ossia} \quad \theta \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

Infatti Arg $z = \theta$: Arg z è l'unica soluzione in $(\pi, \pi]$ del sistema

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad -\pi < \theta \leq \pi \end{cases}$$

(1) Se $x = 0$ allora si ha il sistema

$$\begin{cases} \cos\theta = 0 \\ \sin\theta = \frac{y}{|y|} \qquad -\pi < \theta \leq \pi \end{cases}$$

la cui unica soluzione del sistema sopra descritto è

$$\theta = (\operatorname{sign}(y))\frac{\pi}{2}.$$

(2) Nel caso

$$x \neq 0,$$

si ha il sistema

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad -\pi < \theta \leq \pi \end{cases}$$

ossia l'unione dei tre sistemi

$$\begin{cases} \tan\theta = \frac{y}{x} \\ x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \tan\theta = \frac{y}{x} \\ x < 0, \qquad y \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \end{cases} \qquad \begin{cases} \tan\theta = \frac{y}{x} \\ x < 0, \qquad y < 0 \\ -\pi < \theta < -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Esercizio precedentemente risolto (vedi funzioni trigonometriche)..

4. Prodotto

Prodotto di due numeri complessi in forma trigonometrica

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad r = |z| \quad \theta = \text{ arg } z$$

$$w = \rho(\cos\rho + i\sin\varphi) \quad \rho = |z| \quad \varphi = \text{ arg } w$$

$$\begin{aligned} z \cdot w &= r\rho[(\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi) + i(\sin\theta\cos\varphi + \sin\varphi\cos\theta)] \\ &= r\rho[\cos(\theta + \varphi) + i\sin(\theta + \varphi)] \end{aligned}$$

naturalmente

$$z \cdot w = |z \cdot w|[\cos(\text{arg } (z \cdot w)) + i\sin(\text{arg } (z \cdot w))]$$

Per cui

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \qquad\qquad \text{arg } (z \cdot w) = \text{ arg } z + \text{ arg } w.$$

Esercizio 4.1. *Utilizzando il principio di induzione dimostrare*

$$z^n = |z|^n(\cos n \ \mathit{arg}\ z + i\sin n \ \mathit{arg}\ z), \ n \in \mathbb{N}$$

5. Forma esponenziale di un numero complesso

Notiamo che la funzione $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ verifica $f(\theta) \cdot f(\varphi) = f(\theta + \varphi)$ Tale proprietà è tipica dell'esponenziale. Poniamo

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

e la scrittura

$$z = |z|e^{i \cdot \theta} \qquad\qquad (\text{ esponenziale complessa}).$$

Notiamo che $|e^{i\theta}| = 1$,infatti $|e^{i\theta}| = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$. Osserviamo che poiché

$$\text{arg } (z \cdot w) = \text{ arg } z + \text{ arg } w.$$

Definizione di esponenziale in $\mathbb{C}$.

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$|e^z| = e^x \qquad \text{arg } e^z = y + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Osserviamo che moltiplicare z per $e^{i\varphi}$ equivale a far effettuare a z una rotazione di φ.

6. Formule di Eulero

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \qquad\qquad e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Da cui $\sin z$ e $\cos z$ in $\mathbb{C}$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Dalla formula

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

abbiamo per $\theta = \pi$ $\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0,}$ nota come l'identità di Eulero.

7. Radici n–sime di un numero complesso

Osservazione 8.

$$z = w \iff \Re z = \Re w, \quad \Im z = \Im w$$

oppure

$$z = w \iff |z| = |w| \quad arg\ z = arg\ w + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Diciamo w radice n–sima di z se e solo se $w^n = z$.
Supponiamo $z \neq 0$, allora

$$w = |w|e^{i\varphi} \qquad\qquad z = |z|e^{i\theta}$$

$$w^n = |w|^n e^{in\varphi} = |z|e^{i\theta}$$

quindi

$$|w|^n = |z| \quad n\varphi = \theta + 2k\pi \quad \text{ossia}$$

$$\begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ \varphi_n = \frac{\theta}{n} + \frac{k}{n}(2\pi)\} \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

al variare di k le radici n–sime *non* sono infinite; *vi sono solo* n *radici distinte* infatti

$$\varphi_{k+pn} = \frac{\theta}{n} + \frac{k}{n}(2\pi) + 2\pi p$$

coincide (modulo 2π) con φ_k

$$\varphi_0 = \frac{\theta}{n} \qquad \varphi_1 = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n} \qquad \varphi_2 = \frac{\theta}{n} + \frac{4\pi}{n}$$

$$\varphi_{n-1} = \frac{\theta}{n} + \frac{n-1}{n}(2\pi)$$

$\{z^{1/n}\}$ n–radici n–sime di z:

$$|w_k| = \sqrt[n]{|z|} \qquad \text{arg } w_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

$$z = |z|e^{i\theta}$$

Dando a k i valori interi consecutivi si hanno gli argomenti:

$$\phi_0 = \frac{\theta}{n} \quad \phi_1 = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}, \quad \phi_2 = \frac{\theta}{n} + \frac{4\pi}{n}, \ldots, \quad \phi_{n-1} = \frac{\theta}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)2\pi,$$

e poi i valori si ripetono.

8. La formula del Binomio e la Formula di Eulero

La formula di Eulero: per $x \in \mathbb{R}$, i unità immaginaria $i^2 = -1$.

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Ricordiamo la

Formula di triplicazione

$$\cos 3x + i \sin 3x = (e^{ix})^3 = (\cos x + i \sin x)^3 =$$

$$= \cos^3 x - i \sin^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \sin^2 x \cos x.$$

Uguagliando la parte reale e la parte immaginaria dei due numeri

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x$$

$$\sin 3x = -\sin^3 x + 3 \cos^2 x \sin x$$

Più in generale si ha

Proposizione 17. *Si ha*

$$\cos nx = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos \frac{(n-k)\pi}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Dimostrazione.

$$\cos nx = \left(\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \right) = \left(\frac{(e^{ix})^n + (e^{-ix})^n}{2} \right) =$$

$$\frac{(\cos x + i \sin x)^n + (\cos x - i \sin x)^n}{2} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\cos^k x (i \sin x)^{n-k} + \cos^k x (-i \sin x)^{n-k}}{2} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(i)^{n-k} + (-i)^{n-k}}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(e^{\frac{i\pi}{2}})^{n-k} + (e^{\frac{-i\pi}{2}})^{n-k}}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(e^{\frac{i(n-k)\pi}{2}}) + (e^{\frac{-i(n-k)\pi}{2}})}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos \frac{(n-k)\pi}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x$$

$\square$

Esercizio 8.1. *Dalla formula di Eulero, $x \in \mathbb{R}$, i unità immaginaria $i^2 = -1$.*

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

ricavare che

$$\sin nx = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin \frac{(n-k)\pi}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Esercizio 8.2. *Dimostrare per induzione per* $\theta \neq 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{e^{i(n+1)\theta}-1}{e^{i\theta}-1}=e^{in\theta/2}\frac{\sin(n+1)\theta/2}{\sin\theta/2}$$

Dimostrazione. . Calcoliamo per $n=1$

$$\frac{e^{2i\theta}-1}{e^{i\theta}-1}=e^{i\theta/2}\frac{\sin\theta}{\sin\theta/2}$$
$$\frac{e^{2i\theta}-1}{e^{i\theta}-1}=e^{i\theta}+1$$
$$e^{i\theta/2}\frac{\sin\theta}{\sin\theta/2}=2e^{i\theta/2}\cos\theta/2=2\cos^2\theta/2+2i\cos\theta/2\sin\theta/2=$$
$$\cos^2\theta/2+\sin^2\theta/2+\cos^2\theta/2-\sin^2\theta/2+2i\cos\theta/2\sin\theta/2=e^{i\theta}+1$$

Supponiamo

$$\frac{e^{in\theta}-1}{e^{i\theta}-1}=e^{i(n-1)\theta/2}\frac{\sin n\theta/2}{\sin\theta/2}$$

e dimostriamo

$$\frac{e^{i(n+1)\theta}-1}{e^{i\theta}-1}=e^{in\theta/2}\frac{\sin(n+1)\theta/2}{\sin\theta/2}=$$

Calcoliamo

$$\frac{e^{i(n+1)\theta}-1}{e^{i\theta}-1}=\frac{e^{i(n+1)\theta}-1}{e^{in\theta}-1}\frac{e^{in\theta}-1}{e^{i\theta}-1}=$$
$$\frac{e^{i(n+1)\theta}-1}{e^{in\theta}-1}e^{-i\theta/2}e^{in\theta/2}\frac{\sin n\theta/2}{\sin\theta/2}=$$
$$\sin n\theta/2=\frac{e^{in\theta/2}-e^{-in\theta/2}}{2i}=\frac{e^{-in\theta/2}}{2i}\left(e^{in\theta}-1\right)$$

Dal calcolo deduciamo che

$$\frac{e^{i(n+1)\theta}-1}{e^{in\theta}-1}=e^{-i\theta/2}e^{in\theta/2}\frac{\frac{e^{-in\theta/2}}{2i}\left(e^{in\theta}-1\right)}{\sin\theta/2}=$$
$$\frac{e^{in\theta}}{\sin\theta/2}\frac{e^{-i(n+1)\theta/2}}{2i}(e^{i(n+1)\theta}-1)=$$
$$\frac{e^{in\theta}}{\sin\theta/2}\sin(n+1)\theta/2$$

□

Esercizio 8.3. *Dimostrare per* $\theta \neq 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ *e utilizzando l'esercizio precedente che*

$$\sum_{k=0}^{n} z^k, \quad z \in \mathbb{C}$$

puó essere limitato con una costante che non dipende da n.

Dimostrazione.

$$\left|\sum_{k=0}^{n} z^k\right|=\left|\frac{e^{i(n+1)\theta}-1}{e^{i\theta}-1}\right|=\left|e^{in\theta/2}\frac{\sin(n+1)\theta/2}{\sin\theta/2}\right|\leq\frac{1}{|\sin\theta/2|}$$

□

9. Principio di identità dei polinomi

Dati i due polinomi

$$\sum_{k=0}^{n_1} a_k z^k \qquad \sum_{k=0}^{n_2} b_k z^k$$

possiamo sempre scrivere i polinomi come

$$\sum_{k=0}^{m} a_k z^k \qquad \sum_{k=0}^{m} b_k z^k,$$

con m maggiore o uguale al grado di entrambi i polinomi. Il polinomio nullo ̀dato dal polinomio che ha tutti i coefficienti nulli. Due polinomi di uguale grado sono uguali se i coefficienti sono uguali. Vale il teorema fondamentale dell'algebra

Teorema 9.1. *Ogni polinomio di grado > 0 ha almeno una radice in $\mathbb{C}$.*

Applicando ripetutamente questo teorema possiamo scomporre il polinomio in fattori di primo grado. Dato

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n_1} a_k z^k,$$

allora

$$P_n(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - \alpha_n)$$

10. Esercizi

Esercizio 10.1. *Calcolare le radici n-sime dell'unità immaginaria*

Esercizio 10.2. *Calcolare le tre radici cubiche del numero complesso $z = 4$.*

r. Calcoliamo il modulo e l'argomento:

$$\rho = 4,$$
$$\theta = 0.$$

Risulta

$$z_1 = 4^{\frac{1}{3}},$$
$$z_2 = 4^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{2}{3} + i\sin\frac{2}{3}) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$z_3 = 4^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{4}{3} + i\sin\frac{4}{3}) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Esercizio 10.3. *Dato $z = 1 + i$, calcolare z^{10}.*

Esercizio 10.4. *Dimostrare*

$$\sum_{n=0}^{N} e^{2\pi inx} = \frac{1 - e^{2\pi ix(N+1)}}{1 - e^{2\pi ix}} \qquad k \in \mathbb{Z},\ x \text{ reale e irrazionale}$$

Dimostrazione.

$$\sum_{n=0}^{N} e^{2\pi inx} = \sum_{n=0}^{N} \left(e^{2\pi ix}\right)^n = \frac{1 - e^{2\pi ix(N+1)}}{1 - e^{2\pi ix}}$$

□

Osserviamo che

$$e^{2k\pi i} = 1, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

quindi

$$e^{z} = e^{z+2\pi i},$$

ossia la funzione e^z è periodica di periodo $2\pi i$.
Osserviamo che per $z \in \mathbb{C}$

$$|z|^2 \neq z^2$$

il primo è un numero reale dato da $\Re(z)^2 + \Im(z)^2$, mentre il secondo è un numero complesso

$$(\Re(z) + i\Im(z))(\Re(z) + i\Im(z)) = \Re(z)^2 - \Im(z)^2 + 2i\Re(z)\Im(z)$$

CAPITOLO 10

Limiti

1. Sulla definizione

- Limiti per $x \to +\infty$ di $f(x)$ (dominio di f superiormente illimitato)

$$\forall \epsilon > 0\, \exists k > 0 : \forall x \in X, x > k \qquad |f(x) - l| < \epsilon \iff \lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

Esempio di funzione che ammette un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

$$f(x) = \arctan x \qquad \lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

La retta $y = \frac{\pi}{2}$ ̀per $x \to +\infty$ è un asintoto orizzontale per la funzione.

$$\forall M > 0\, \exists k > 0 : \forall x \in X, x > k \qquad f(x) > M \iff \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Esempio di funzione

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty,\ n \in \mathbb{N}$$

$$\forall M > 0\, \exists k > 0 : \forall x \in X, x > k \qquad f(x) < -M \iff \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (-x)^{1/3} = -\infty$$

Ricordiamo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = +\infty,\ n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty,\ n \in \mathbb{N}$$

- Limiti per $x \to -\infty$ di $f(x)$ (dominio di f inferiormente illimitato)

$$\forall \epsilon > 0\, \exists k > 0 : \forall x \in X, x < -k \qquad |f(x) - l| < \epsilon \qquad \iff \lim_{x \to -\infty} f(x) = l.$$

Esempio di asintoto orizzontale per $x \to -\infty$

$$f(x) = \arctan x \qquad \lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

Esercizio 1.1. *Disegnare il grafico*

$$\forall M > 0\, \exists k > 0 : \forall x \in X, x < -k \qquad f(x) > M \iff \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Esercizio 1.2. *Disegnare il grafico*

Esempio di funzione

$$f(x) = |x|\,, \quad \lim_{x \to -\infty} |x| = +\infty$$

Esercizio 1.3. *Disegnare il grafico*

$$\forall M > 0\,\exists k > 0 : \forall x \in X, x < -k \qquad f(x) < -M \iff \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$f(x) = x^3 \qquad \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty.$$

Esercizio 1.4. *Disegnare il grafico*

Rispetto alle successioni, il concetto di limite per $x \to x_0$ di $f(x)$ è nuovo. Per avvicinarci a x_0 da punti x dobbiamo assumere x_0 punto di accumulazione per il dominio di f (ossia che in un qualunque intorno di x cadano infiniti punti del dominio di f da cui ci possiamo avvicinare)

- Si ha

$$\forall \epsilon > 0\,\exists \delta > 0 : \forall x \in X,\ 0 < |x - x_0| < \delta \qquad |f(x) - l| < \epsilon \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X, 0 < |x - x_0| < \delta \qquad f(x) > M \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$$

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X, 0 < |x - x_0| < \delta \qquad f(x) < -M \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

- Limite destro

$$\forall \epsilon > 0\,\exists \delta > 0 : \forall x \in X,\ 0 < x - x_0 < \delta \qquad |f(x) - l| < \epsilon \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$$

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X, 0 < x - x_0 < \delta \qquad f(x) > M \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$$

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X, 0 < x - x_0 < \delta \qquad f(x) < -M \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$$

- Limite sinistro

$$\forall \epsilon > 0\,\exists \delta > 0 : \forall x \in X,\ -\delta < x - x_0 < 0 \qquad |f(x) - l| < \epsilon \iff \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l$$

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X, -\delta < x - x_0 < 0 \qquad f(x) > M \iff \lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$$

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X, -\delta < x - x_0 < 0 \qquad f(x) < -M \iff \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$$

Se la funzione ammette limite allora

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

e viceversa. Per funzioni che non sono definite rispettivamente a sinistra o a destra di x_0 si può passare al limite solo da una direzione. Si distingue talvolta il limite sinistro dal limite destro.

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

Caso di non esistenza di limite per $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Non esistono i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}, \qquad \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \sin x, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \cos x.$$

2. Simbolo di Landau: o piccolo

Il simbolo *o piccolo* $o(x)$ significa

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x}=0.$$

Valgono le seguenti proprietà

- $$o(x^n)+o(x^n)=o(x^n)$$
  Perchè
  $$\lim_{x\to 0}\frac{o(x^n)+o(x^n)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x^n)}{x^n}+\lim_{x\to 0}\frac{o(x^n)}{x^n}=0.$$
- $$o(x^n)-o(x^n)=o(x^n)$$
  Perchè
  $$\lim_{x\to 0}\frac{o(x^n)-o(x^n)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x^n)}{x^n}+\lim_{x\to 0}\frac{-o(x^n)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x^n)}{x^n}+\lim_{x\to 0}\frac{o(x^n)}{x^n}=0$$
- $$co(x^n)=o(cx^n)=o(x^n),\ c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$
  Perchè
  $$c\lim_{x\to 0}\frac{o(x^n))}{x^n}=0.$$
  Perchè
  $$\lim_{x\to 0}\frac{o(cx^n)}{x^n}=0.$$
- $$o(x^n)o(x^m)=o(x^{n+m})$$
  Perchè
  $$\lim_{x\to 0}\frac{o(x^n)o(x^m)}{x^{n+m}}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x^n)}{x^n}\lim_{x\to 0}\frac{o(x^m)}{x^m}=0$$
- $$o(o(x^n))=o(x^n)$$
  Perchè
  $$\lim_{x\to 0}\frac{o(o(x^n))}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{o(o(x^n))}{o(x^n)}\frac{o(x^n)}{x^n}=0.$$

2.1. Alcuni Limiti.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\qquad \sin x=x+o(x)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\qquad \cos x=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\qquad \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^b}=0\quad b>0\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^b}{e^x}=0\quad b>0$$

CAPITOLO 11

Continuità e Derivabilità

1. Continuità

Sia dato un punto x_0 nell'insieme di definizione di una funzione f, con x_0 punto di accumulazione per il dominio di f.
f si definisce continua in x_0 se il suo limite per $\to x_0$ coincide con il suo valore in $f(x_0)$, ovvero con $f(x_0)$. In simboli:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

cioè l' operazione di limite in x_0 commuta con la funzione f

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x).$$

Con la notazione o *piccolo*, tenuto conto che posto $h = x - x_0$

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) - f(x_0) = 0,$$

si ha

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + o(h)$$

Se x_0 è isolato nel dominio di f, allora f risulta continua in x_0.

2. Minimo e massimo assoluti per funzioni continue

Data $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ il minimo m e il massimo (assoluti) M di f, se esistono, sono valori del codominio di f, verificanti

$$f(x) \geq m \qquad f(x) \leq M, \qquad \forall x \in [a, b]$$

Teorema 2.1. Teorema di Weierstrass *Una funzione continua su un insieme chiuso e limitato assume il massimo e il minimo assoluti.*

Il minimo e il massimo assoluti della funzione di una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato sono da cercare agli estremi dell'intervallo a e b e all'interno dell'intervallo.

3. Teorema degli zeri

Una funzione continua su un insieme chiuso e limitato $[a, b]$ tale $f(a)f(b) < 0$ ammette almeno un punto interno x_0 a $[a, b]$ in cui $f(x_0) = 0$.

4. Il teorema dei valori intermedi

Vale il teorema dei valori intermedi.

Teorema 4.1. *Una funzione continua su un insieme chiuso e limitato assume tutti i valori compresi tra il minimo m e il massimo assoluti M.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $p \in [m.M]$, Se p vale m o M il teorema è dimostrato. Prendiamo $p \in (m, M)$. Sia x_m e x_M tale che

$$f(x_m) = m \qquad f(x_M) = M$$

Allora

$$F(x) = f(x) - p,$$

è una funzione continua su un insieme chiuso e limitato, che vale

$$F(x_m) = f(x_m) - p < 0,$$
$$F(x_M) = f(x_M) - p > 0,$$

si ha che esiste (teorema degli zeri) un punto ξ per cui

$$F(\xi) = f(\xi) - p = 0,$$

ossia

$$f(\xi) = p$$

□

Si cercano massimi e minimi relativi in insiemi aperti. Data $f : I = (a, b) \to \mathbb{R}$ il minimo m e il massimo M relativo di f, se esistono, sono valori del codominio di f, verificanti per r positivo e sufficientemente piccolo

$$f(x) \geq m \qquad \forall x \in \{|x - x_0| < r\} \cap (a, b),\ f(x_0) = m$$
$$f(x) \leq M \qquad \forall x \in \{|x - x_1| < r\} \cap (a, b),\ f(x_1) = M$$

5. Rapporti incrementali.

Sia $x \in I(f)$, sia Δx un incremento positivo, tale che $x + \Delta x$ sia ancora in $I(f)$, consideriamo

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- $$f(x) = c \qquad \frac{\Delta f}{\Delta x} = 0.$$
- $$f(x) = x \qquad \frac{\Delta f}{\Delta x} = 1.$$
- $$f(x) = x^2 \qquad \frac{\Delta f}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$
- $$f(x) = x^3 \qquad \frac{\Delta f}{\Delta x} = 3x^2 + (\Delta x)^2 + 3x\Delta x.$$
- $$f(x) = x^n \qquad \frac{\Delta f}{\Delta x} =$$
$$\frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x - x)}{\Delta x}(x+\Delta x)^{n-1}+x(x+\Delta x)^{n-2}+\ldots x^{n-2}(x+\Delta x)+(x)^{n-1}$$
- $$f(x) = e^x \qquad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$
- $$f(x) = \log x \qquad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\log(x + \Delta x) - \log x}{\Delta x} = \log(1 + \frac{1}{x}\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

- $$f(x) = \sin x \qquad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$
- $$f(x) = \cos x \qquad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \frac{-2\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

6. Derivabilità

6.1. Derivata. Data una funzione f definita in un intorno di x_0, diciamo $I(f)$, f si dice derivabile nel punto x_0 se esiste ed è finito il limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Seguendo la notazione di Lagrange il valore del limite si indica con $f'(x_0)$ e si chiama derivata prima della funzione in x_0. Anche Sia $x \in I(f)$, sia Δx un incremento positivo, tale che $x + \Delta x$ sia ancora in $I(f)$, consideriamo

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Se esiste ed è finito il limite

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

f si dice derivabile in x_0 e il valore del limite si indica con $f'(x_0)$.

Le due condizioni sono equivalenti.
Con la notazione o *piccolo*

$$f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)h + o(h), \;\; h \to 0$$

Se la funzione $f(x)$ è derivabile in ogni punto di un dato intervallo (a, b), allora si dice che essa derivabile in (a, b), e la funzione $f'(x)$ che associa ad ogni punto x la derivata di f in x è la funzione derivata di f. Possiamo pensare la derivata come un operatore che associa, in ipotesi di esistenza, ad una funzione la sua derivata.

Osserviamo che

- $$f(x) = c \qquad \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 0.$$
- $$f(x) = x \qquad \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 1.$$
- $$f(x) = x^2 \qquad \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 2x + \Delta x = 2x$$
- $$f(x) = x^3 \qquad \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 3x^2 + (\Delta x)^2 + 3x\Delta x = 3x^2$$

- $$f(x) = x^n \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x - x)}{\Delta x} (x+\Delta x)^{n-1} + x(x+\Delta x)^{n-2} + \dots x^{n-2}(x+\Delta x) + (x)^{n-1} = nx^{n-1}$$
- $$f(x) = e^x \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^x$$
- $$f(x) = \log x \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\log(x+\Delta x) - \log x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \log(1+\frac{1}{x}\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}} = \frac{1}{x}$$
- $$f(x) = \sin x \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos x$$
- $$f(x) = \cos x \qquad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = -\sin x$$

La derivata vista come un operatore è lineare, cioè la derivata di una combinazione lineare di funzioni derivabili è la combinazione lineare delle derivate delle singole funzioni, e la derivata del prodotto di uno scalare per una funzione il prodotto dello scalare per la derivata della funzione:
$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$
$$(cf(x))' = cf'(x)$$

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo l'asserto per $x = x_0$. Infatti se f e g sono derivabili in x_0, per $h \to 0$
$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + o(h) \qquad g(x_0 + h) - g(x_0) = g'(x_0)h + o(h)$$
Dunque
$$f(x_0+h) + g(x_0+h) - (f(x_0) + g(x_0)) = f'(x_0)h + g'(x_0)h + o(h) + o(h) =$$
$$f'(x_0)h + g'(x_0)h + o(h).$$
Da cui $f + g$ è derivabile in x_0 e vale l'asserto. Inoltre
$$cf(x_0 + h) - cf(x_0) = cf'(x_0)h + co(h) = cf'(x_0)h + o(h).$$
Da cui cf è derivabile in x_0 e vale l'asserto. □

Geometricamente la derivata di una funzione f in un punto x_0 è il valore del coefficiente angolare, cioè la tangente trigonometrica dell'angolo formato dalla retta tangente un punto della curva di equazione $y = f(x)$ e il semiasse positivo delle x. Valgono le regole di derivazione
$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

DIMOSTRAZIONE. Dimostrare per esercizio □

7. La derivata e la formula di Eulero

Ricordiamo la formula di Eulero $\rho = \lambda + i\theta$ $\lambda, \theta \in \mathbb{R}$

$$e^{\rho} = e^{\lambda + i\theta} = e^{\lambda}\big(\cos\theta + i\sin\theta\big),$$

per $x \in \mathbb{R}$

$$e^{(\lambda+i\theta)x} = e^{\lambda x}\big(\cos\theta x + i\sin\theta x\big),$$

Calcoliamo la derivata rispetto a x

$$D(e^{\lambda x}\cos\theta x) = e^{\lambda x}\big(\lambda\cos\theta x - \theta\sin\theta x\big)$$

e anche

$$D(e^{\lambda x}\sin\theta x) = e^{\lambda x}\big(\lambda\sin\theta x + \theta\cos\theta x\big)$$

Mettendo insieme

$$D(e^{(\lambda+i\theta)x}) = D\big(e^{\lambda x}\big(\cos\theta x + i\sin\theta x\big)\big) =$$
$$D\big(e^{\lambda x}\cos\theta x\big) + iD\big(e^{\lambda x}\sin\theta x\big) =$$
$$e^{\lambda x}\big(\lambda\cos\theta x - \theta\sin\theta x + i\lambda\sin\theta x + i\theta\cos\theta x\big)$$
$$(\lambda + i\theta)e^{\lambda x}\big(\cos\theta x + i\sin\theta x\big) =$$
$$(\lambda + i\theta)e^{\lambda x}e^{i\theta x} = (\lambda + i\theta)e^{(\lambda+i\theta)x}.$$

La formula generalizza in $\mathbb{C}$ la notevole proprietà in $\mathbb{R}$, e dimostra (verficare per induzione) che

$$\boxed{D^n e^{\rho x} = \rho^n e^{\rho x} \qquad \rho \in \mathbb{C}}$$

suggerimento

$$D^{n+1}e^{\rho x} = D(D^n e^{\rho x}) = D(\rho^n e^{\rho x}) = \rho^n D(e^{\rho x}) = \rho^{n+1}e^{\rho x}$$

8. Minimi e massimi interni per funzioni derivabili:Teorema di Fermat

Nello studio di funzione ha interesse definire i minimi e massimi relativi. Sono punti di minimo e massimo in cui la diuguaglianza è verificata in un intorno del punto e potrebbe non essere verificata in tutto l'intervallo Data $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ il minimo relativo m e il massimo relativo M di f, se esistono, sono valori del codominio di f, verificanti

$$\exists r > 0 : f(x) \geq m \qquad f(x) \leq M, \qquad \forall x \in I_r(x) \subset [a, b],$$

ove $I_r(x)$ è un intorno di x di ampiezza $2r$.

Teorema 8.1. Teorema di Fermat *Sia f una funzione derivabile in (a, b) e sia $x_0 \in (a, b)$ punto di massimo o di minimo. Allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. Supponiamo che x_0 sia un punto di massimo relativo interno all'intervallo. Per h piccolo si ha

$$f(x_0+h) \geq f(x_0).$$

Pertanto per h piccolo

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0 \qquad h>0, \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0 \qquad h<0$$

Per la derivabilità di f si avrà $f'(x_0)=0$. □

9. Teorema di Rolle e Lagrange

Teorema 9.1. Teorema di Rolle *Sia f una funzione continua in $[a,b]$, derivabile in (a,b) e sia $f(a)=f(b)$. Allora esiste $x_0 \in (a,b)$ tale che $f'(x_0)=0$.*

Dimostrazione. Il punto in cui è assunto massimo e il punto in cui è assunto il minimo potrebbero trovarsi negli estremi. Dall'ipotesi $m=M$ segue che la funzione è costante. Altrimenti almeno uno dei due è interno e l'asserto segue dal teorema di Fermat.

□

Teorema 9.2. Teorema di Lagrange *Sia f una funzione continua in $[a,b]$, derivabile in (a,b). Allora esiste $x_0 \in (a,b)$ tale che*

$$f(b)-f(a)=f'(x_0)(b-a)$$

.

Dimostrazione. Si introduce la funzione ausiliaria

$$g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

La funzione g è una funzione continua in $[a,b]$, e derivabile in (a,b). Inoltre $g(a)=g(b)$. Applicando il teorema di Rolle esisterà un punto x_0 tale che

$$g'(x_0)=f'(x_0)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$$

da cui l'asserto

□

10. Monotonia: crescenza e descrescenza)

Data una funzione $f: I \to \mathbb{R}$ diciamo che

- f è crescente $\iff$ $f(x_1) \leq f(x_2)$ $x_1 < x_2,\ x_1, x_2 \in I$
- f è strettamente crescente $\iff$ $f(x_1) < f(x_2)$ $x_1 < x_2,\ x_1, x_2 \in I$
- f è decrescente $\iff$ $f(x_1) \geq f(x_2)$ $x_1 < x_2,\ x_1, x_2 \in I$
- f è strettamente decrescente $\iff$ $f(x_1) > f(x_2)$ $x_1 < x_2,\ x_1, x_2 \in I$

$f(x)=\lfloor x \rfloor$ è crescente $f(x)=x$ è strettamente crescente, $f(x)=e^x$ è strettamente crescente per ogni x reale, $f(x)=e^{-x}$è strettamente decrescente per ogni x reale, $f(x)=x^2$ è strettamente crescente per $x \geq 0$ è strettamente decrescente $x \leq 0$; in $x=0$ la funzione cambia la monotonia:

$x = 0$ è un punto critico o stazionario, cambiando da descrescente per valori più piccoli a crescente per valori più grande il punto è di minimo relativo.

Sussiste il seguente teorema di monotonia

Teorema 10.1. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile in I con $f'(x) > 0 \forall x \in I$ allora f è strettamente crescente. Se f è strettamente crescente e derivabile in I allora $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in I$*

Dimostrazione.

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + o(h)$$

Dunque

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0$$

per h piccolo. Inoltre

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0 \qquad h > 0,$$
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} < 0 \qquad h < 0$$

Ossia

$$h > 0,\ x + h > x,\ f(x+h) > f(x)$$
$$h < 0,\ x + h < x,\ f(x+h) < f(x),$$

la funzione è strettamente crescente. Dimostare l'altra implicazione per esercizio. Osserviamo che la funzione $f(x) = x^3$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$ ma in $x = 0$ la sua derivata prima vale 0. □

Analogo risultato per altri casi.

11. Concavità e Convessità

Definizione 11.1. *Sia C aperto. C è convesso $\iff$ $x, y \in C$ implica $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$ con , $\lambda \in [0, 1]$.*

Definizione 11.2. *Sia C aperto e convesso. Una funzione $f : C \to \mathbb{R}$ è convessa se*

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \geq f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \quad \forall x, y \in C, \lambda \in [0, 1]. \tag{2}$$

$f : C \to \mathbb{R}$ è concava se $-f$ è convessa.

Proposizione 18. *Sia C aperto e convesso $f : C \to \mathbb{R}$ è convessa (concava) se e solo se*

$$f(x) = \sup_{i \in \mathbb{N}} g_i(x), \qquad (f(x) = \inf_{i \in \mathbb{N}} g_i(x)) \tag{3}$$

con $g_i(x)$ funzioni affine.

Teorema 11.3. *Disuguaglianza di Jensen . Sia $f : C \to \mathbb{R}$ convessa in C convessa, fè convessa*

$$\iff f(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i),$$

per ogni sottoinsieme $\{x_1, \ldots, x_p\} \subset C$, dove $\lambda_i \geq 0$, $1 \leq i \leq p$ e $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$.

Proposizione 19. *Sia $C \subset \mathbb{R}$ convesso e f convessa in C. Allora ogni punto di minimo relativo àssoluto.*

Teorema 11.4. *Sia $f \in C^1(C)$ convessa su C, con C aperto e convesso. Dato un sottoinsieme K abbiamo*
(4)
$$x^* \in K,\ f(x^*) = \inf_{x\in K} f(x) \text{ se e solo se } x^* \in K, f'(x^*)(x - x^*) \geq 0,\ \forall x \in K$$

Per funzioni C^2 vale la proprietà
$f''(x) > 0$ in $C \implies$ convessa in C
$f''(x) < 0$ in $C \implies$ concava in C.

12. Teorema di De l'Hopital

La regola di de l'Hopital è un procedimento che permette di calcolare limiti di quozienti di funzioni reali di variabile reale che danno luogo alle forme indeterminate
$$\frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty}.$$
Ricordiamo le forme indeterminate riconducibile alle precedenti

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty \lim_{x\to x_0} f(x)g(x) \qquad \boxed{0\cdot\infty}$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{1/g(x)} = \frac{g(x)}{1/fg(x)}$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty \lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} \qquad \boxed{1^\infty}$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{\frac{\ln f(x)}{1/g(x)}}$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} \qquad \boxed{0^0}$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{\frac{\ln f(x)}{1/g(x)}}$$
Siano f e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b), sia $g(x)$, $g'(x)$ e diverse da 0 in ogni punto di tale intervallo, tranne al più in $x_0 \in (a, b)$. Sia inoltre
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$
Se esiste
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$
allora
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

- $$\lim_{x\to 1} x^{\frac{10}{1-x}}.$$
$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{10}{1-x}} = \lim_{x\to 1} e^{\log x^{\frac{10}{1-x}}}$$

Possiamo allora calcolare il limite per $x \to 1$

$$\frac{10}{1-x}\log x$$

Quindi applicando de l'Hopital, il valore del limite è e^{-10}.

13. Lo sviluppo di Mac Laurin

Data f derivabile n volte, Il polinomio di Mac Laurin è dato da

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(0)}{k!} x^k$$

Vale

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n)$$

13.1. Sviluppo di e^x. Dimostrare per induzione che

$$D^n e^x = e^x.$$

Osserviamo che

$$D^n e^x \Big]_{x=0} = 1$$

Allora

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + o(x^n)$$

13.2. Sviluppo di $\sin x$. Dimostrare per induzione che

$$D^n \sin x = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Osserviamo che

$$D^n \sin x \Big]_{x=0} = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^{n-1} & \text{n dispari} \\ 0 & \text{n pari} \end{cases}$$

Allora

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

13.3. Sviluppo di $\cos x$. Dimostrare per induzione che

$$D^n \cos x = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Osserviamo che

$$D^n \cos x \Big]_{x=0} = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^{n-1} & \text{n pari} \\ 0 & \text{n dispari} \end{cases}$$

Allora

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1})$$

13.4. Sviluppo di $\ln(1+x)$**.** Dimostrare per induzione che

$$D^n \ln(1+x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(1+x)^n}$$

Si ha

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{k!}\left[\frac{1}{(1+x)^n}\right]_{x=0} x^k + o(x^n)$$

Allora

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}x^k + o(x^n)$$

Si osservi

$$D^k(x-x_0)^n = \begin{cases} n(n-1)(n-2)....(n-k+1)(x-x_0)^{n-k} & k \le n \\ 0 & k > n \end{cases}$$

Si ha

$$D^k \sum_{i=0}^{n} a_i(x-x_0)^i = \sum_{i=k}^{n} i(i-1)(i-2)....(i-k+1)a_i(x-x_0)^{i-k}$$

14. La formula di Taylor

Data f derivabile n volte, fissato x_0 ci poniamo il problema dell'esistenza di un polinomio di grado non superiore a n

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x-x_0)^i,$$

che abbia la proprietà

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

Lemma

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \iff$$

$$\begin{cases} f(x_0) - P_n(x_0) = 0, \\ f'(x_0) - P_n'(x_0) = 0, \\ .... \\ .... \\ f^n(x_0) - P_n^n(x_0) = 0, \end{cases}$$

dim. Se vale

$$\begin{cases} f(x_0) - P_n(x_0) = 0, \\ f'(x_0) - P_n'(x_0) = 0, \\ .... \\ .... \\ f^n(x_0) - P_n^n(x_0) = 0, \end{cases}$$

Allora, applicando ripetutamente il teorema di De l'Hopital, si ha

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-P_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=.....=\frac{f^n(x_0)-P_n^n(x_0)}{n!}=0$$

Supponiamo ora

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n}=0,$$

e per assurdo

$$f^k(x_0)-P_n^k(x_0)\neq 0,$$

per qualche $k\leq n$. Allora, applicando ripetutamente il teorema di De l'Hopital, si ha

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^k}=\frac{f^k(x_0)-P_n^k(x_0)}{k!}\neq 0$$

Ma

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^k}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n}(x-x_0)^{n-k}=0,$$

una contraddizione.

Per trovare il polinomio imponiamo

$$f^k(x_0)-\sum_{i=k}^{n}i(i-1)(i-2)....(i-k+1)a_i(x-x_0)^{i-k}=0\ k=0,..n$$

In $x=x_0$ si annullano tutti i termini eccetto il termine corrispondente a $i=k$

$$f^k(x_0)-k!a_k=0\ k=0,...,n$$

ossia

$$a_k=\frac{f^k(x_0)}{k!},\ k=0,...,n$$

e

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^i(x_0)}{i!}(x-x_0)^i,$$

Vale

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n}=0,$$

ossia

$$f(x)-P_n(x)=o((x-x_0)^n)\qquad \text{per} x\to x_{x0}$$

Il polinomio di Taylor risponde al problema di approssimare una funzione con un polinomio.

Per le funzioni $\sin x$ e $\cos x$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4),\quad x\to 0$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3),\quad x\to 0$$

14.1. minimi e massimi. Per studiare i massimi e i minimi relativi possiamo guardare il segno della derivata seconda. Infatti se $f''(x_0) > 0$ e$f'(x_0) = 0$, dalla formula

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^3)$$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^3) > 0,$$

per x sufficientemente vicino a x_0 e $f(x) - f(x_0) > 0$ ossia $f(x) > f(x_0)$, per x sufficientemente vicino a x_0.

15. Serie di Taylor

In generale non è vale un risultato di convergenza della serie alla funzione f, anche se la funzione è derivabile infinite volte. Ad esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

è derivabile infinite volte in $x = 0$, e la sua serie di Taylor in $x = 0$ (Serie di Mac Laurin) è la funzione identicamente nulla.
Si ha in $\mathbb{R}$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Esercizio 15.1. *Dopo aver disegnato il grafico,determinare la serie di Taylor di*

$$\cos hx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sin hx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Vale

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Per $z \in \mathbb{C}$, si ha

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Poichè $z = x + iy$ si ha

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!} =$$

$$e^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Osserviamo che le potenze dell'unità immaginaria i si ripetono periodicamente (sono cicliche con periodo 4):

$$i^0 = 1 \ i^1 = i \ i^2 = -1 \ i^3 = -i$$

Per $|x| < 1$, vale

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} x^k.$$

La convergenza si può estendere al caso $x = 1$ (teorema di Abel) e vale

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}.$$

Si osservi che $\ln 2$ può essere ottenuto per $x = -\frac{1}{2}$, dallo sviluppo

$$\ln(1 - \frac{1}{2}) = -\ln 2 == \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} (-1)^k \frac{1}{2^k k}.$$

e quindi

$$\ln 2 == \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k k}.$$

16. Formula di Stirling

James Stirling (Scotland, 1692-1770)
Vale la seguente formula di approssimazione (appare sia e che π)

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \Big(\frac{n}{e}\Big)^n,$$

ossia

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n} = 1,$$

oppure

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}$$

Daremo una dimostrazione di un risultato più debole, esattamente

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}} = C, \ \text{con}\, C \geq 1.$$

Dallo sviluppo di $\ln(1+x)$, valido per $|x| < 1$,

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k},$$

otteniamo

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \sum_{k=1}^{+\infty} [(-1)^{k+1} + 1] \frac{x^k}{k} = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Ora fissiamo $x = \frac{1}{2j+1}$, allora

$$\frac{1 + \frac{1}{2j+1}}{1 - \frac{1}{2j+1}} = \frac{j+1}{j},$$

e di conseguenza

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \ln\left(\frac{j+1}{j}\right) = 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)(2j+1)^{2k+1}}.$$

Quindi posto

$$a_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}},$$

e

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}}{\frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}} = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}\frac{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{(n+1)!e^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{e}(\frac{n+1}{n})^{n+1/2}$$

In forza di

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1/2} = (n+1/2)\ln\frac{n+1}{n} = \frac{2n+1}{2}\frac{2}{2n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)(2n+1)^{2k}}.$$

Poichè

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)(2n+1)^{2k}} < \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^{2k}} = \frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2}\frac{1}{1-\frac{1}{(2n+1)^2}} =$$

$$1 < \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1/2} < 1 + \frac{1}{3}\frac{1}{4(n^2+n)}$$

$$1 < \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1/2} < 1 + \frac{1}{12n}(n+1) < \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Per cui

$$1 < \frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1/2} < \frac{e^{\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n+1}}}$$

e si deduce

- a_n descrescente:
$$a_n > a_{n+1}$$
- $a_n e^{-\frac{1}{n}}$ crescente:
$$a_n e^{-\frac{1}{n}} < a_{n+1}e^{-\frac{1}{n+1}}$$

Dalla decrescenza della successione a_n, poichè a_n è inferiormente limitata da 0, si deduce dal teorema fondamentale sulle successioni monotone che a_n è convergente a $C \geq 0$. Non possiamo escludere da questo ragionamento che C sia nullo, però dalla crescenza della successione $a_n e^{-\frac{1}{n}}$ deduciamo $a_n e^{-\frac{1}{n}} > a_1 e = 1$. Poichè

$$\lim_{n\to+\infty} a_n e^{-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} a_n \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} a_n \lim_{n\to+\infty} = C,$$

risulta $C \geq 1$.

17. Esercizi

Esercizio 17.1. *Data* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *I non vuoto,* x_0 *punto di accumulazione per* I.

(i) *Dare la definizione di* $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$
(ii) *Dare la definizione di* $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.
(iii) *Fare un esempio di una funzione* f *tale che* $\lim_{x\to 1} f(x)$ *non esiste.*

Sia $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. *Allora*

$\boxed{a}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin(f(x)) = 0$ $\boxed{b}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(\sin(x)) = 0$

$\boxed{c}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$

Esercizio 17.2. (i) *Dare la definizione di derivabilità per* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *in* x_0

(ii) *Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di* $f(x) = x^2$ *in* $x_0 = 1$.

(iii) *Dare la definizione di derivabilità parziale rispetto alla variabile* x *per* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *in* (x_0, y_0)
(iv) *Calcolare la derivabilità parziale rispetto alla variabile* x *di* $f(x, y) = \arctan xy$

r. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile in x_0 se esiste finito

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$y - 1 = 2(x - 1) \qquad y = 2x - 1$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile parzialmente in (x_0, y_0) se esiste finito

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\frac{y}{1 + x^2y^2}$$

Esercizio 17.3. *Se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é derivabile allora*

$\boxed{a}$ *f potrebbe non essere continua* $\boxed{b}$ f^2 *é derivabile* $\boxed{c}$ $|f|$ *é derivabile*

r. (a) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivabile allora f è continua. (b) f^2 é derivabile (prodotto di due funzioni derivabili) (c) x, $|x|$ (non derivabile in $x = 0$). La risposta è b.

Esercizio 17.4. *Data*

$$f(x) = 1 - x^{\frac{1}{x}}$$

il punto di minimo di f

$\boxed{a}$ *non esiste* $\boxed{b}$ $x_{min} = 1/e$

$\boxed{c}$ $x_{min} = e$; $\boxed{d}$ $x_{min} = 1$

Esercizio 17.5. *Data la funzione*

$$f(x) = \ln x + \ln(x - 1) - \frac{1}{x}$$

(i) *Determinare l'insieme di definizione*
(ii) *Studiare i limiti agli estremi dell'insieme di definizione*
(ii) *Calcolare la derivata prima.*

CAPITOLO 12

Integrale

1. Calcolo dell'area

Calcoliamo l'area A del segmento di parabola

$$f(x) = x^2 \qquad a \leq x \leq b.$$

Calcoliamo un'approssimazione per eccesso dell'area A.

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} M_n(x_n - x_{n-1}), \qquad M_n = f(x_n) = \sup_{(x_{n-1},x_n)} f(x)$$

Poichè

$$M_n = x_n^2 = \left(a + \frac{(b-a)n}{N}\right)^2,$$

si ottiene

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \left(a + \frac{(b-a)n}{N}\right)^2 \frac{(b-a)}{N},$$

$$S_N = \frac{(b-a)}{N} \sum_{n=1}^{N} a^2 + 2a\frac{(b-a)n}{N} + \left(\frac{(b-a)}{N}\right)^2,$$

Sviluppando i quadrati

$$S_N = \frac{(b-a)}{N}\left(a^2N + 2a\frac{(b-a)}{N}\sum_{n=1}^{N} n + \left(\frac{(b-a)}{N}\right)^2 \sum_{n=1}^{N} n^2\right)$$

$$S_N = \frac{(b-a)}{N}\left(a^2N + 2a\frac{(b-a)^2}{N}\frac{N(N+1)}{2} + \left(\frac{(b-a)}{N}\right)^2 \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}\right) =$$

$$S_N = (b-a)a^2\frac{N}{N} + a\frac{(b-a)^2N(N+1)}{N^2} + \left(\frac{(b-a)}{N}\right)^3 \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

Per $N \to +\infty$,

$$S(x) \to (b-a)a^2 + a(b-a)^2 + \frac{(b-a)^3}{3} =$$

$$a^2b - a^3 + ab^2 + a^3 - 2a^2b + \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} + a^2b - ab^2 = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

Sviluppare per esercizio l'approssimazione per difetto, tenendo conto che $m_n = f(x_{n-1}) = \inf_{(x_{n-1},x_n)} f(x)$ dimostrare che per $N \to +\infty$, vale

$$s_N \to \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

In forza di

$$s_N \le A \le S_N,$$

per $n \to +\infty$ si ottiene

$$A = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

La partizione che abbiamo scelto dell'intervallo $[a, b]$ è fornita da un insieme di $N+1$ punti equispaziati la cui unione disgiunta fornisce $[a, b]$, e l'ampiezza dell'intervallo $[x_{i-1}, x_i)$ è $\frac{b-a}{N}$. In realtà possiamo pensare partizioni dell'intervallo più complicate, osserviamo però che non è detto che aumentando i punti otteniamo un' approssimazione migliore. Ad esempio nel caso in cui i punti in più vengono aggiunti in una zona dove la funzione è piatta: non aggiungiamo termini che danno luogo a una migliore approssimazione.

2. Definizione di integrale

Occorre calcolare le somme inferiori e superiori su partizioni diverse. Per confrontare due qualsiasi partizioni si usa l'unione delle due partizioni e le seguenti proprietà: Se A e B sono due intervalli vale

- $$\inf_A f(x) \ge \inf_B f(x), \qquad \text{se} A \subset B$$
- $$\sup_A f(x) \le \sup_B f(x), \qquad \text{se} A \subset B$$

Si dimostra che data una funzione limitata in un intervallo, date due partizioni qualunque $\mathcal{P}_1 = \{\xi_1, \ldots, \xi_N\}$ e $\mathcal{P}_2 = \{x_1, \ldots, x_M\}$ le somme inferiori sono minori o uguali delle somme superiori, ossia

Teorema 2.1.

$$s = \sum_{n=1}^{N} \inf_{(\xi_{n-1}, \xi_n)} f(\xi)(\xi_n - \xi_{n-1}) \le \sum_{n=1}^{M} \sup_{(x_{n-1}, x_n)} f(x)(x_n - x_{n-1}) = S$$

La dimostrazione del teorema è conseguenza del seguente lemma

Lemma 2.2. *Si considerino due partizioni $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ e la loro unione $\mathcal{P}_3$. Allora*

$$s(\mathcal{P}_1) \le s(\mathcal{P}_3) \le S(\mathcal{P}_3) \le S(\mathcal{P}_2)$$

Dimostrazione. Sia $\mathcal{P}_1 \ne \mathcal{P}_2$. Allora confrontiamo le partizioni $\mathcal{P}_1 = \{x_1, ..., x_N\}$ e $\mathcal{P}_3$. La partizione $\mathcal{P}_3$ conterrà almeno un punto in più (in caso di pi'u punti il ragionamento si itera il ragionamento): ζ e $\zeta \in (x_{k-1}, x_k)$, per qualche k. Allora

$$s(P_1) = \sum_{n=0}^{N} \inf_{(x_{n-1}, x_n)} f(x)(x_n - x_{n-1}) =$$

$$\sum_{n=1}^{k-1} \inf_{(x_{n-1}, x_n)} f(x)(x_{n+1} - x_n) +$$

$$\inf_{(x_{k-1},x_k)} f(x)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{n=k+1}^{N} \inf_{(x_{n-1},x_n)} f(x)(x_{n+1} - x_n) =$$

$$\sum_{n=1}^{k-1} \inf_{(x_{n-1},x_n)} f(x)(x_{n+1} - x_n) +$$

$$\inf_{(x_{k-1},x_k)} f(x)(z - x_{k-1}) + \inf_{(x_{k-1},x_k)} f(x)(x_k - z) + \sum_{n=k+1}^{N} \inf_{(x_{n-1},x_n)} f(x)(x_{n+1} - x_n) =$$

In forza di

$$\inf_{(x_{k-1},x_k)} f(x)(x_k - x_{k-1}) \leq \inf_{(x_{k-1},z)} f(x)(z - x_{k-1})$$

$$\inf_{(x_{k-1},x_k)} f(x)(x_k - x_{k-1}) \leq \inf_{(z,x_k)} f(x)(x_k - z).$$

Quindi

$$s(P_1) \leq \sum_{n=1}^{k-1} \inf_{(x_{n-1},x_n)} f(x)(x_{n+1} - x_n) +$$

$$\inf_{(x_{k-1},z)} f(x)(z - x_{k-1}) + + \sum_{n=k+1}^{N} \inf_{(x_{n-1},x_n)} f(x)(x_{n+1} - x_n) = s(\mathcal{P}_3)$$

Quindi

$$s(P_1) \leq s(\mathcal{P}_3).$$

Dimostrare per esercizio la rimanente parte. □

Se $\sup s = \inf S$, al variare comunque della partizione, si definisce integrale di Riemann di una funzione limitata in un intervallo tale valore e si indica con il simbolo

$$\int_a^b f(x)dx = \sup s = \inf S.$$

Non tutte le funzioni limitate in un intervallo sono integrabili secondo Riemann. Ad esempio, la funzione di Dirichlet non è integrale secondo Riemann in $[0, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Sfruttando la densit'a di $\mathbb{Q}$ e di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, si verifica che $s(x) = 0$ per ogni partizione e $S(x) = 1$ per ogni partizione.

3. Proprietà dell'integrale

Valgono le seguenti proprietà

(1)

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

(2)

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

(3)
$$\int_a^b c_1 f(x) + c_2 g(x) dx = c_1 \int_a^b f(x)dx + c_2 \int_a^b g(x)dx$$

(4)
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

(5) L'integrale di una funzione dispari in un intervallo simmetrico rispetto all'origine vale 0
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

(6) L'integrale di una funzione pari in un intervallo simmetrico rispetto all'origine vale
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

Una classe di funzioni integrabili secondo Riemann in un intervallo $[a, b]$ è la classe delle funzioni continue in $[a, b]$.

4. Primitive

Definizione 4.1. *Una funzione F è una primitativa di una funzione f continua in $[a, b]$ se F è derivabile $F'(x) = f(x)$ in $[a, b]$.*

La caratterizzazione delle funzioni primitive assume allora un ruolo fondamentale. Data una funzione primitiva di f ne esistono altre che non siano un'addizione di F con una qualisiasi constante? Osserviamo che mentre dire che se F è primitiva di f, allora $F + c$ è ancora primitiva è una conseguenza banale del fatto che la derivata di una constante è zero, non è banale dire che tutte le funzioni primitive sono fatte cosi'.

Teorema 4.2. *Se F e G sono due primitive di f in $[a, b]$ allora $F = G + c$.*

La dimostrazione si basa su una conseguenza del teorema di Lagrange

Teorema 4.3. *Se f ha derivata nulla in (a, b) allora f è una costante.*

Se $(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$ allora $(F - G)(x) = c$ e $F = G + c$.

Per le funzioni in continue in $[a, b]$ vale il teorema della media integrale.

Teorema 4.4. *Sia f continua in $[a, b]$. Allora esiste x_0 in $[a, b]$ tale che*
$$f(x_0) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Dimostrazione. Dalle stime sulle somme inferiori e superiori si ha la stima
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a),$$
dove
$$m = \min_{[a,b]} f(x) \qquad M = \max_{[a,b]} f(x).$$

Qiondi

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

è un valore compreso, tra il minimo e il massimo. Il risultato segue allora dal teorema dei valori intermedi per funzioni f continue in $[a, b]$. $\square$

Vale il teorema fondamentale del calcolo integrale

Teorema 4.5. *Sia f continua in $[a, b]$. Indichiamo con*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

allora F è una primitiva della funzione f.

Dimostrazione. Si considera il rapporto incrementale

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_0^{x+h} f(t)dt - \int_0^x f(t)dt\right] =$$

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(x(h)),$$

per il teorema della media integrale. Vale

$$\lim_{h\to 0} x(h) = x, \qquad \lim_{h\to 0} f(x(h)) = f(\lim_{h\to 0} x(h)) = f(x)$$

Quindi esiste finito

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h},$$

e vale $f(x)$. $\square$

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale segue la formula fondamentale del calcolo integrale (il problema dell'integrazione è ricondotto al calcolo di funzioni primitive).

Teorema 4.6.

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Dimostrazione. Si ha

$$F(x) = c + \int_a^x f(t)dt,$$

sostituendo $x = a$

$$F(a) = c,$$

$$F(b) = F(a) + \int_a^b f(t)dt,$$

ossia

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt,$$

$\square$

4.1. Calcolo di Area. Se

$$0 \leq f(x) \leq g(x),$$

allora

$$\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)dx$$

rappresenta l'area compresa tra i grafici delle due funzioni $x = a$ e$x = b$.

5. Integrale Indefinito

Si può associare alla funzione$f$ l'insieme delle sue primitive, ossia l' integrale indefinito. Si indica con il simbolo

$$\int f(x)dx + c,$$

ove c è una costante arbitraria. A differenza dell'integrale definito (che è un numero) l'integrale indefinito è un insieme di funzioni, e se fissiamo la costante c $(= 0)$ otteniamo una funzione.

6. Integrazione per sostituzione

Supponiamo che f sia una funzione integrabile, e $\phi(t)$ una funzione derivabile definita sull'intervallo $[a, b]$ con

$$\phi[a, b] \subset \mathrm{dom} f.$$

Si ha

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

7. Integrazione per parti

Supponiamo che f, g funzioni derivabili,

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$f(x)g(x) = \int \frac{d}{dx} f(x)g(x)dx = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

8. Resto Integrale e di Lagrange

Definizione 8.1. *Se f è derivabile $n+1$ volte, il resto dato dalla formula di Taylor*

$$r(x_0, n) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Se f è derivabile $n + 1$ volte, il resto

$$r_n(x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{n+1}(t)}{n!}(x - t)^n dt$$

Teorema 8.2. *Se f è derivabile $n+1$ volte, il resto*

$$r_n(x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{n+1}(t)}{n!}(x-t)^n dt$$

Dimostrazione. La dimostrazione del risultato segue il principio di induzione. Per $n=0$ il risultato segue da

$$\int_{x_0}^{x} f^1(t)dt = f(x) - f(x_0)$$

Assunto vera l'affermazione al passo $n-1$

$$r_{n-1}(x_0) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k =$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f^n(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}dt = \int_{x_0}^{x} \frac{f^n(t)}{(n-1)!}\left[-\frac{(x-t)^n}{n}\right]' dt =$$

$$-\left[\frac{(x-t)^n}{n!}f^n(t)\right]_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt$$

$$= \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt$$

In conclusione

$$r(x_0, n-1) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt,$$

e quindi

$$r_n(x_0) = f(x) - \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^n(x_0)\right] =$$

$$\int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt.$$

□

Dalla formula del resto integrale si deduce la formula del resto di Lagrange.

Teorema 8.3.

$$r_n(x_0 = f^{n+1}(\xi)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

Dimostrazione.

$$r_n(x_0) = \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt =$$

Assumiamo $x > x_0$. In $[x_0, x]$ applichiamo il teorema della media integrale

$$m \le f^{n+1}(t) \le M,$$

essendo

$$m = \min_{[x_0,x]} f(t) \qquad M = \max_{[x_0,x]} f(t).$$

Abbiamo

$$m\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \le \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt \le M\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ossia

$$m \leq \left[\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right]^{-1} \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt \leq M$$

Dal teorema dei valori intermedi applicato a f^{n+1}, si ha che esiste ξ per cui

$$f^{n+1}(\xi) = \left[\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right]^{-1} \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt,$$

da cui la tesi. □

9. Trascendenza di e

Ricordiamo il seguente risultato di Hermite sulla trascendenze e.

Teorema 9.1. *Il numero e è trascendente, cioè non soddisfa una equazione algebrica a coefficienti interi*

Dimostrazione. Sia f un polinomio di grado n. Abbiamo $f(x) = 0$. Integrando per parti

$$\int_0^a f(x)e^{-x}\,dx + \left[e^{-x}f(x)\right]_0^a + \int_0^a f'(x)e^{-x}dx = 0$$

Ripetendo questa procedura otteniamo

$$\int_0^a f(x)e^{-x}\,dx + \left[e^{-x}(f(x)+f'(x)+\cdots+f^{(n)}(x))\right]_0^a = 0.$$

Per semplicità di scrittura poniamo

$$F(x) = f(x)+f'(x)+\cdots+f^{(n)}(x)$$

Ne segue, moltiplicando per e^a

$$e^aF(0) = F(a) + e^a\int_0^a f(x)e^{-x}\,dx$$

per ogni $a \in \mathbb{R}$. Applichiamo l'identità per $a = 1, \ldots, m$, e moltiplichiamo ciascuna equazione per c_i

$$c_1eF(0) = c_1F(1) + c_1e^1\int_0^1 f(x)e^{-x}\,dx$$

$$c_2e^2F(0) = c_2F(2) + c_2e^2\int_0^2 f(x)e^{-x}\,dx$$

....

$$c_me^mF(0) = c_mF(m) + c_me^m\int_0^m f(x)e^{-x}\,dx$$

Sommiamo

$$c_1eF(0) + c_2e^2F(0) + \cdots + c_me^mF(0) =$$
$$c_1F(1) + c_2F(2) + \cdots + c_mF(m) +$$
$$+c_1e^1\int_0^1 f(x)e^{-x}\,dx + c_2e^2\int_0^2 f(x)e^{-x}\,dx + \ldots c_me^m\int_0^m f(x)e^{-x}\,dx$$

Assumiamo per contraddizione che per alcuni interi $c_0, \ldots, c_m$ tali che $c_0 \neq 0$.

$$c_0 + c_1e + \cdots + c_me^m = 0$$

Deduciamo la seguente identità

$$0 = c_0 F(0) + c_1 F(1) + \cdots + c_m F(m) + \sum_{i=0}^{m} c_i e^i \int_0^i f(x) e^{-x}\, dx.$$

Arriveremo a una contraddizione se troviamo un polinomio f tale che

$$|c_0 F(0) + c_1 F(1) + \cdots + c_m F(m)| \geq 1$$

mentre

$$\Big| \sum_{i=0}^{m} c_i e^i \int_0^i f(x) e^{-x}\, dx \Big| < 1.$$

Fissiamo un numero p primo e sufficientemente grande, soddisfacente $p > m$ e $p > |c_0|$, e consideriamo il polinomio

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1} (x-1)^p (x-2)^p \ldots (x-m)^p.$$

Osserviamo

- f, f',..., $f^{(p-1)}$si annullano tutti in 1, 2,..., m.
- Derivando f otteniamo che $f^{(p)}$, $f^{(p+1)}$,... sono polinomi i cui coefficienti sono multipli interi di p.

Allora dalla definizione di F segue

(5) $$F(1),\ F(2), \ldots, F(m) \quad \text{sono multipli di } p.$$

Inoltre osserviamo che

- $$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(p-2)}(0) = 0$$
  $$f^{(p)}(0),\ f^{(p+1)}(0), \ldots \text{sono multipli di } p.$$
- Inoltre $f^{(p-1)}(0) = (-1)^{mp} (m!)^p$ è un intero, non è un multiplo di p perchè $p > m$. Poichè $0 < |c_0| < p$, segue

  $$F(0) \quad \text{è un intero, non è un multiplo di } p.$$

  Allora

  $$|c_0 F(0) + c_1 F(1) + \cdots + c_m F(m)| \geq 1$$

  Per la dimostrazione

  $$\Big| \sum_{i=0}^{m} c_i e^i \int_0^i f(x) e^{-x}\, dx \Big| < 1.$$

  osserviamo

  $$|f(x)| \leq \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!} \quad \text{if} \quad 0 \leq x \leq m.$$

  Quindi

  $$\Big| \sum_{i=0}^{m} c_i e^i \int_0^i f(x) e^{-x}\, dx \Big| \leq \Big(\sum_{i=0}^{m} c_i e^i \Big) \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!}$$
  $$= \Big(\sum_{i=0}^{m} c_i e^i m^m \Big) \frac{(m^{m+1})^{p-1}}{(p-1)!}.$$

Poichè l'ultimo termine tende a 0 per $p \to +\infty$, per p grande si ottiene la disuguaglianza.

$\square$

9.1. Funzione Γ di Eulero. Per $x > 0$

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

L'integrale è ben definito e vale

$$\Gamma(1) = 1,$$
$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)\, \forall x > 0$$
$$\Gamma(n+1) = n!\, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dimostrare per esercizio.

9.2. Trasformata di Fourier. Data f definiamo (ove ha senso) la trasformata di Fourier di f

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(t) dt,$$

calcolare la trasformata di $f(x) = \cos x$, $f(x) = \sin x$.

10. Esercizi

Esercizio 10.1. *Calcolare*

$$\int \log x dx \qquad \int x e^x dx,$$

utilizzando la formula di integrazione per parti.

Esercizio 10.2. *Per $m \geq 2$ dimostare tramite integrazione per parti che vale la formula*

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x\ dx = \frac{m-1}{m} \int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x\ dx.$$

Segue allora iterando la formula

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\ dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2}$$
$$\int_0^{\pi/2i} \sin^{2n+1} x\ dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

e

$$\frac{\pi}{2} = \frac{((2n)!!)^2}{(2n+1)!!(2n-1)!!} \frac{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\ dx.}{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\ dx.}$$

Ora

$$1 < \frac{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\ dx.}{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\ dx} = \frac{2n+1}{2n} \frac{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\ dx.}{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x\ dx.} \leq 1 + \frac{1}{2n},$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\ dx.}{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\ dx} = 1,$$

e

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{((2n)!!)^2}{(2n+1)!!(2n-1)!!}$$

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{((2n)!!)^2}{(2n+1)!!(2n-1)!!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^2\cdot 4^2\cdot\cdot(2n-2)^2\cdot(2n)^2}{3^2\cdot 5^2\cdot\cdot(2n-1)^2\cdot(2n+1)}$$

e

$$\sqrt{\pi} = \sqrt{2}\lim_{n\to+\infty} \frac{2\cdot 4\cdot\cdot(2n-2)\cdot(2n)}{3\cdot 5\cdot\cdot(2n-1)\cdot\sqrt{(2n+1)}} = \sqrt{2}\lim_{n\to+\infty} \frac{2\cdot 4\cdot\cdot(2n-2)\cdot(\sqrt{2n})}{3\cdot 5\cdot\cdot(2n-1)}$$

$$\sqrt{\pi} = \sqrt{2}\lim_{n\to+\infty} \frac{2^2\cdot 4^2\cdot\cdot(2n-2)^2\cdot(2n)^2}{(2n)!\sqrt{2n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}$$

Ricapitolando

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}$$

Esercizio 10.3. *Calcolare l'integrale*

$$\int_0^{2\pi} |x-\frac{\pi}{2}|\sin x\ dx.$$

r. $$\int_0^{2\pi} |x-\frac{\pi}{2}|\sin x\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-x+\frac{\pi}{2})\sin x\ dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} (x-\frac{\pi}{2})\sin x\ dx.$$

Integrando per parti l'integrale contenente $x\sin x$ si ottiene

$$\int_0^{2\pi} |x-\frac{\pi}{2}|\sin x\ dx = -2-\pi.$$

Esercizio 10.4. *Calcolare l'integrale*

$$\int_{-3}^{3} |x+2|+|x-1|\ dx.$$

r. *Abbiamo*

$$\int_{-3}^{-2} (-x-2)+(-x+1)dx = \int_{-3}^{-2} -2x-1dx = -x^2-x|_{-3}^{-2} = 4,$$

$$\int_{-2}^{1} (x+2)+(-x+1)dx = \int_{-2}^{1} 3dx = 3x|_{1}^{-2} = 9,$$

$$\int_{1}^{3} (x+2)+(x-1))dx = \int_{1}^{3} 2x+1dx = x^2+x|_1^3 = 10.$$

Da cui

$$\int_{-3}^{3} |x+2|+|x-1|dx = 23.$$

Esercizio 10.5. *Determinare* $a\in(-1,1)$ *tale che*

$$\int_0^a \frac{dx}{1-x^2} = \ln 2.$$

r. Abbiamo

$$\int_0^a \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+a}{1-a}$$

Da cui

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+a}{1-a} = \ln 2,$$

$$\frac{1+a}{1-a} = 4.$$

Quindi

$$a = \frac{3}{5}.$$

Esercizio 10.6. *Calcolare l'integrale*

$$\int \frac{x}{x^2+x+1}dx.$$

r. L'integrale si puó scrivere:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{-1}{x^2+x+1}dx =$$

$$\int \frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{-1}{x^2+x+1}dx =$$

$$\frac{1}{2}\log(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + c,$$

tenuto conto che

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Esercizio 10.7. *Calcolare gli integrali*

$$\int_1^2 \frac{1}{3}(x^x(\log x+1))dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} |\cos^2 x - \sin^2 x|dx.$$

r. Calcoliamo il primo integrale. Abbiamo

$$\int_1^2 \frac{1}{3}(x^x(\log x+1))dx = \frac{2^2-1^1}{3} = 1.$$

Calcoliamo il secondo integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} |\cos^2 x - \sin^2|dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\cos 2x|dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 10.8. *Calcolare l' integrale*

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos(\pi-x)}dx.$$

r. Risulta

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos(\pi - x)} dx = -\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x} dx =$$

posto

$$y = \frac{\pi}{2} + x,$$

procediamo per sostituzione

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} \frac{1}{\sin y} dy = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} \frac{1}{2\cos\frac{y}{2}\sin\frac{y}{2}} dy.$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per

$$\frac{1}{\cos^2\frac{y}{2}},$$

troviamo

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{y}{2}}}{\tan\frac{y}{2}} d(\frac{y}{2}).$$

Da cui otteniamo il calcolo dell'integrale

$$-\ln|\tan z|$$

ove $z = \frac{y}{2}$ calcolato tra $z = \frac{\pi}{4}$ e $z = \frac{\pi}{3}$. Quindi

$$-\ln|\tan(\frac{\pi}{3})| = -\ln\sqrt{3}.$$

Esercizio 10.9. *Calcolare*

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin x - 1|}{\sin^2 x} dx.$$

r. Abbiamo

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin x - 1|}{\sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\sin^2 x} dx =$$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx =$$

$$\log|\tan(\frac{\pi}{6})| + \cot\frac{\pi}{3} = \log\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Esercizio 10.10. *Calcolare*

$$\int \frac{1}{5 - 3\cos x} dx.$$

r. *Poniamo*

$$x = \arctan t$$

ossia

$$t = \tan\frac{x}{2}.$$

Da cui

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Inoltre

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt,$$

$$\int \frac{1}{5-3\cos x}dx = \int \frac{2}{8t^2+2}dt = \int \frac{1}{4t^2+1}dt =$$

Poniamo

$$z = 2t$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{z^2+1}dz = \frac{1}{2}\arctan z.$$

Sostituendo z si ha

$$\int \frac{1}{5-3\cos x}dx = \frac{1}{2}\arctan\Big(2\tan\frac{x}{2}\Big).$$

Esercizio 10.11. *Calcolare l'integrale, al variare $0 < \lambda < 1$,*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin \lambda x| \sin \lambda x dx.$$

r. Essendo $0 < \lambda < 1$, $0 < \lambda x < \frac{\pi}{2}$, quindi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin \lambda x| \sin \lambda x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \lambda x)^2 dx.$$

Sostituendo $\lambda x = t$, $\lambda dx = dt$, da cui $dx = \frac{1}{\lambda}dt$ Da cui l'integrale indefinito si risolve per sostituzione ed integrazione per parti (oppure fecendo uso di formule trigonometriche). Si ottiene

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2\lambda}\sin\frac{\lambda\pi}{2}\cos\frac{\lambda\pi}{2}.$$

Esercizio 10.12. *Calcolare l'integrale*

$$\int_0^{\frac{3}{4}\pi} |\sin x| \cos|x| |\cos x| dx.$$

r. Nell'insieme $[0, \frac{3\pi}{4}]$ la funzione $\sin x$ è non negativa, quindi

$$|\sin x| = \sin x$$

e anche x, quindi $|x| = x$, mentre $\cos x$ cambia segno e quindi

$$\int_0^{\frac{3\pi}{4}} |\sin x| \cos|x| |\cos x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x(\cos x)^2 dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin x(\cos x)^2 dx,$$

quindi

$$\int_0^{\pi} |\sin x| \cos|x| dx = \frac{1}{3}(1 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^3).$$

Esercizio 10.13. *Calcolare l'integrale*

$$\int_e^{2e} \frac{\log x}{x}\, dx$$

Esercizio 10.14. *Dimostrare, utilizzando risultati di teoria, che*

$$\int_0^1 e^{t^2} dt > \frac{43}{30}.$$

r.Abbiamo

$$e^{t^2} = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2} + O_4(t)$$

con

$$O_4(t) > 0$$

in $(0, 1]$. Quindi

$$e^{t^2} \geq 1 + t^2 + \frac{t^4}{2}$$

e

$$\int_0^1 e^{t^2} dt > \int_0^1 (1 + t^2 + \frac{t^4}{2}) dt = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} = \frac{43}{30}.$$

Esercizio 10.15. *Calcolare lo sviluppo di MacLaurin di Ffino al secondo ordine, con il resto di Lagrange, ove*

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

rApplichiamo il teorema fondamentale del calcolo

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

$$f'(x) = e^{-x^2}.$$

Abbiamo

$$f''(x) = -2xe^{-x^2},$$

$$f'''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2},$$

e calcolato in ξ

$$f'''(\xi) = -2e^{-\xi^2} + 4\xi^2 e^{-\xi^2},$$

$$f(x) = x + \frac{1}{3!}(-2e^{-\xi^2} + 4\xi^2 e^{-\xi^2}) x^3,$$

ove ξ è in $(0, x)$.

Esercizio 10.16. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\int_0^x e^{-t} \sin \sqrt{t} dt}{\sin x}.$$

r Il limite è nella forma $\frac{0}{0}$. Applicando de l'Hopital, e utilizzando il teorema fondamentale del calcolo per il numeratore si ha che il limite è 0.

Esercizio 10.17. *Calcolare l'area del triangolo che ha come estremi* $(0, 0)$, $(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, 0)$ *e* $(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, f(\frac{\sqrt{\pi}}{2}))$ *con*

$$f(x) = \tan x^2 + e^{-x^2} - 1.$$

Specificare (motivando la risposta) se tale area costituisce un'approssimazione per eccesso o per difetto dell'area della regione piana limitata individuata dall'asse x, *dalle rette* $x = 0$, $x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ *e dal grafico della funzione* f.

r L'area del triangolo si ottiene:

$$A = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{-\pi}{4}}.$$

Inoltre tale area costituisce un'approssimazione per difetto, essendo la funzione convessa e dunque il suo grafico al di sotto della retta congiungente $(\sqrt{\frac{\pi}{4}}, e^{-\sqrt{\frac{\pi}{4}}})$ e $(0,0)$:

$$f(x) = \tan x^2 + e^{-x^2} - 1 \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{\frac{-\pi}{4}}x, \qquad x \in (0, \frac{\sqrt{\pi}}{2}).$$

Da cui il risultato segue per integrazione.

Esercizio 10.18. *Valutiamo*

$$\int \sin x \cos x dx = \int \sin x d(\sin x) = \frac{1}{2}\sin^2 x + c$$

Ma vale anche

$$\int \sin x \cos x dx = -\int \cos x d(\cos x) = -\frac{1}{2}\cos^2 x + c$$

Trovare la spiegazione

CAPITOLO 13

Studio di funzioni

1. Studio di funzioni

(1) Insieme di definizione.
(2) Insieme dei punti singolari interni all'insieme di definizione..
(3) Studio del segno
(4) Comportamento asintotico di f.
(5) Insieme di derivabilità di f e calcolo della $f'(x)$.
(6) Studio dell'insieme ove la funzione f non è derivabile (punti angolosi, cuspidi).
(7) Intervalli di monotonia.
(8) Insieme ove la funzione è derivabile due volte e ivi calcolo della $f''(x)$.
(9) Convessità e di concavità.
(10) I punti di massimo, minimo relativo e i flessi.
(11) Estremo superiore ed inferiore dei valori assunti dalla f, specificando se si tratta di massimo o minimo
(12) tracciare il grafico

2. Grafici di funzioni elementari

FIGURA 1. Grafico di $f(x) = \sin x$ $f(x) = \sin 2x$ $f(x) = \sin(\frac{1}{2}x)$

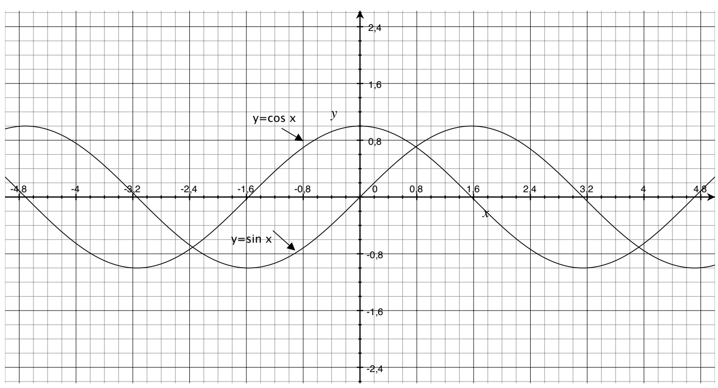


FIGURA 2. Grafico di $f(x) = \sin x$, grafico di $f(x) = \cos x$

Calcolare

$$\int_0^{2\pi} |\cos x - \sin x| dx.$$

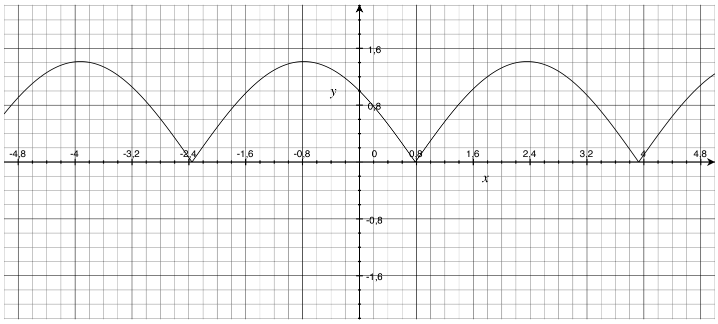


FIGURA 3. Grafico di $f(x) = |\cos x - \sin x|$

3. La funzione esponenziale

$$f(x) = e^x$$

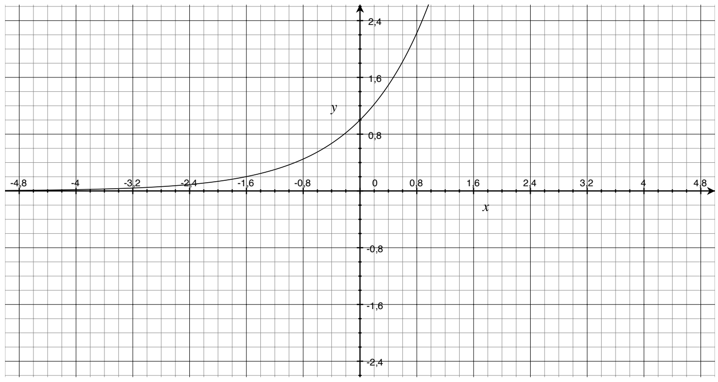


FIGURA 4. Grafico di $f(x) = e^x$.

(1) Insieme di definizione. $\mathbb{R}$.
(2) Insieme dei punti singolari. $\{\emptyset\}$
(3) Studio del segno. Sempre positiva
(4) Comportamento asintotico di f. $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ $\quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
(5) Insieme di derivabilità di f e calcolo della $f'(x)$. $\mathbb{R}$, $\quad f'(x) = e^x$
(6) Studio dell'insieme ove la funzione f non è derivabile (punti angolosi, cuspidi). $\{\emptyset\}$
(7) Intervalli di monotonia. $f'(x) > 0$ in $\mathbb{R}$ da cui si evince che la funzione è crescente.
(8) Insieme ove la funzione è derivabile due volte e ivi calcolo della $f''(x)$. $\mathbb{R}$, $\quad f''(x) = e^x$
(9) $f''(x) > 0$ in $\mathbb{R}$, da cui si evince che l'intervallo di convessità è $\mathbb{R}$
(10) I punti di massimo, minimo relativo e i flessi. $\{\emptyset\}$
(11) Estremo superiore ed inferiore dei valori assunti dalla f, specificando se si tratta di massimi o minimi. $\inf_{\mathbb{R}} f(x) = 0, \quad \sup_{\mathbb{R}} f(x) = +\infty$.

4. La Funzione logaritmo

$$f(x) = \ln x$$

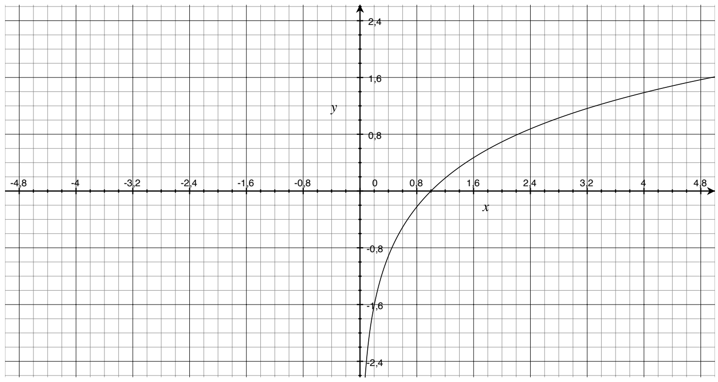


FIGURA 5. Grafico di $f(x) = \ln x$.

(1) Insieme di definizione. $(0, +\infty)$.
(2) Studio del segno. Positiva per $x > 1$
(3) Comportamento asintotico di f.

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

(4)

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

(5) Insieme di derivabilità di f e calcolo della $f'(x)$ $\mathbb{R}$ $\quad f'(x) = \frac{1}{x}$
(6) Studio dell'insieme ove la funzione f non è derivabile (punti angolosi, cuspidi). $\{\emptyset\}$
(7) Intervalli di monotonia. $f'(x) > 0$ in $\mathbb{R}$ da cui si evince che la funzione è sempre crescente.
(8) Insieme ove la funzione è derivabile due volte e ivi calcolo della $f''(x)$. $(0, \infty)$, $\qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$
(9) I punti di massimo, minimo relativo e i flessi. $\{\emptyset\}$
(10) Convessità e di concavità. $f''(x) < 0$ in $(0, \infty)$, da cui si evince che l'intervallo di concavità è $(0, \infty)$
(11)

$$\inf f(x) = -\infty, \qquad \sup f(x) = +\infty.$$

5. La funzione seno cardinale

La funzione sinc normalizzata è cosi definita

$$\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} & x \neq 0, \\ 1 & x = 0, \end{cases} \tag{6}$$

la funzione sinc non-normalizzata,

$$\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \neq 0, \\ 1 & x = 0, \end{cases} \tag{7}$$

La funzione sinc non-normalizzata assume il valore zero per multipli, non

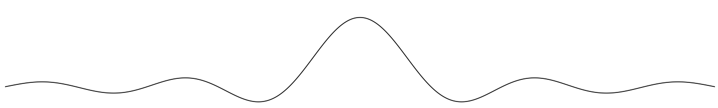


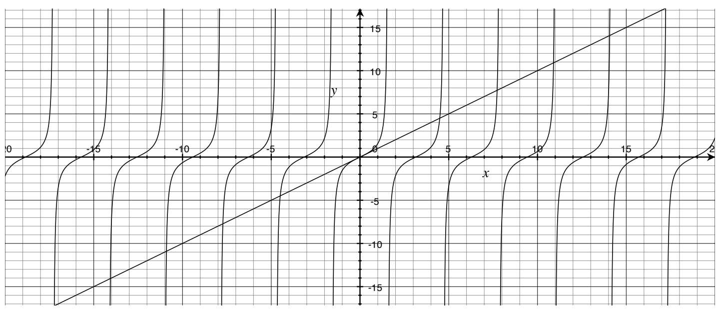
FIGURA 6. Grafico di $f(x) = \operatorname{sinc} x$ normalizzata

nulli, di π; quella normalizzata per valori interi, sempre diversi da zero. Ci occupiamo d'ora in poi della funzione sinc non normalizzata La funzione sinc è continua e

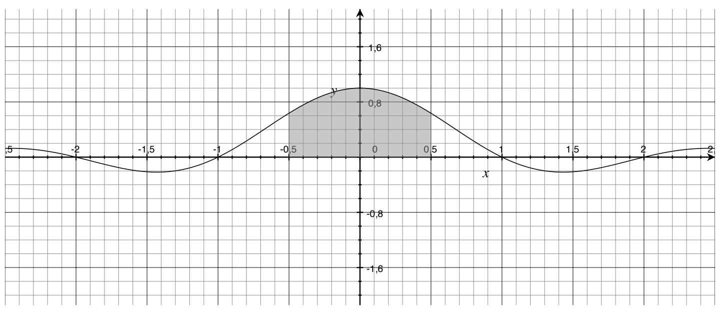
$$\frac{d}{dx}\operatorname{sinc}(x) = -\frac{\sin x}{x^2} + \frac{\cos x}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sinc}(x) = 0 \iff \tan x = x$$

Grafico di $f(x) = \tan x$ e $f(x) = x$ La funzione sinc non è elementarmente



integrabile. Tuttavia si può dimostrare



$$\int_0^{+\infty} \mathrm{sinc} x dx = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{+\infty} |\mathrm{sinc} x| dx = +\infty$$

$$a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\mathrm{sinc} x|\, dx = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx$$

Ponendo

$$t = x - n\pi$$

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{|\sin(t+n\pi)|}{t+n\pi} dx = \int_0^{\pi} \frac{|\sin t|}{t+n\pi} dx$$

Poichè $\frac{1}{t+n\pi} \geq \frac{1}{\pi+n\pi}$

$$\int_0^{N\pi} |\mathrm{sinc} x| dx = \sum_0^{N-1} a_n \geq \sum_0^{N-1} \frac{2}{(1+n)\pi},$$

che mostra la divergenza

6. Esercizi

Esercizio 6.1. *Studiare e disegnare il grafico della funzione*

$$f(x) = \ln(x^2 - 2|x| - 3).$$

r. *Occorre risolvere i problemi*

$$x \geq 0, \qquad x^2 - 2x - 3 > 0$$

e

$$x < 0, \qquad x^2 - +2x - 3 > 0.$$

Da cui

$$x \geq 0, \qquad x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) > 0$$

e

$$x < 0, \qquad x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1) > 0.$$

Quindi si ha

$$x > 3$$

e

$$x < -3.$$

Insieme di definizione:

$$(-\infty - 3) \cup (3, +\infty).$$

Intersezioni con gli assi nei punti $x = 1 + \sqrt{5}$ *e* $x = -1 - \sqrt{5}$.

Inoltre abbiamo

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = -\infty,$$

mentre

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$

Inoltre per $x > 3$

$$f'(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x-3}$$

è positiva nell'insieme di definizione per $x > 3$, pertanto in tale intervallo la funzione è crescente. Inoltre la derivata seconda

$$f''(x) = \frac{2(x^2-2x-3)}{(x^2+2x-3)^2} - \frac{(2x-2)^2}{(x^2-2x\ \ -3)^2}$$

è negativa, pertanto la funzione è concava.

Analogamente per $x < -3$

$$f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x-3}$$

è positiva nell'insieme di definizione, per $x < -3$, pertanto in tale intervallo la funzione è crescente.

$$f''(x) = \frac{2(x^2+2x-3)}{(x^2+2x-3)^2} - \frac{(2x+2)^2}{(x^2+2x\ \ -3)^2}$$

è negativa, pertanto la funzione è concava.

Da cui il grafico

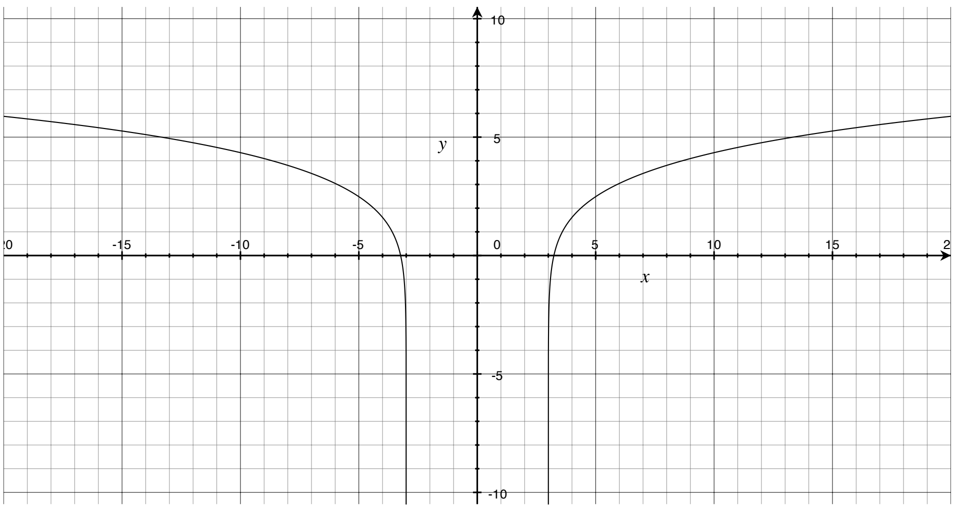


FIGURA 7. Grafico di $f(x) = \ln(x^2 - 2|x| - 3)$

Esercizio 6.2. *Studiare e disegnare il grafico della funzione*

$$f(x) = \frac{1+\ln(x-e)^2}{x-e}.$$

r. *Insieme di definizione:*

$$x \neq e$$

asintoto verticale.

Abbiamo

$$\lim_{x \to e^+} \frac{1+\ln(x-e)^2}{x-e} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to e^-} \frac{1 + \ln(x-e)^2}{x-e} = +\infty.$$

Inoltre

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \ln(x-e)^2}{x-e} = 0,$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1 + \ln(x-e)^2}{x-e} = 0.$$

Da cui $y = 0$ è un asintoto orizzontale.

Si assuma $x > e$. Calcolando la derivata si ha $x = \sqrt{e} + e$ è un punto di massimo relativo.

Si assuma $x < e$ allora $x = -\sqrt{e} + e$ è un punto di minimo relativo. Si ha un flesso per $x = 2e$ e per $x = 0$.

Disegnare il grafico.

Esercizio 6.3. *Studiare e disegnare il grafico della funzione*

$$f(x) = x^x e^{-x}.$$

r. *La funzione è definita per $x > 0$. Inoltre*

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1,$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Studiamo la derivata prima.

$$f(x) = e^{x \ln x} e^{-x} = e^{x \ln x - x}.$$

Da cui

$$f'(x) = x^x e^{-x}(x \ln x - x)' = x^x e^{-x}(\ln x + 1 - 1).$$

Dunque la derivata prima si annulla per $x = 1$. In tal punto la funzione vale e^{-1}. Calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = x^x e^{-x}((\ln x)^2 + \frac{1}{x}).$$

Pertanto la funzione non presenta flessi e risulta convessa nel suo insieme di definizione. Quindi $x = 1$ risulta essere un punto di minimo.

Da cui il grafico della funzione.

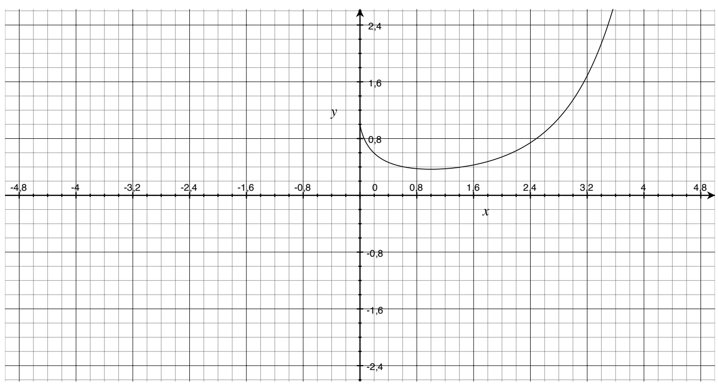


Figura 8. Grafico di $f(x) = x^x e^{-x}$

Esercizio 6.4. *Studiare e disegnare il grafico della funzione*

$$f(x) = \sqrt{|x^2 - 2| - 2}.$$

r.*Basta studiare la funzione per $x > 0$, essendo una funzione pari. La funzione è definita per $x > 2$. In $x = 2$ vale zero, è sempre crescente e concava.*

Da cui il grafico della funzione.

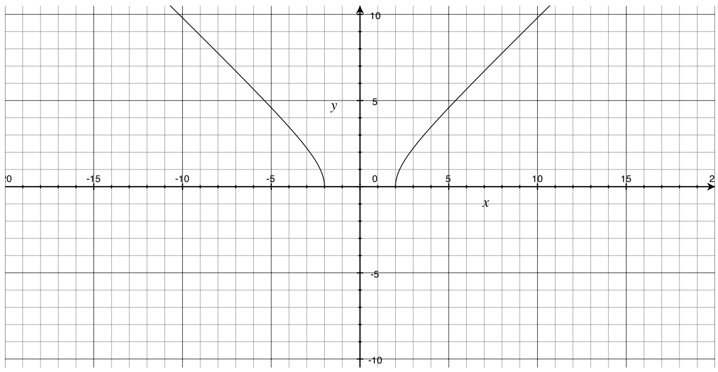


FIGURA 9. Grafico di $f(x) = \sqrt{|x^2 - 2| - 2}$

Esercizio 6.5. *Studiare e disegnare il grafico della funzione*

$$f(x) = \ln(x \ln x).$$

r. *La funzione è definita in $I = (1, +\infty)$ e ivi di classe C^∞.*

Abbiamo

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty.$$

Poichè f è derivabile in I, si ha per $x > 1$

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln x}(\ln x + 1)$$

Quindi f è crescente in $(1, +\infty)$ e non ha punti di massimo o minimo in tale intervallo.

Per $x > 1$ calcoliamo la derivata seconda che risulta negativa pertanto la funzione è concava:

$$f''(x) = \frac{1}{(x \ln x)^2}\left(\frac{1}{x} x \ln x - (1 + \ln x)^2\right).$$

Quindi f è concava in I. Da cui il grafico della funzione

Esercizio 6.6. *Studiare e disegnare il grafico della funzione*

$$f(x) = |x| \ln |x|.$$

(Si richiede di studiare in particolare la regolarità della funzione in $x = 0$).

r.*La funzione è definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, continua e pari. Si ha*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

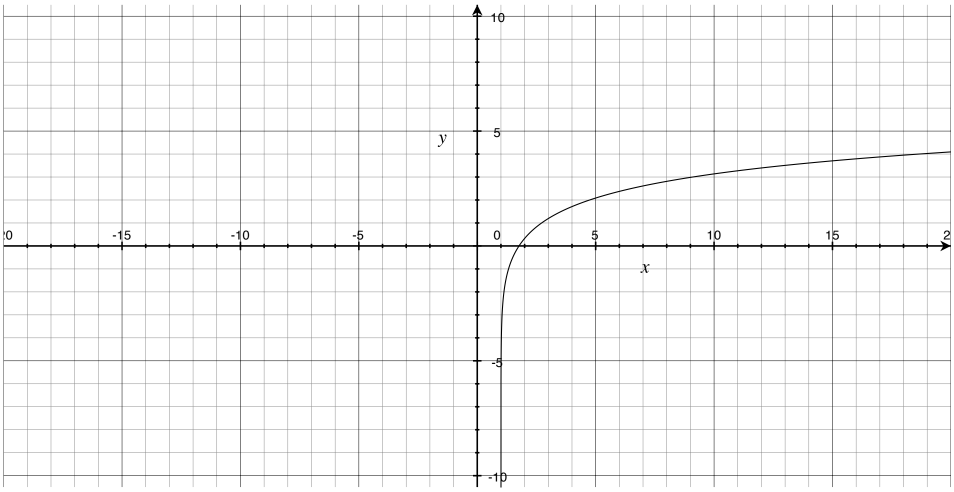


FIGURA 10. Grafico di $f(x) = \ln(x \ln x)$

Il punto $x = 0$ è una singolarità eliminabile.

Studiamo la funzione per $x > 0$. Si ha

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = x\frac{1}{x} + \ln x = 1 + \ln x.$$

Abbiamo

$$f'(x) = 0$$

se e solo se

$$x = \frac{1}{e}.$$

Il valore della funzione in $x = \frac{1}{e}$ è dato da $-\frac{1}{e}$.

Inoltre

$$f''(x) = \frac{1}{x}$$

è sempre positiva per x positivo, pertanto la funzione è convessa e il punto $x = \frac{1}{e}$ è un punto di minimo. La funzione risulta prolungabile con continuità in $x = 0$, mentre

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty,$$

mentre

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = +\infty.$$

Pertanto il punto $x = 0$ è un punto di cuspide. Dalla parità segue il grafico della funzione

Esercizio 6.7. *Studiare e disegnare il grafico della funzione*

$$f(x) = (x^2 + x)e^{-2|x|}.$$

In particolare esaminare la continuità e la derivabilità nel punto $x = 0$.

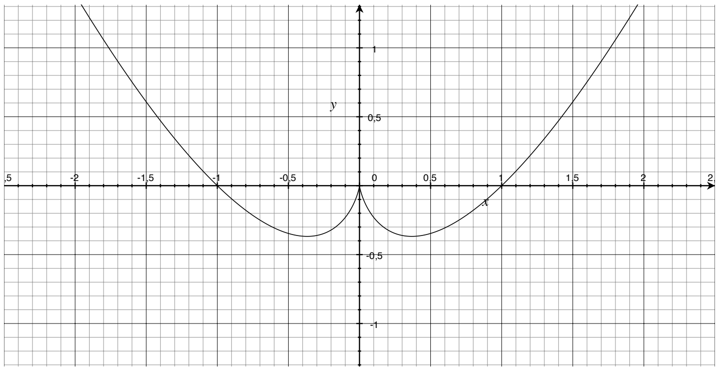


FIGURA 11. Grafico di $f(x) = |x| \ln |x|$.

r. *La funzione è definita in* $\mathbb{R}$, *si annulla in* $x = 0$, *e* $x = -1$. *Supponiamo* $x > 0$. *Allora*

$$f(x) = (x^2 + x)e^{-2x}.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

La derivata prima della funzione è

$$f'(x) = (2x + 1)e^{-2x} - 2(x^2 + x)e^{-2x},$$
$$f'(x) = (2x + 1 - 2x^2 - 2x)e^{-2x},$$
$$f'(x) = (1 - 2x^2)e^{-2x}.$$

Quindi la derivata prima, nell'intervallo considerato, si annulla in $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ *Dallo studio del segno della derivata segue che la funzione ha in* $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ *un punto di massimo relativo.*

La derivata seconda vale

$$f''(x) = (-4x)e^{-2x} - 2(1 - 2x^2)e^{-2x},$$
$$f''(x) = (4x^2 - 4x - 2)e^{-2x}.$$

La derivata seconda si annulla, nell'intervallo considerato, per

$$x = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{4}.$$

Per $0 < x < \frac{2+2\sqrt{3}}{4}$ *la derivata seconda è negativa, pertanto la funzione è concava, mentre è positiva per* $x > \frac{2+2\sqrt{3}}{4}$, *pertanto la funzione è convessa in tale intervallo.*

Per $x < 0$ *si ha*

$$f(x) = (x^2 + x)e^{2x}.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

La derivata prima della funzione è

$$f'(x) = (2x + 1)e^{2x} + 2(x^2 + x)e^{2x},$$
$$f'(x) = (2x + 1 + 2x^2 + 2x)e^{2x},$$

$$f'(x) = (2x^2 + 4x + 1)e^{2x}.$$

Quindi la derivata prima, nell'intervallo considerato, si annulla in $x = \frac{-4-2\sqrt{2}}{4}$ *e in* $x = \frac{-4+2\sqrt{2}}{4}$.

Dallo studio del segno della derivata segue che la funzione ha in $x = \frac{-4-2\sqrt{2}}{4}$ *un punto di massimo relativo, mentre in* $x = \frac{-4+2\sqrt{2}}{4}$ *un punto di minimo relativo. La derivata seconda vale*

$$f''(x) = 2(2x^2 + 6x + 3)e^{2x}.$$

La derivata seconda si annulla per

$$x = \frac{-6 - 2\sqrt{3}}{4},$$

$$x = \frac{-6 + 2\sqrt{3}}{4}.$$

Per $\frac{-6+2\sqrt{3}}{4} < x < 0$ *la derivata seconda è positiva, pertanto la funzione è convessa, tra le due radici la funzione è concava, mentre per* $x < -\frac{-6-2\sqrt{3}}{4}$ *la funzione è convessa. La funzione è continua e derivabile in* $x = 0$*, mentre non esiste la derivata seconda in* $x = 0$.

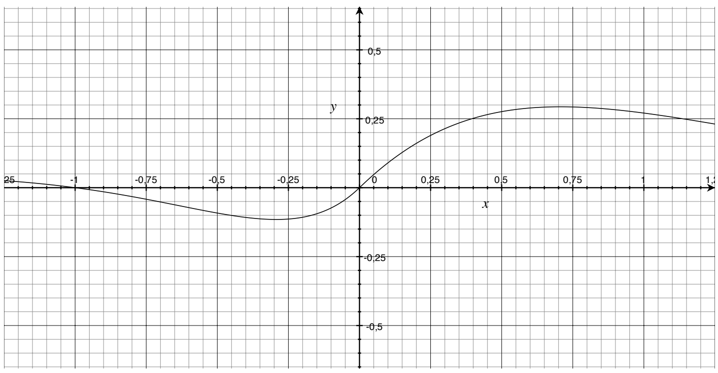


FIGURA 12. Grafico di $f(x) = (x^2 + x)e^{-2|x|}$.

Esercizio 6.8. *Studiare e disegnare il grafico della funzione*

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

r. *La funzione è definita per* $x > 0$ *e ivi continua e derivabile. Abbiamo*

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$$

e

$$f(1) = 0,$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0,$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}(1 - \frac{1}{2}\ln x).$$

Da cui, risolvendo $f'(x) = 0$*, troviamo*

$$2 = \ln x,$$

$$x = e^2$$

e

$$f(e^2) = \frac{2}{e}.$$

Abbiamo

$$f''(x) = \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}(\frac{3}{4}\ln(x) - 2),$$

$$f''(e^2) < 0,$$

dunque il punto è di un punto di massimo relativo. Inoltre

$$x = e^{\frac{8}{3}}$$

è un punto di flesso.

Inoltre f è crescente per in $(0, e^2)$, decrescente in $(e^2, +\infty)$, concava per $(0, e^{\frac{8}{3}})$, convessa per $x > e^{\frac{8}{3}}$.

Da cui il grafico della funzione.

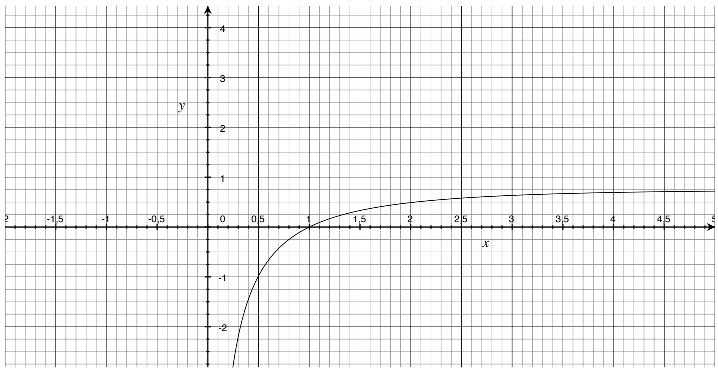


FIGURA 13. Grafico di $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Esercizio 6.9. *Studiare e disegnare il grafico della funzione*

$$f(x) = \sqrt{|x^3 - 1|}.$$

r. *La funzione è definita per ogni x reale, è continua, è inoltre derivabile in ogni punto $x \neq 1$.*

$$f(x) = 0 \qquad se \qquad x = 1.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

Si ha

$$x^3 - 1 > 0 \qquad se \qquad x > 1$$

.

Assumiamo $x > 1$. Calcoliamo la derivata

$$f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 - 1}}.$$

La funzione è crescente in $(1,+\infty)$*. Inoltre*

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = +\infty.$$

La derivata seconda è data da

$$f''(x) = \frac{3}{4(x^3-1)^{\frac{3}{2}}}(-3x^4 + 4x(x^3-1)),$$

$$f''(x) = \frac{3}{4(x^3-1)^{\frac{3}{2}}}(x^4 - 4x)),$$

$$f''(x) = \frac{3}{4(x^3-1)^{\frac{3}{2}}}x(x^3 - 4)),$$

$$f''(x) = 0 \qquad se \qquad x = 4^{\frac{1}{3}} = 1.5874.$$

Per $x > 4^{\frac{1}{3}} = 1.5874$ *la funzione è convessa, mentre per* $1 < x < 1.5874$*, la funzione è concava.*

Assumiamo $x < 1$*.*

$$f'(x) = \frac{-3x^2}{2\sqrt{1-x^3}}.$$

La funzione è decrescente in $(-\infty, 1)$*. Si ha*

$$f'(x) = 0 \qquad se \qquad x = 0.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = -\infty.$$

La derivata seconda è data da

$$f''(x) = \frac{3}{4(1-x^3)^{\frac{3}{2}}}(-3x^4 - 4x(1-x^3)),$$

$$f''(x) = \frac{3}{4(1-x^3)^{\frac{3}{2}}}(x^4 - 4x)),$$

$$f''(x) = \frac{3}{4(x^3-1)^{\frac{3}{2}}}x(x^3 - 4)).$$

Nell'intervallo di interesse

$$f''(x) = 0 \qquad x = 0.$$

Per $x > 0$ *e* $x < 1$ *la funzione è concava, mentre per* $-\infty < x < 0$*, la funzione è convessa. Pertanto la funzione ha due punti di flesso* $x = 0$ *con* $f(0) = 1$*, e* $x = 4^{\frac{1}{3}} = 1.5874$ *con* $f(1.5874) = 0.766421$*.*

Il punto $x = 1$ *è un punto di cuspide.*

Inoltre $f(1) < f(x)$*, per ogni* x *in* $\mathbb{R}$*, quindi* $x = 1$ *è un punto di minimo assoluto.*

Da cui il grafico della funzione.

Esercizio 6.10. *Studiare e disegnare il grafico della funzione*

$$f(x) = \sqrt{\sin x - \cos x}.$$

r. *La funzione è periodica pertando verrà studita in* $[0, 2\pi]$*. Insieme di definizione:*

$$\sin x \geq \cos x$$

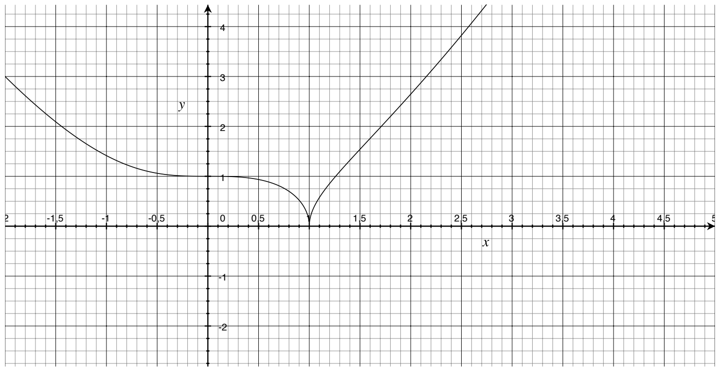


FIGURA 14. Grafico di $f(x) = \sqrt{|x^3 - 1|}$.

Limitandoci a $[0, 2\pi]$*, abbiamo*

$$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}.$$

In $x = \frac{\pi}{4}$ *e in* $\frac{5\pi}{4}$.

Inoltre la derivata prima vale

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{\sin x - \cos x}}.$$

Quindi

$$f'(x) = 0$$

per $x = \frac{3}{4}\pi$. *Inoltre*

$$f(\frac{3}{4}\pi) = \sqrt{2}.$$

La derivata seconda vale

$$\frac{1}{2(\sin x - \cos x)^{\frac{3}{2}}}(-(-\cos x + \sin x)^2 - \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)^2).$$

Essendo negativa, il punto è di massimo e la funzione concava.

Da cui il grafico.

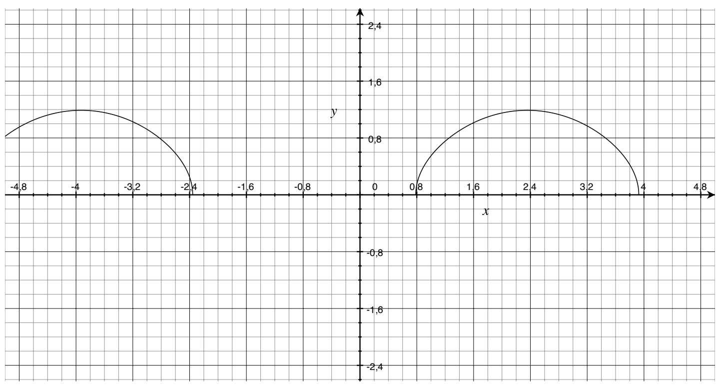


FIGURA 15. Grafico di $f(x) = \sqrt{\sin x - \cos x}$

Esercizio 6.11. *Studiare e disegnare il grafico della funzione*

$$f(x) = \ln|x^4 - 1|.$$

r.. *La funzione è pari, la studiamo quindi in* $[0, +\infty)$. *Restringendoci a tale intervallo la funzione è ovunque definita eccetto* $x = 1$.

$$\lim_{x\to 1^+} \ln|x^4 - 1| = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^-} \ln|x^4 - 1| = -\infty,$$

$$\lim_{x\to +\infty} \ln|x^4 - 1| = +\infty,$$

$$f(0) = 0.$$

Inoltre, se $x > 1$, $x^4 - 1 > 0$, *si ha*

$$f(x) = \ln|x^4 - 1| = \ln(x^4 - 1),$$

$$f'(x) = \frac{4x^3}{x^4 - 1} > 0$$

per $x > 1$. *Poichè* $f'(x) > 0$ *in* $(1, +\infty)$ *la funzione è crescente.*

Abbiamo

$$f''(x) = \frac{12x^2(x^4 - 1) - 16x^6}{(x^4 - 1)^2} = \frac{-4x^6 - 12x^2}{(x^4 - 1)^2} < 0,$$

quindi la funzione è concava.

Per $0 \le x < 1$ *la funzione vale*

$$f(x) = \ln|x^4 - 1| = \ln 1 - x^4,$$

$$f'(x) = \frac{-4x^3}{1 - x^4} \le 0$$

per $0 \le x < 1$, *essendo* 0 *se* $x = 0$. *Per cui la funzione è decrescente in* $(0, 1)$.

Abbiamo

$$f''(x) = \frac{-12x^2(1 - x^4) - 16x^6}{(1 - x^4)^2} = \frac{-4x^6 - 12x^2}{(1 - x^4)^2} < 0,$$

quindi la funzione è concava.

Il punto $x = 0$ *è un punto di massimo relativo.*

Per simmetria si ottiene il grafico della funzione.

Esercizio 6.12. *Studiare e disegnare il grafico della funzione*

$$f(x) = \tan x^2 + e^{-x^2}$$

nell'intervallo $(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}})$.

r. *Si ha che la funzione è pari, pertanto basterà studiarla in* $(0, \sqrt{\frac{\pi}{2}})$. *Si ha*

$$f(0) = 1$$

Inoltre

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

Calcoliamo la derivata prima della funzione:

$$f'(x) = 2x\left(\frac{1}{\cos^2 x^2} - e^{-x^2}\right).$$

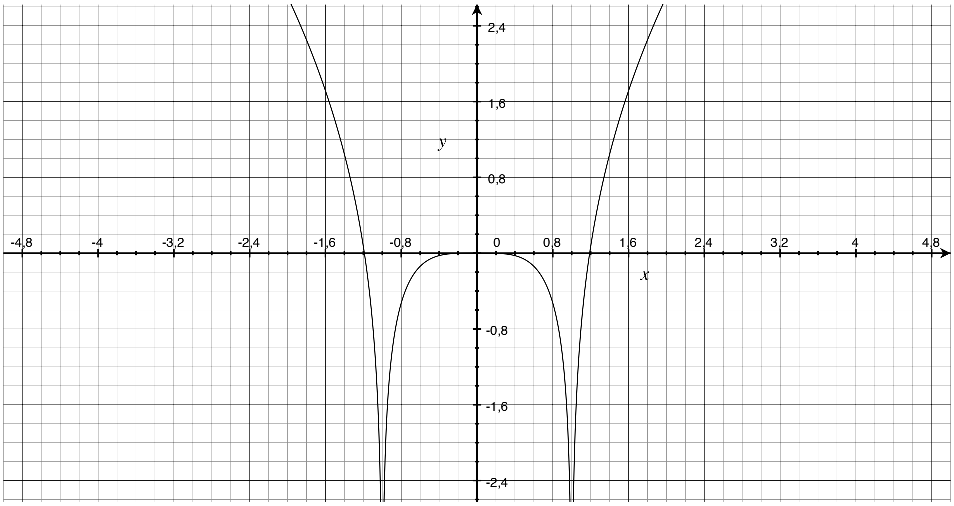


FIGURA 16. Grafico di $f(x) = \ln|x^4 - 1|$

Calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = 2\left(\frac{1}{\cos^2 x^2} - e^{-x^2}\right) + 4x^2\left(\frac{2\sin x^2}{\cos^3 x^2} + e^{-x^2}\right).$$

In $(0, \sqrt{\frac{\pi}{2}})$ *la derivata prima è positiva, pertanto la funzione è crescente. Per studiare la convessità possiamo operare in due modi.*

a) Ricordare che:

Siano f, g *due funzioni positive definite in un intervallo di* $\mathbb{R}$. *È semplice far vedere che se* f *e* g *risultano crescenti (non decrescenti) anche la funzione prodotto*

$$h(x) = f(x) \cdot g(x)$$

risulta crescente (non decrescente).

b) Calcolare la derivata seconda .

Applicando uno dei due punti al nostro caso si ha
a) in $(0, \frac{\sqrt{\pi}}{2})$ *la funzione* $f(x) = 2x$ *è positiva, anche*

$$g(x) = \frac{1}{\cos^2 x^2} - e^{-x^2}$$

è positiva, inoltre le funzioni in tale intervallo risultano crescenti. Pertanto la convessità segue dalla proprietà di monotonia della derivata.
b) Osservando che la derivata seconda in $(0, \frac{\sqrt{\pi}}{2})$ *è positiva.*

Il punto $x = 0$ *risulta un punto di minimo assoluto. Disegnare il grafico*

7. Derivate parziali prime e seconde

Data una funzione f definita in un intorno di $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, f si dice derivabile parzialmente rispetto a x nel punto (x_0, y_0) se esiste ed è finito il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Il valore del limite si indica con $f_x(x_0, y_0)$ e si chiama derivata parziale prima rispetto a x della funzione in (x_0, y_0).
f si dice derivabile parzialmente rispetto a y nel punto (x_0, y_0) se esiste ed è finito il limite

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

I valore del limite si indica con $f_y(x_0, y_0)$ e si chiama derivata parziale prima rispetto a y della funzione in (x_0, y_0).
f si dice derivabile parzialmente rispetto a x o rispetto a y in un aperto A se è derivabile parzialmente in ogni punto di A.

Le derivate parziali definiscono allora funzioni su cui possiamo eventualmente ripetere l'operazione

$$f_{xx} \qquad f_{xy} \qquad f_{yx} \qquad f_{yy}.$$

7.1. Forme quadratiche in $\mathbb{R}^2$ e la matrice Hessiana. Una matrice Q si dice *non negativa* (rispettivamente, *non positiva*) se la forma $z^T Q z$ ($z = (x, y)$ is semidefinita positiva (rispettivamente negativa) cioè se

$$z^T Q z = \sum_{i,j=1}^{2} q_{i,j} x_i y_j \geq 0$$

$$\text{(rispettivamente, } z^T Q z \leq 0, \text{)}\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Una matrice Q si dice *positiva* (rispettivamente, *negativa*) se la forma $z^T Q z$ è *positiva* (rispettivamente, *negativa*)

$$z^T Q z = \sum_{i,j=1}^{2} q_{i,j} x_i y_j\ 0\ (z^T Q z < 0) \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x, y \neq 0.$$

Esempio 7.1. *Un esempio di matrice positiva è data da*

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

poichè $x^2 + \cdots + y^2 > 0$. *Un esempio di matrice non negativa è data da*

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

mentre una matrice indefinita è data da

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Se restringiamo l'analisi alle matrici 2×2 allora abbiamo il seguente

Teorema 7.2. *Sia*

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \tag{11}$$

una matrice simmetrica.

$$|Q| = \det Q = q_{11}q_{22} - (q_{12})^2.$$

Allora

$$|Q| > 0 \quad \text{e } q_{11} > 0, \implies Q > 0$$

$$|Q| > 0 \quad \text{e } q_{11} < 0, \implies Q < 0$$

Se detQ < 0*, allora* Q *è indefinita.*

Dimostrazione. Data la forma quadratica

$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2,$$

essa può essere equivalentemente scritta

$$a\left(x_1 + \frac{b}{a}x_2\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}x_2^2,$$

da questa formula si evince chiaramente il risultato. □

8. Massimi e minimi interni per funzioni C^2

Diciamo che (x_0, y_0) è un punto interno a Ω se esiste $\delta > 0$ tale che $B(x_0, y_0), \delta) \subset \Omega$. Si ha il *Teorema di Fermat*

Teorema 8.1 (Fermat)**.** *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *e* $(x_0, y_0 \in \Omega$ *un punto di minimo di* f *in* Ω*. Se* f *ammette derivate parziali in* (x_0, y_0) (x_0, y_0) *è un punto interno a* Ω*, allora*

$$Df(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)) = 0.$$

Sef ammette derivate parziali seconde in Ω, possiamo associare a f la sua *matrice Hessiana*

$$D^2f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} \tag{12}$$

e il determinante della matrice Hessiana, assumendo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y),$$

è dato da

$$|H| = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y})^2$$

Teorema 8.2 (Condizioni sufficienti del secondo ordine)**.** *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *e* $f \in C^2(\Omega)$*. Se* $(x_0, y_0) \in \Omega$ *è in* Ω *e*

$$Df(x_0, y_0) = 0$$

$$D^2f(x_{0y0}) > 0, \qquad \textit{(rispettivamente } D^2f(x_0, y_0) < 0\textit{)}$$

allora (x_0, y_0)*è un punto di minimo locale (rispettivamente di massimo locale) di* f *in* Ω*.*

9. Esercizi

Esercizio 9.1. *Trovare eventuali punti in cui si annullano le derivate prime di* $f(x,y) = e^x(x+1) + y^{3/2}$.

CAPITOLO 14

Cenni sulle equazioni differenziali ordinarie

1. Introduzione

Consideriamo il problema seguente che coinvolge sia la funzione y sia la sua derivata prima y'.

Supponiamo $\rho \in \mathbb{R}$ e proponiamoci di risolvere

$$y'(x) = \rho y(x).$$

Si dice soluzione dell'equazione differenziale una funzione y derivabile che soddisfi la relazione definita dall'equazione.
Una soluzione è data da

$$y(x) = e^{\rho x}$$

Esercizio 1.1. *Verificare che $y(x) = e^{\rho x}$ è una soluzione di $y'(x) = \rho y(x)$.*

Esercizio 1.2. *Se $\rho \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$ mostrare che ancora $y(x) = e^{\rho x}$ è soluzione*

$$y'(x) = \rho y(x).$$

Soluzione. Dalla forma algebrica di un numero complesso $\rho = \lambda + i\theta$ con $\lambda, \theta \in \mathbb{R}$ e della formula di Eulero

$$e^{\rho} = e^{\lambda + i\theta} = e^{\lambda}\big(\cos\theta + i\sin\theta\big),$$

Se $x \in \mathbb{R}$

$$e^{(\lambda+i\theta)x} = e^{\lambda x}\big(\cos\theta x + i\sin\theta x\big),$$

$$D(e^{\lambda x}\cos\theta x) = e^{\lambda x}\big(\lambda\cos\theta x - \theta\sin\theta x\big)$$

$$D(e^{\lambda x}\sin\theta x) = e^{\lambda x}\big(\lambda\sin\theta x + \theta\cos\theta x\big)$$

$$D\big(e^{(\lambda+i\theta)x}\big) =$$

$$D\Big(e^{\lambda x}\big(\cos\theta x + i\sin\theta x\big)\Big) = (\lambda + i\theta)e^{\lambda x}\big(\cos\theta x + \sin\theta x\big) =$$

$$(\lambda + i\theta)e^{\lambda x}e^{i\theta x} = (\lambda + i\theta)e^{(\lambda+i\theta)x}.$$

La formula generalizza in $\mathbb{C}$ la notevole proprietà in $\mathbb{R}$, e dimostra che $y(x) = e^{\lambda x}\big(\cos\theta x + i\sin\theta x\big)$, $\rho = \lambda + i\theta$ verifica

$$y'(x) = \rho y(x)$$

2. Equazioni del primo ordine omogenee: formula risolutiva

$$y'(x) = a(x)y(x)$$

$$y(x) = ce^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}$$

Più generalmente

3. Equazioni del primo ordine : formula risolutiva

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$$
$$y(x) = e^{\int a(t)dt}\left[c + \int b(s)e^{-\int a(\tau)d\tau}ds\right],$$

Esercizio 3.1. *Verificare che* $y(x) = e^{\int a(t)dt}\left[c + \int b(s)e^{-\int a(\tau)d\tau}ds\right]$, *è, al variare di* $c \in \mathbb{R}$, *una famiglia di soluzioni di* $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$

La soluzione dell'equazione differenziale si ottiene sommando alla famiglia di soluzioni dell'equazione omogenea una soluzione particolare. Nel caso in esame la soluzione particolare è data da

$$y(x) = e^{\int a(t)dt}\int b(s)e^{-\int a(\tau)d\tau}ds$$

3.1. Problema di Cauchy.

$$\begin{cases} y'(x) = a(x)y(x) + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$y(x) = e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} b(s)e^{-\int_{x_0}^{s} a(\tau)d\tau}ds\right],$$

4. Equazioni del secondo ordine omogenee a coefficienti costanti

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0, \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Si considera il polinomio $P(\lambda)$ detto polinomio caratteristico

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b <$$

di cui si determinano le radici

$$\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Si ha

$$\Delta = a^2 - 4b \begin{cases} > 0 & y(x) = c_1 e^{-\frac{1}{2}(-a-\sqrt{\Delta})x} + c_2 e^{-\frac{1}{2}(-a+\sqrt{\Delta})x} \\ = 0 & y(x) = c_1 e^{-\frac{1}{2}ax} + c_2 x e^{-\frac{1}{2}ax} \\ < 0 & y(x) = c_1 e^{-\frac{1}{2}ax}\sin(\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}x) + c_2 e^{-\frac{1}{2}ax}\cos(\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}x) \end{cases}$$

5. Equazioni del secondo ordine non omogenee a coefficienti costanti:alcuni casi

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = g(x)$$

Ci occuperemo del metodo di somiglianza, ossia dato $g(x)$, cercare una soluzione particolare $y_p(x)$ del tipo g.

- $g(x) = Q_n(x),\ Q_n$ polinomio di grado n, allora

$$y_p(x) = \begin{cases} G_n(x)\,\mathrm{se}\,\lambda\,\mathrm{non}\,\textit{è soluzione di}\,P(\lambda) = 0 \\ xG_n(x)\,\mathrm{se}\,\lambda\ \ \text{è soluzione semplice di}\,P(\lambda) = 0 \\ x^2G_n(x)\,\mathrm{se}\,\lambda\ \ \text{`e soluzione doppia di}\,P(\lambda) = 0 \end{cases}$$

dove G_nè un polinomio di grado n,

- $g(x) = Ce^{\alpha x}$

$$y_p(x) = \begin{cases} Ke^{\alpha x}\,\mathrm{se}\,\alpha\,\text{non è soluzione di P}(\alpha) = 0 \\ Kxe^{\alpha x}\,\mathrm{se}\,\alpha\ \text{è soluzione semplice di P}(\alpha) = 0 \\ Kx^2e^{\alpha x}\,\mathrm{se}\,\alpha\ \text{è soluzione doppia di P}(\alpha) = 0 \end{cases}$$

dove K è una costante reale opportuna.

- $g(x) = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)$

$$y_p(x) = \begin{cases} K\cos(\beta x) + H\sin(\beta x)\,\text{se i}\beta\,\text{non è soluzione di P}(\alpha) = 0 \\ x(K\cos(\beta x) + H\sin(\beta x))\,\text{se i}\beta,\ \text{è soluzione di P}(\alpha) = 0 \end{cases}$$

dove K, H costanti reale opportune.

5.1. Problema di Cauchy.

$$\begin{cases} y''(x) + ay'(x) + by(x) = g(x) \\ y'(x_0) = y_1 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$y(x) = y_{omogenea} + y_p,$$

con le condizioni $y(x_0) = y_0\ y'(x_0) = y_1$

CAPITOLO 15

Esercizi di Ricapitolazione

0.2. Esempio di esercizi da risolvere con soluzioni.

Esercizio 1

(i) Verificare che $x = 0$ è un punto stazionario della funzione

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^x},$$

($f'(0) = 0$).

(ii) Verificare che $x = 0$ è un punto di massimo relativo.

Esercizio 2

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2n}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$$

Esercizio 3

(i) Calcolare

$$\int_0^4 |e^{2t} - \pi|\,\mathrm{d}t$$

(ii) Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t}{e^x - 1}$$

Esercizio 4

Calcolare la soluzione della seguente equazione differenziale ordinaria

$$y''(x) + y(x) = x^2$$

Domanda 1

(i) Dare la definizione di derivabilità per $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in x_0

i) Dare la definizione di derivabilità parziale rispetto alla variabile y per $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in (x_0, y_0)

(ii) Calcolare la derivata parziale rispetto alla variabile x e la derivata parziale rispetto alla variabile y di $f(x, y) = \sin(x^2 y^3)$

Domanda 2

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é continua allora

$\boxed{\text{a}}$ f é derivabile $\boxed{\text{b}}$ $|f|$ é continua $\boxed{\text{c}}$ $|f|$ é derivabile

Sia $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ una serie tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$ e $a_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Allora

$\boxed{\text{a}}$ La serie converge $\boxed{\text{b}}$ La serie diverge

$\boxed{\text{c}}$ Nessuna delle precedenti

0.3. Soluzioni. Soluzione

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^x}.$$

$$f(x) = \frac{1}{e^{\ln(1+x)^x}} = \frac{1}{e^{x\ln(1+x)}} = e^{-x\ln(1+x)}.$$

$$f'(x) = -e^{-x\ln(1+x)}\left(\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}\right) =$$

$$-\frac{e^{-x\ln(1+x)}}{1+x}\big((1+x)\ln(1+x) + x\big).$$

Si ottiene allora

$$f'(0) = 0$$

$$f''(x) = e^{-x\ln(1+x)}\left(\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}\right)^2 +$$

$$-e^{-x\ln(1+x)}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2}\right) =$$

$$-\frac{e^{-x\ln(1+x)}}{1+x}\left(1 + \frac{1}{1+x}\right)$$

$$f''(0) = -2 < 0$$

Soluzione.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2n}\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2n} \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \sqrt{e}$$

Soluzione.
$|e^{2t} - \pi| = e^{2t} - \pi$, se $e^{2t} - \pi \geq 0$.
Si ha $e^{2t} \geq \pi \iff t \geq \ln\sqrt{\pi}$.

$$\int_0^4 |e^{2t} - \pi|\,\mathrm{d}t = \int_0^{\ln\sqrt{\pi}} (\pi - e^{2t})\,\mathrm{d}t +$$

$$\int_{\ln\sqrt{\pi}}^4 (e^{2t} - \pi)\,\mathrm{d}t =$$

$$\pi\ln\sqrt{\pi} - 4\pi + 1/2 + 1/2e^8.$$

Soluzione.

$$y''(x) + y(x) = x^2$$

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + y_p(x)$$
$$y_p(x) = ax^2 + bx + c$$

$$y_p^{''}(x) = 2a,$$
$$2a + ax^2 + bx + c = x^2$$

$$a = 1 \ c = -2,$$
$$y_p(x) = x^2 - 2$$

Soluzione D1

$$f(x, y) = \sin(x^2y^3)$$
$$f_x(x, y) = 2xy^3 \cos(x^2y^3)$$
$$f_y(x, y) = 3y^2x^2 \cos(x^2y^3)$$

Soluzione D2
La risposta esatta è b.
Soluzione D3
La risposta esatta è (criterio della radice).

1. Esercizi teorici

Esercizio 1.1. *Dato $p > 1$, $p \in \mathbb{R}$ il coniugato di p è il numero reale q tale che*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Teorema 1.2. *Disuguaglianza di Young (esponenti reali): dati due numeri reali positivi x e y, e dati p, q numeri reali coniugati, sihaxy* $\leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$

Dimostrazione.

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y = \frac{1}{p}\ln(x^p + \frac{1}{q}\ln(x^q).$$

Elevando a esponenziale

$$xy = e^{\ln(xy)} = e^{\frac{1}{p}\ln(x^p)+\frac{1}{q}\ln(x^q)}$$

Dalla convessità della funzione esponenziale

$$e^{\frac{1}{p}\ln(x^p)+\frac{1}{q}\ln(x^q)} \leq \frac{1}{p}e^{\ln(x^p)} + \frac{1}{q}e^{\ln(x^q)} = \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}x^q.$$

Segue il risultato □

CAPITOLO 16

Conclusione

Dimostriamo la disuguaglianza di cui abbiamo parlato nell' introduzione,

$$e^{\pi} > \pi^{e}.$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln x}$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}\ln x}\left(-\frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$f'(x) = 0 \iff x = e \quad f(e) = e^{\frac{1}{e}}$$

Si osserva che il punto $x = e$ è punto di massimo stretto assoluto per la funzione nel suo insieme di definizione $(0, +\infty)$, poiche' la funzione è derivabile in $(0, +\infty)$ e

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\ln x} = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}\ln x} = 1$$

Dunque

$$e^{\frac{1}{e}} > \pi^{\frac{1}{\pi}},$$

e il risultato segue elevando alla πe ambo i membri. $\square$