Sapienza Universita' di Roma

Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria
Sezione di Matematica

Dispensa sulle funzioni trigonometriche

Paola Loreti e Cristina Pocci

A. A. 2010-2011

Dispensa sulle funzioni trigonometriche
Analisi Matematica I, Elettronica e Comunicazioni AA 2010-2011

1 Introduzione

In questa dispensa presentiamo alcune proprietà delle funzioni trigonometriche e i relativi grafici.

2 Tabella

Sia 2π la lunghezza della circonferenza di raggio 1. Al generico punto P appartenente alla circonferenza viene associato $(\cos x, \sin x)$, con le proprietà:

- $|\cos x| \le 1, \qquad |\sin x| \le 1, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\sin x = -\sin(-x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\cos x = \cos(-x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$
- $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$
- $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$
- $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x-y}{2} \sin \frac{x+y}{2}$
- $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$, valida per $x \neq \frac{\pi}{2} + h\pi$, $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $h, k \in \mathbb{Z}$
- $\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$, valida per $x \neq \frac{\pi}{2} + h\pi$, $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $h, k \in \mathbb{Z}$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}, x \neq (1 + 2k)\pi$
- $\sin x = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}, x \neq (1 + 2k)\pi$
- $\cos x = \frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}, x \neq (1 + 2k)\pi$

3 Grafici di funzioni trigonometriche

La funzione $f(x) = \sin(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, è periodica di periodo 2π ed è compresa tra -1 e 1.

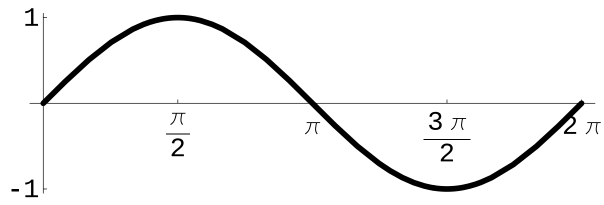


Figura 1: Grafico di $f(x) = \sin(x)$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

La funzione $f(x) = \cos(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, è periodica di periodo 2π ed è compresa tra -1 e 1.

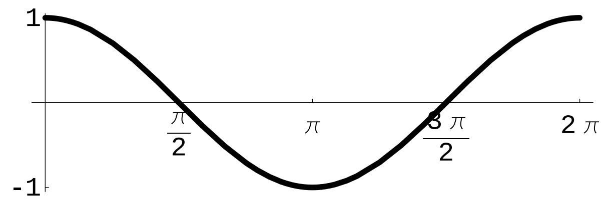


Figura 2: Grafico di $f(x) = \cos(x)$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

La funzione $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, è periodica di periodo π ed è ovunque crescente.

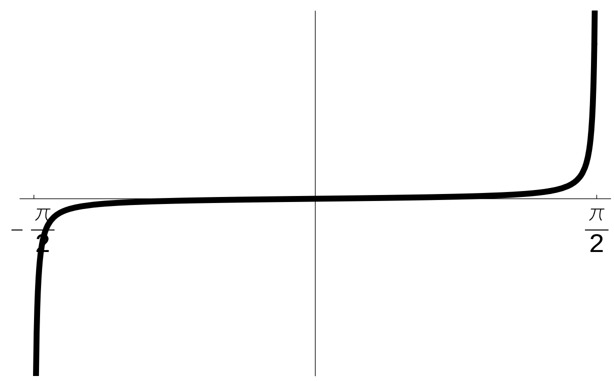


Figura 3: Grafico di $f(x) = \tan(x)$ nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Il grafico della tangente presenta asintoti verticali di equazione $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

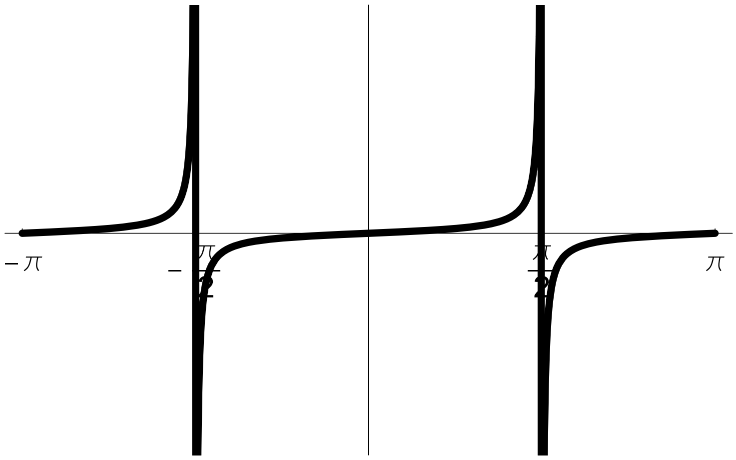


Figura 4: Grafico di $f(x) = \tan(x)$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

La cotangente di un arco è il reciproco della tangente dell'arco stesso, cioè

$$\text{cotan}(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)}, \quad \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

La funzione $f(x) = \text{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, è periodica di periodo π ed è ovunque decrescente. Il grafico della cotangente presenta asintoti verticali di equazione $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

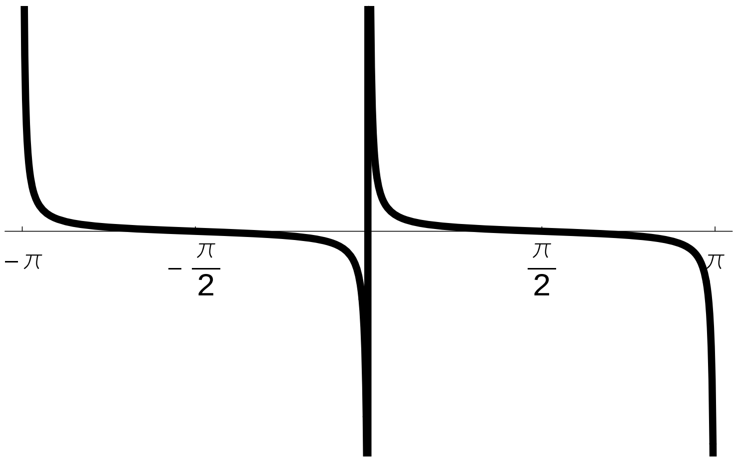


Figura 5: Grafico di $f(x) = \text{cotan}(x)$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

La secante di un arco è il reciproco del coseno dell'arco stesso, cioè

$$\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

La funzione $f(x) = \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ed è periodica di periodo 2π. Il grafico della secante presenta asintoti verticali di equazione $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

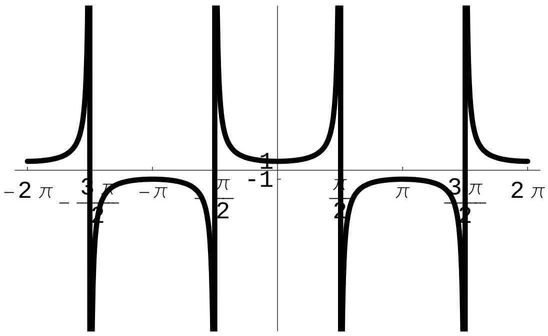


Figura 6: Grafico di $f(x) = \sec(x)$ nell'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$.

La cosecante di un arco è il reciproco del seno dell'arco stesso, cioè

$$\operatorname{cosec}(\alpha) = \frac{1}{\sin(\alpha)}, \quad \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

La funzione $f(x) = \operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\sin(x)}$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ed è periodica di periodo 2π. Il grafico della cosecante presenta asintoti verticali di equazione $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

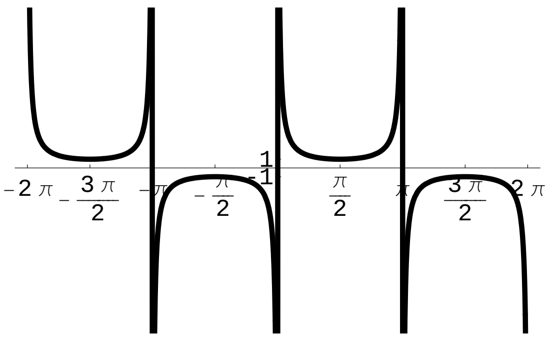


Figura 7: Grafico di $f(x) = \operatorname{cosec}(x)$ nell'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$.

4 Grafici di funzioni trigonometriche inverse

La funzione $f(x) = \sin(x), x \in \mathbb{R}$ non è invertibile in $\mathbb{R}$. Possiamo renderla invertibile se limitiamo il suo dominio all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, in cui la funzione è monotona. La sua inversa è la funzione $f(x) = \arcsin(x)$.

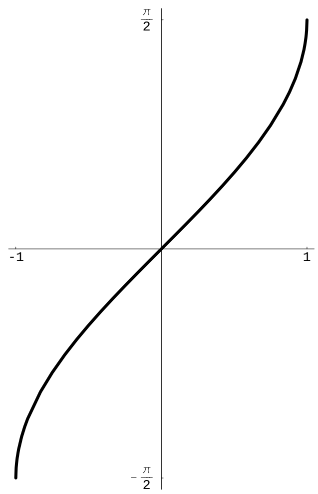
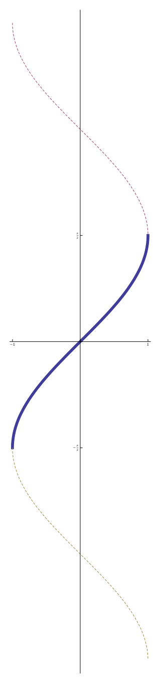


Figura 8: Grafico di $f(x) = \arcsin(x)$.



La funzione $f(x) = \cos(x), x \in \mathbb{R}$ non è invertibile in $\mathbb{R}$. Possiamo renderla invertibile se limitiamo il suo dominio all'intervallo $[0, \pi]$, in cui la funzione è monotona. La sua inversa è la funzione $f(x) = \arccos(x)$.

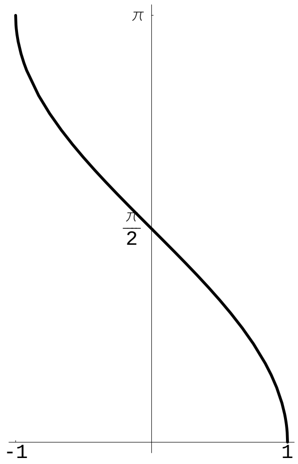
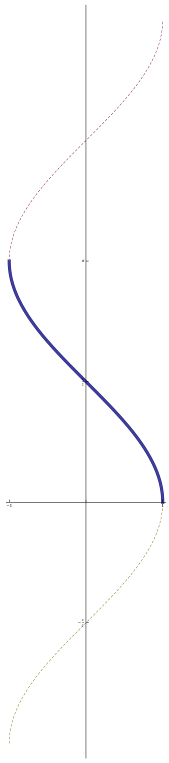


Figura 9: Grafico di $f(x) = \arccos(x)$.



La funzione $f(x) = \tan(x)$ è invertibile nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, in cui la funzione è monotona. Il grafico della funzione arcotangente è crescente e presenta asintoti orizzontali in $y = \pm\frac{\pi}{2}$.

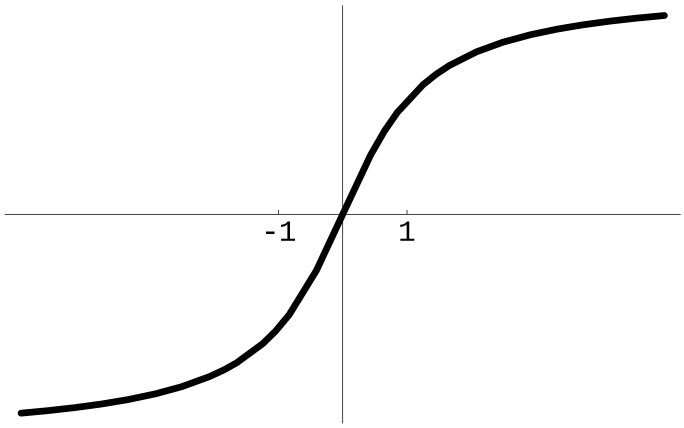


Figura 10: Grafico di $f(x) = \arctan(x)$.

5 Grafici di funzioni trigonometriche composte

Vediamo come determinare il grafico di funzioni trigonometriche composte a partire dal grafico delle funzioni trigonometriche presentate nella Sezione 3.

Per funzioni trigonometriche del tipo $y = f(x + k), k \in \mathbb{R}$, il grafico subisce una traslazione orizzontale di entità $|k|$ (verso sinistra se $k > 0$, verso destra se $k < 0$).

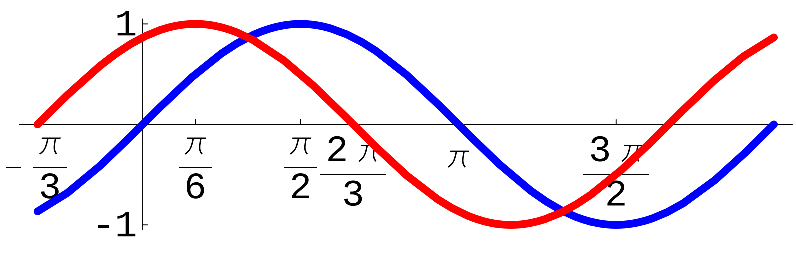


Figura 11: Grafico di $f(x) = \sin(x)$ in blu, grafico di $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ in rosso.

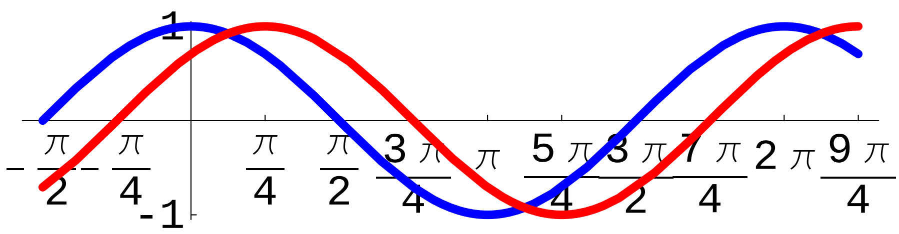


Figura 12: Grafico di $f(x) = \cos(x)$ in blu, grafico di $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{4})$.

Per funzioni del tipo $y = k + f(x), k \in \mathbb{R}$, il grafico subisce una traslazione verticale di entità $|k|$ (verso l'alto se $k > 0$, verso il basso se $k < 0$).

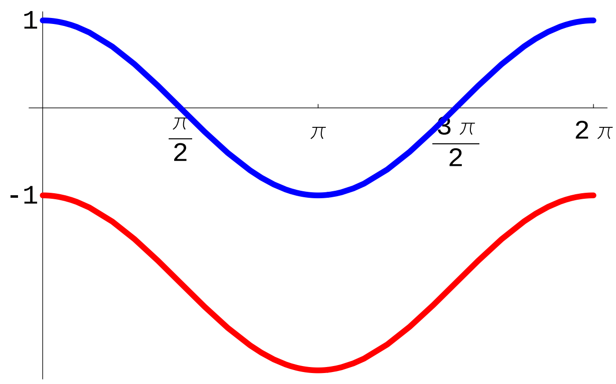


Figura 13: Grafico di $f(x) = -2 + \cos(x)$.

Moltiplicando per una costante reale positiva n l'argomento di una funzione trigonometrica, ossia considerando la funzione $f(nx)$, si determina una variazione del periodo da T a $\frac{T}{n}$.

Nella seguente figura, possiamo vedere che il periodo della funzione $f(x) = \sin(\frac{1}{2}x)$ è 4π, mentre quello della funzione $f(x) = \sin(2x)$ è π.

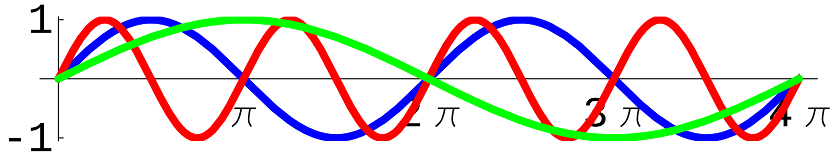


Figura 14: Grafico di $f(x) = \sin(x)$ in blu, grafico di $f(x) = \sin(2x)$ in rosso, grafico di $f(x) = \sin(\frac{1}{2}x)$ in verde.

Moltiplicando una funzione trigonometrica per una costante n reale positiva, si ottiene una variazione dell'ampiezza del grafico della funzione.

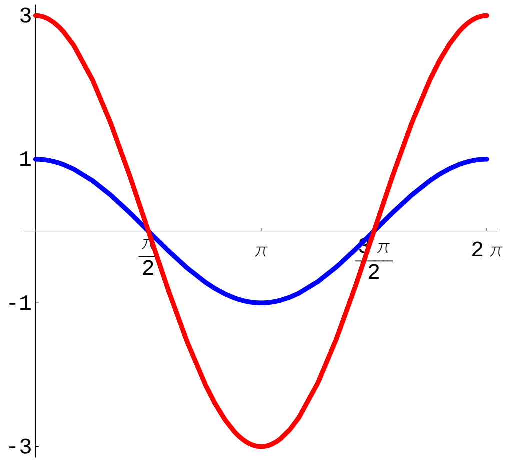


Figura 15: Grafico di $f(x) = \cos(x)$ in blu, grafico di $f(x) = 3\cos(x)$ in rosso.

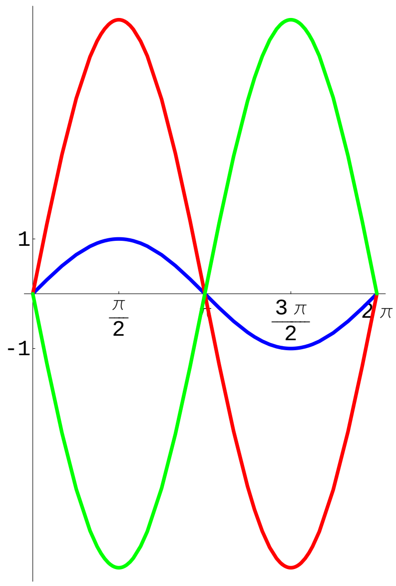


Figura 16: Grafico di $f(x) = \sin(x)$ in blu, grafico di $f(x) = 5\sin(x)$ in rosso, grafico di $f(x) = -5\sin(x)$ in verde.

Osserviamo che le funzioni $f(x) = \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ e $f(x) = \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ hanno periodo π.

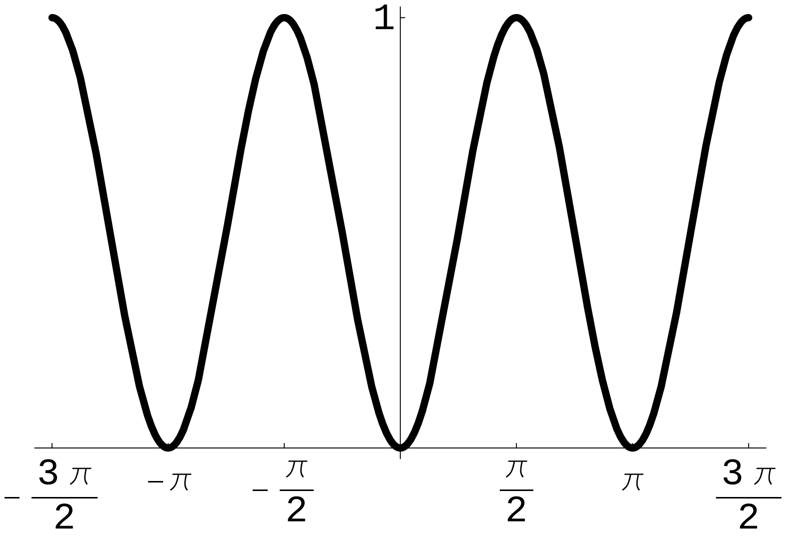


Figura 17: Grafico di $f(x) = \sin^2(x)$ nell'intervallo $[-\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$.

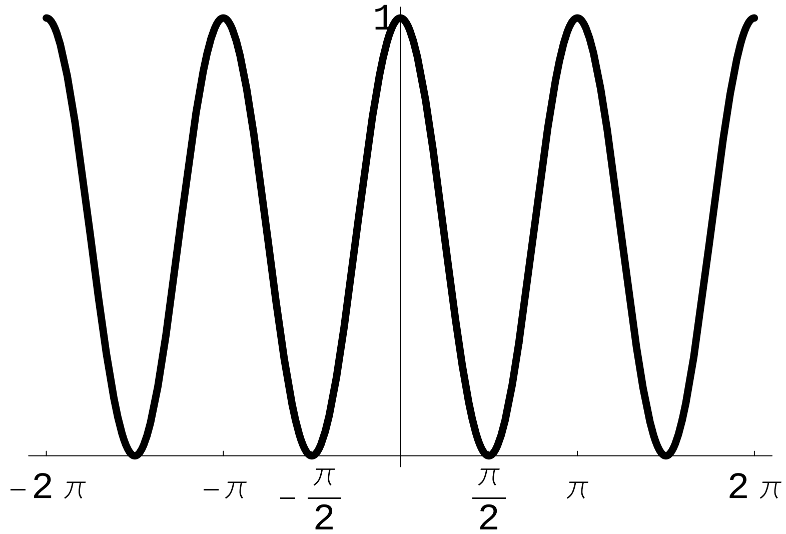


Figura 18: Grafico di $f(x) = \cos^2(x)$ nell'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$.

6 Somme e differenze di funzioni trigonometriche

Prendiamo in esame le funzioni composte come somma o differenza di più funzioni trigonometriche: si tratta ancora di funzioni periodiche. Il periodo sarà il minimo comune multiplo tra i periodi delle funzioni componenti. Il grafico dell funzione composta può essere tracciato osservando che le ordinate possono ottenersi come somma algebrica delle ordinate delle funzioni componenti.

Vediamo un primo esempio: $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$.

Il periodo di $f(x) = \sin(x)$ è 2π, quello di $f(x) = \cos(x)$ è 2π, dunque il periodo della funzione $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ è 2π.

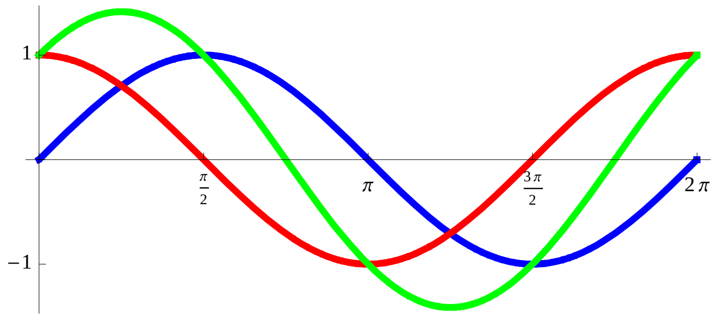


Figura 19: Grafico di $f(x) = \sin(x)$ in blu, grafico di $f(x) = \cos(x)$ in rosso, grafico di $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ in verde, nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

Vediamo un secondo esempio: $f(x) = \sin(x) - \cos(x)$.

Ragionando come prima, il periodo di questa funzione è 2π.

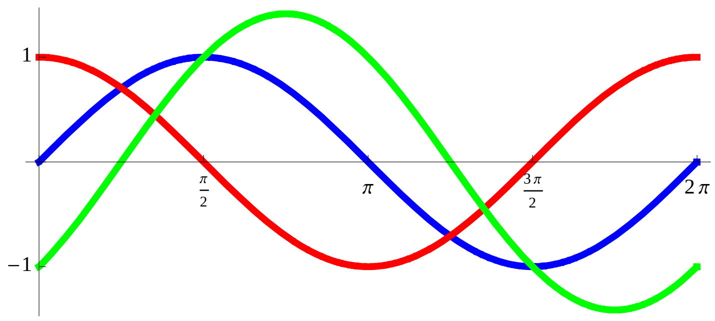


Figura 20: Grafico di $f(x) = \sin(x)$ in blu, grafico di $f(x) = \cos(x)$ in rosso, grafico di $f(x) = \sin(x) - \cos(x)$ in verde, nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

Vediamo un terzo esempio: $f(x) = \cos(4x) + \sin(2x)$.

Il periodo di $f(x) = \cos(4x)$ è $\frac{\pi}{2}$, il periodo di $f(x) = \sin(2x)$ è π, dunque il periodo della funzione $f(x) = \cos(4x) + \sin(2x)$ è π.

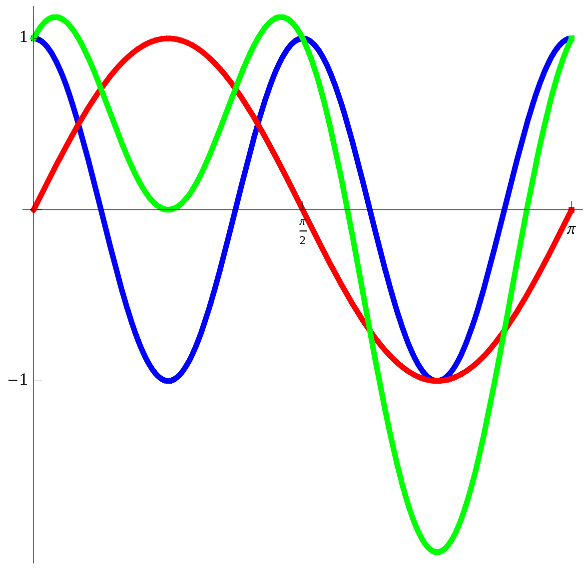


Figura 21: Grafico di $f(x) = \cos(4x)$ in blu, grafico di $f(x) = \sin(2x)$ in rosso, grafico di $f(x) = \cos(4x) + \sin(2x)$ in verde, nell'intervallo $[0, \pi]$.

Vediamo un quarto esempio: $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{3}\right)$.

Il periodo di $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ è 4π, il periodo di $f(x) = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$ è 6π, dunque il periodo della funzione $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{3}\right)$ è 12π.

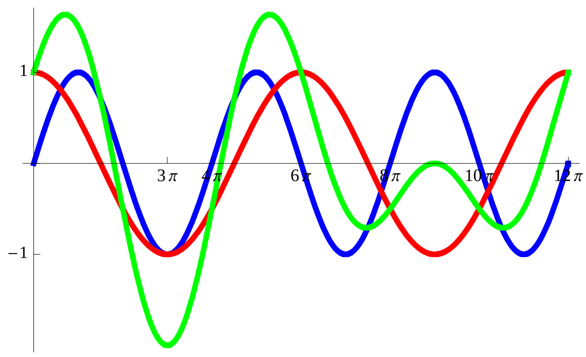


Figura 22: Grafico di $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ in blu, grafico di $f(x) = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$ in rosso, grafico di $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{3}\right)$ in verde, nell'intervallo $[0, 12\pi]$.

Qualsiasi funzione del tipo

$$f(x) = a\sin(x) + b\cos(x), \tag{1}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ può essere riscritta nella forma

$$f(x) = A\sin(x \pm \varphi), \tag{2}$$

dove $\varphi > 0$ è detta *fase* e A è detta *ampiezza* (in teoria dei segnali).
Allo scopo di dimostrare l'equivalenza tra (1) e (2) risolviamo il seguente esercizio: trasformiamo la funzione $f(x) = \sqrt{3}\sin(x) - \cos(x)$ nella forma (2) che, attraverso le formule di addizione, può essere scritta come

$$f(x) = A\cos(\varphi)\sin(x) + A\sin(\varphi)\cos(x). \tag{3}$$

Essendo $A\cos(\varphi)$ e $A\sin(\varphi)$ costanti, confrontando la (3) con la (2) e applicando il principio di identità, si perviene a

$$A\cos(\varphi) = \sqrt{3}, \quad A\sin(\varphi) = -1$$

$$\Rightarrow \frac{A\sin(\varphi)}{A\cos(\varphi)} = \tan(\varphi) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{6}$$

da cui

$$A\sin(-\frac{\pi}{6}) = -1 \Rightarrow A = 2.$$

Di conseguenza, la funzione $f(x) = \sqrt{3}\sin(x) - \cos(x)$ può essere scritta come $f(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

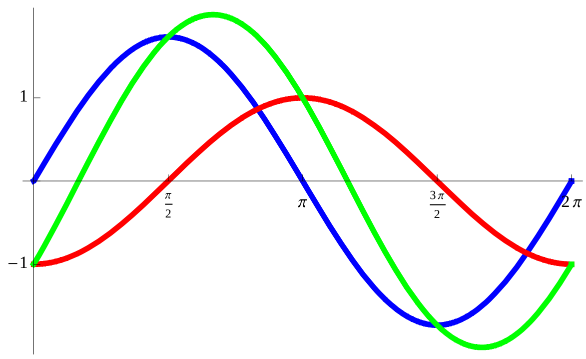


Figura 23: Grafico di $f(x) = \sqrt{3}\sin(x)$ in blu, grafico di $f(x) = -\cos(x)$ in rosso, grafico di $f(x) = \sqrt{3}\sin(x) - \cos(x)$ in verde, nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

7 Somme e differenze di funzioni lineari e funzioni trigonometriche

Prendiamo in esame funzioni del tipo

$$f(x) = ax + \sin(bx + c), \quad f(x) = ax + \cos(bx + c),$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Queste funzioni sono definite su $\mathbb{R}$ e non sono periodiche.
Vediamo un primo esempio: $f(x) = x + \sin(x)$.

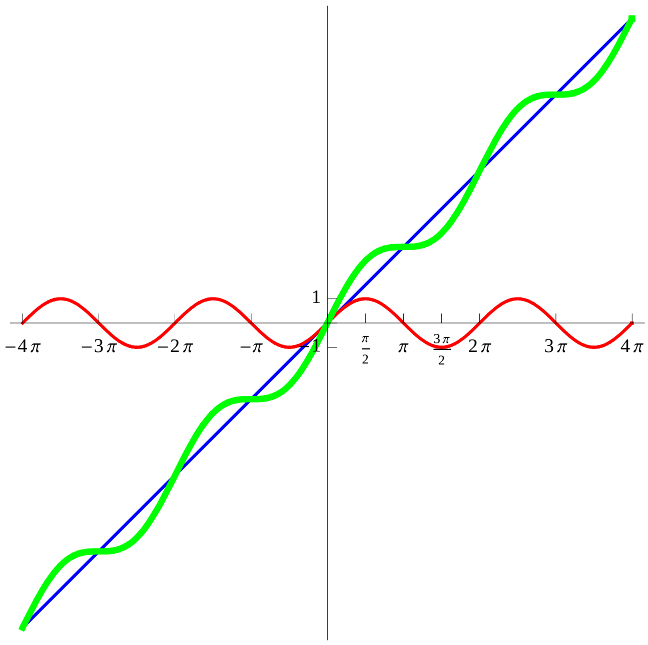


Figura 24: Grafico di $f(x) = x$ in blu, grafico di $f(x) = \sin(x)$ in rosso, grafico di $f(x) = x + \sin(x)$ in verde, nell'intervallo $[-4\pi, 4\pi]$.

Vediamo un secondo esempio: $f(x) = x - \cos(x)$.

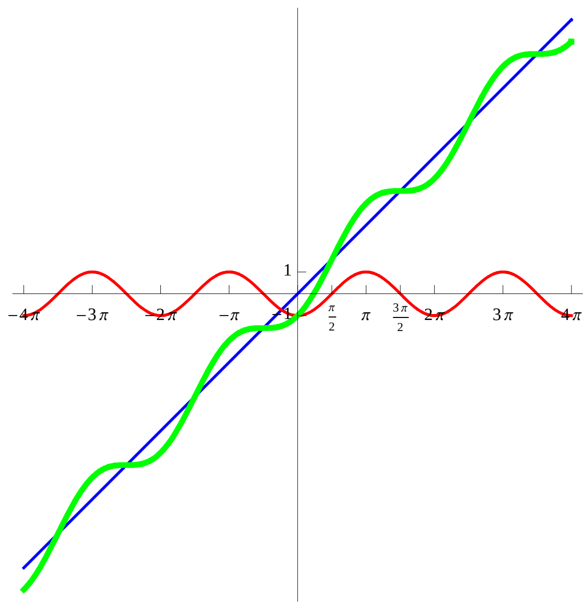


Figura 25: Grafico di $f(x) = x$ in blu, grafico di $f(x) = -\cos(x)$ in rosso, grafico di $f(x) = x - \cos(x)$ in verde, nell'intervallo $[-4\pi, 4\pi]$.

Vediamo un terzo esempio: $f(x) = \frac{x}{2} + \sin(x + \pi)$.

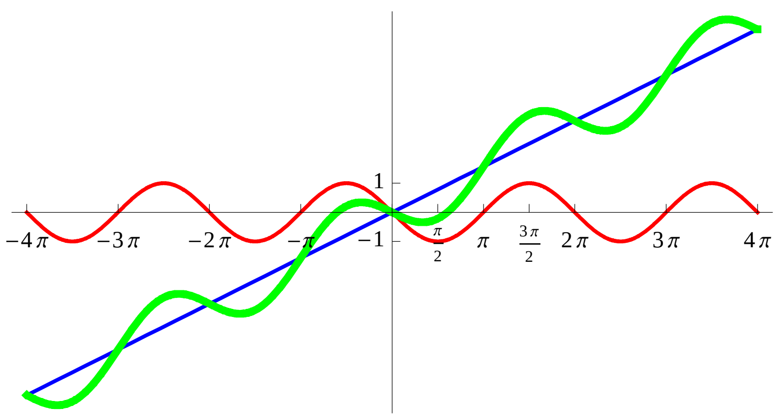


Figura 26: Grafico di $f(x) = \frac{x}{2}$ in blu, grafico di $f(x) = \sin(x + \pi)$ in rosso, grafico di $f(x) = \frac{x}{2} + \sin(x + \pi)$ in verde, nell'intervallo $[-4\pi, 4\pi]$.

Vediamo un quarto esempio: $f(x) = \frac{3}{2}x + \cos(x - \frac{\pi}{2})$.

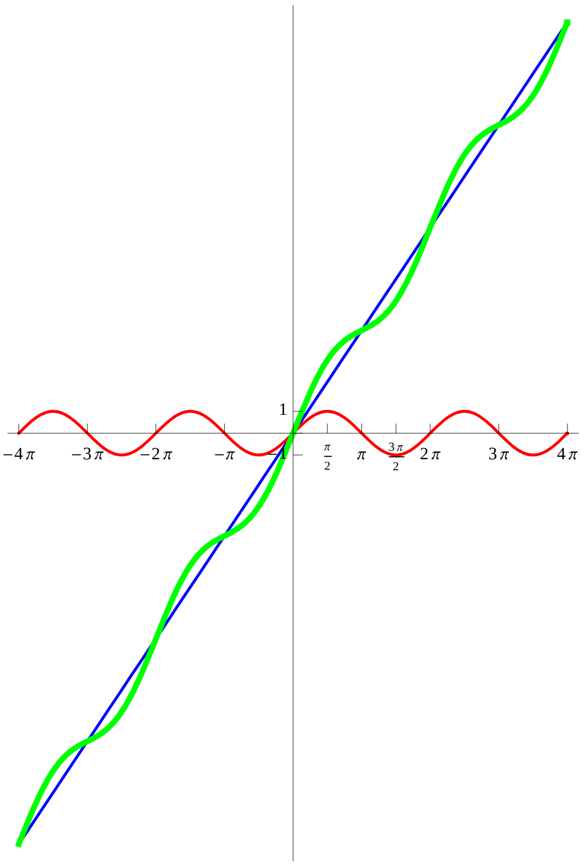


Figura 27: Grafico di $f(x) = \frac{3}{2}x$ in blu, grafico di $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$ in rosso, grafico di $f(x) = \frac{3}{2}x + \cos(x - \frac{\pi}{2})$ in verde, nell'intervallo $[-4\pi, 4\pi]$.

8 Battimenti

Tecnicamente, i battimenti sono prodotti dalla sovrapposizione di due onde sinusoidali aventi la medesima ampiezza e frequenze ω_1 ed ω_2 “leggermente diverse”. L’onda risultante possiede una forma caratteristica che mostra una sorta di doppia oscillazione. A prima vista, sembrerebbe che i battimenti siano semplicemente una manifestazione del principio di sovrapposizione: sommando due onde si ottiene una nuova onda con caratteristiche differenti, ma non è così. Il fenomeno del battimento manifesta la sua importanza nel campo dell’acustica. Nel caso delle onde sonore, il nostro sistema uditivo percepisce la sovrapposizione di due suoni in modo differente, a seconda della distanza tra le frequenze dei suoni componenti. In particolare:

- se le due frequenze ω_1 ed ω_2 sono sufficientemente lontane tra loro, la sovrapposizione di due suoni è percepita come l’insieme di due suoni distinti;
- se le due frequenze ω_1 ed ω_2 sono molto simili, non si percepiscono più due suoni distinti ma un unico suono di altezza simile a quella delle componenti (“battente”).

Non specifichiamo cosa vuol dire “frequenze vicine” o “lontane”, ma riportiamo solo alcuni esempi.
Siano

$$y_1 = \sin(\omega_1 t), \quad y_2 = \sin(\omega_2 t)$$

le equazioni che descrivono le due onde, con $\omega_1 < \omega_2$. L’onda corrispondente all’effetto combinato di y_1 e y_2 è data da

$$y = y_1 + y_2 = \sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t).$$

Attraverso le formule di prostaferesi, otteniamo

$$y = 2\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right).$$

Si tratta di una nuova onda, con pulsazione pari alla media aritmentica di ω_1 e ω_2, ma con ampiezza variabile $F(t)$ data da:

$$F(t) = 2\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right).$$

In Figura 28, possiamo vedere i grafici delle funzioni $y_1 = \sin(5t)$, $y_2 = \sin(5.3t)$, mentre in Figura 29 è riportato il grafico di $y = \sin(5t) + \sin(5.3t)$. Le due sinusoidi y_1 e y_2 partono in sincrono, per cui inizialmente la loro somma somiglia ad una sinusoide di ampiezza doppia, poi la sinusoide con frequenza maggiore anticipa sempre di più l'altra. L'effetto totale è un segnale che ha un andamento ancora sinusoidale, ma con un'ampiezza che aumenta e diminuisce periodicamente con una frequenza più bassa.

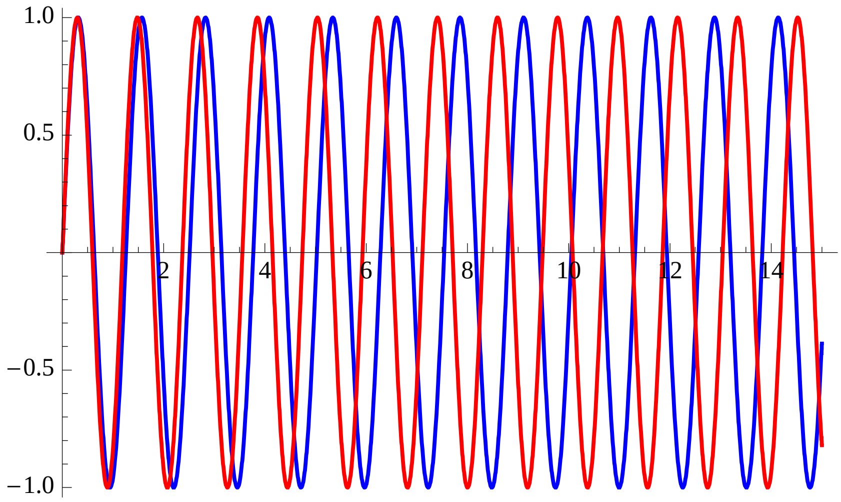


Figura 28: Grafico di $y_1 = \sin(5t)$ in blu, grafico di $y_2 = \sin(5.3t)$ in rosso.

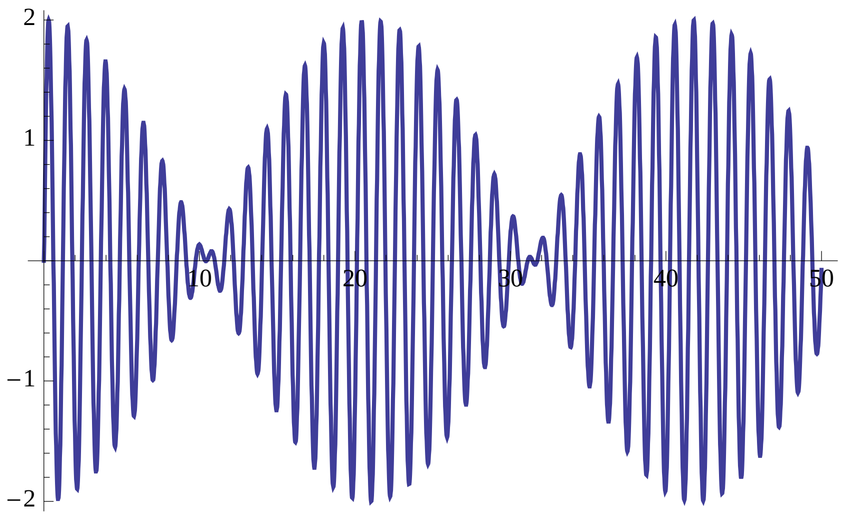


Figura 29: Grafico di $y = \sin(5t) + \sin(5.3t)$.

Il fenomeno dei battimenti di ha anche tra segnali sinusoidali sfasati o con ampiezze diverse.

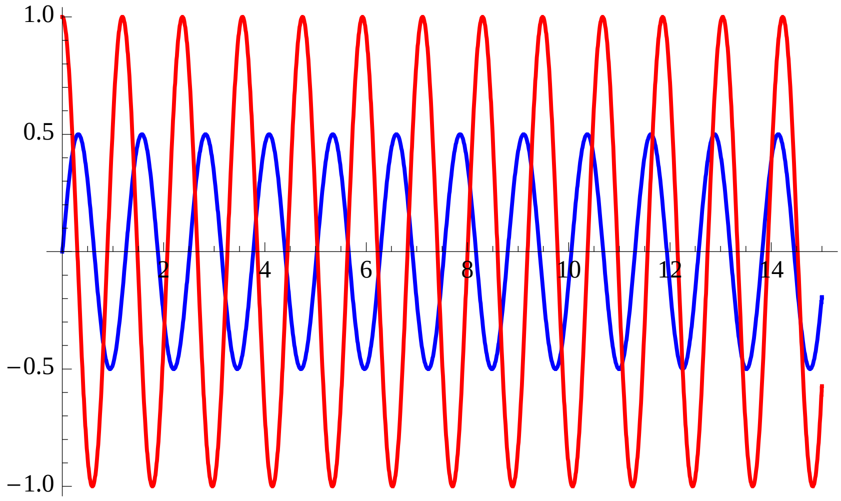


Figura 30: Grafico di $y_1 = \frac{1}{2}\sin(5t)$ in blu, grafico di $y_2 = \cos(5.3t)$ in rosso.

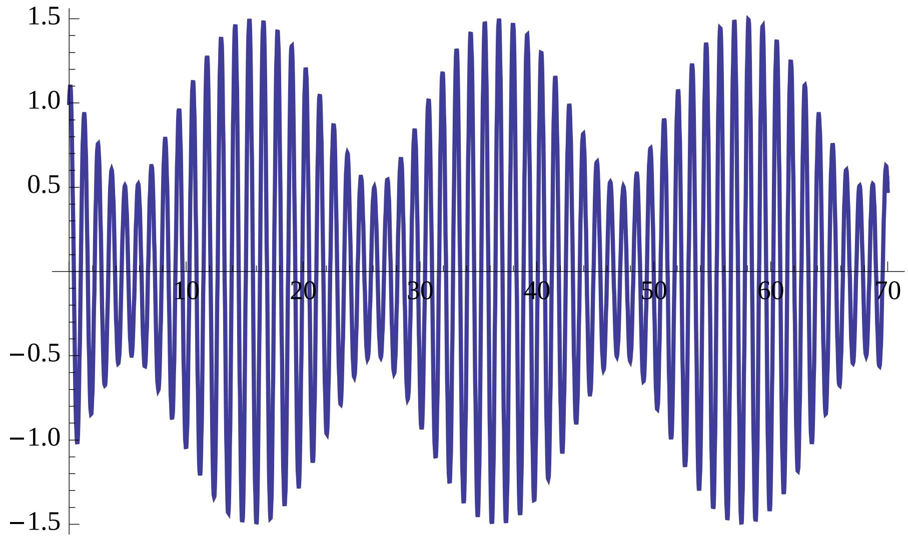


Figura 31: Grafico di $y = \frac{1}{2}\sin(5t) + \cos(5.3t)$.