Esercizio 1 Date le funzioni

$$g(x) = \pi x - |x|x,$$

$$f(x) = |x|x,$$

per $x \in [-\pi, \pi)$ e prolungate per periodicità in $\mathbb{R}$ determinare le serie di Fourier.

Utilizzando il teorema di convergenza puntuale sulle serie di Fourier descrivere il comportamento negli eventuali punti di discontinuità. Inoltre verificare

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

La funzione è dispari, pertanto $a_0 = 0$, $a_k = 0, \forall k \in N$.

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -x^2 \sin kx dx + \int_0^{\pi} x^2 \sin kx dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\int_{\pi}^{0} -x^2 \sin k(-x) dx + \int_0^{\pi} x^2 \sin kx dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} x^2 \sin kx dx + \int_0^{\pi} x^2 \sin kx dx\right] = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi} x^2 \sin kx dx\right].$$

Risulta:

$$\int x^2 \sin kx dx = -\int x^2 \frac{1}{k}(\cos kx)' dx =$$

$$-\frac{1}{k}x^2(\cos kx) + \frac{2}{k}\int x \cos kx dx =$$

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin kx dx = -\frac{1}{k}x^2(\cos kx)|_0^{\pi} + \frac{2}{k}\int_0^{\pi} x \cos kx dx =$$

$$= -\frac{1}{k}\pi^2(-1)^k + \frac{2}{k^2}\int_0^{\pi} x(\sin kx)' dx =$$

$$= -\frac{1}{k}\pi^2(-1)^k + \left(\frac{2}{k^3}(-1)^k - \frac{2}{k^3}\right)$$

Quindi incata con $\mathbb{S}_1$ la serie di Fourier relativa a g e $\mathbb{S}_2$ la serie di Fourier relativa a f, si ha

$$\mathbb{S}_1 = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \sin(2k-1)x,$$

$$\mathbb{S}_2 = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{k}\pi^2(-1)^k + \frac{2}{k^3}(-1)^k - \frac{2}{k^3}\right)\sin kx.$$

La somma della serie si calcola sostituendo $x = \frac{\pi}{4}$ nella somma $\mathbb{S}_1$:

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3},$$

da cui il risultato.

Esercizio 2 Sia c un parametro reale positivo e f la funzione periodica di periodo 2π ottenuta prolungando per periodicitá su $\mathbb{R}$ la funzione

$$x \in (-\pi, \pi] \to e^{\max\{\frac{1}{\pi}, c\}x}$$

Determinare la serie di Fourier di f .

Se $c > \frac{1}{\pi}$, risulta $f(x) = e^{cx}$, pertanto la serie vale:

$$\frac{\sinh c\pi}{\pi c} + \frac{2}{\pi}\sinh c\pi \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2+c^2}(c\cos kx - k\sin kx).$$

Se $c \le \frac{1}{\pi}$, risulta $f(x) = e^{\frac{1}{\pi}x}$, dunque la serie vale:

$$\sinh 1 + \frac{2}{\pi}\sinh 1 \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2+(1/\pi^2)}(\frac{1}{\pi}\cos kx - k\sin kx).$$

Esercizio 3 Sia f la funzione periodica di periodo 2π ottenuta prolungando per periodicitá su $\mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \le 0 \\ -3x, & 0 < x \le \pi \end{cases} .$$

Determinare la serie di Fourier di f .

La serie di Fourier è data da

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left[a_k \cos(kx) + b_k \mathrm{sen}(kx)\right],$$

dove:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx, k = 1, 2, ...$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{sen}(kx)dx, k = 0, 1, 2, ...$$

Calcoliamo i coefficienti di Fourier della f.

$$a_0 = -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 3x dx = -\frac{3}{2}\pi;$$

$$a_k = -\frac{3}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos(kx)dx = -\frac{3}{\pi}\left[\frac{(-1)^k - 1}{k^2}\right];$$

$$b_k = -\frac{3}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(kx)dx = -\frac{3}{k}(-1)^{k+1} = \frac{3}{k}(-1)^k.$$

Pertanto la serie di Fourier richiesta è:

$$-\frac{3\pi}{4} + \frac{6}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} + 3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\sin(kx)}{k}.$$

Poichè f è continua in tutti i punti di $\mathbb{R}$ distinti da $\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, dal teorema di convergenza puntuale delle serie di Fourier la serie converge ad f in tali punti. Notiamo che, se $x = \pi$, la serie si riduce a :

$$-\frac{3\pi}{4} - \frac{6}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Questa somma vale:

$$\frac{f(x_+) + f(x_-)}{2} = -\frac{3\pi}{2}.$$

Esercizio 4 Sia f la funzione periodica di periodo 2π ottenuta prolungando per periodicità su $\mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \max\{2, 2 - x\}, \quad x \in (-\pi, \pi].$$

Determinare la serie di Fourier di f.

La serie di Fourier è data da

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left[a_k\cos(kx) + b_k\mathrm{sen}(kx)\right],$$

dove:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx, k = 1, 2, ...$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{sen}(kx)dx, k = 0, 1, 2, ...$$

Osserviamo che:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x \in (-\pi, 0) \\ 2, & x \in [0, \pi] \end{cases} .$$

Dunque:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 2 - xdx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2dx = \frac{\pi}{2} + 4.$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (2 - x)\cos(kx)dx + \int_{0}^{\pi} 2\cos(kx)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi k^2}[(-1)^k - 1].$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (2 - x)\mathrm{sen}(kx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2\mathrm{sen}(kx)dx = \frac{1}{k}(-1)^k.$$

La serie di Fourier richiesta è:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 4\right) + \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{\pi k^2}[(-1)^k - 1]\cos(kx) + \frac{1}{k}(-1)^k\mathrm{sen}(kx)\right].$$