METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE: APPUNTI 2016-2017

1. Elementi di topologia di $\mathbb{R}^m$

Ricordiamo che per $x, y \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti proprietá

- $|x| \geq 0$
- $x \neq 0$ se e solo se $|x| > 0$
- $|x| = |-x|$
- $|xy| = |x||y|$
- $|x+y| \leq |x| + |y|$
- $||x| - |y|| \leq |x - y|$

1.1. **Norma.** $\mathbb{R}^m$ con $p > 1$. La formula

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_m|^p)^{1/p}.$$

definisce una norma in $\mathbb{R}^m$. (da dimostrare più tardi tramite la disuguaglianza di Young, Holder, Minkowski).

Occorre verificare che valgono le seguenti proprietà $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^m$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

- $\|x\| \geq 0$,
- $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

1.2. **Il prodotto scalare.** Il prodotto scalare in $\mathbb{R}^m$ è un numero reale dato da

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_m y_m \qquad \text{per ogni } x, y, z \ \in \mathbb{R}^m \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Occorre verificare che valgono le seguenti proprietà

$$x \cdot y = y \cdot x, \qquad (x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z, \qquad \lambda(x \cdot y) = \lambda x \cdot y.$$

$$(x, x) = \|x\|^2$$

Esempio 1.1.

- *La formula*

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_m|, \quad x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$$

definisce una norma su $\mathbb{R}^m$. Infatti dimostriamo la disuguaglianza triangolare

$$\|x+y\|_1 = |x_1 + y_1| + \cdots + |x_m + y_m| \leq= |x_1| + |y_1| \cdots + |x_m| + |y_m|$$
$$= \|x\|_1 + \|y\|_1$$

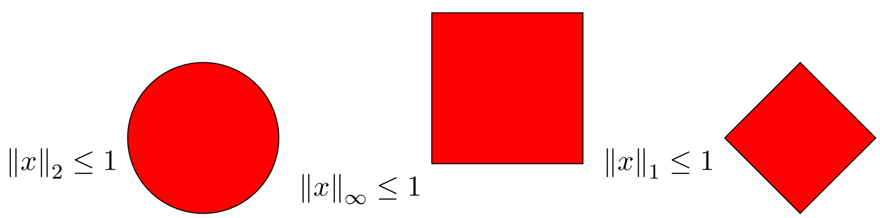
- *La formula*
$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_m|\}$$
definisce una norma su $\mathbb{R}^m$.

$$\|x+y\|_\infty = \max\{|x_1+y_1|, \ldots, |x_m+y_m|\} \leq \max\{|x_i|\} + \max\{|y_i|\} = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

Vale la relazione
$$\lim_{p\to+\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$$

Sfruttando la relazione tra le norme, valida per ogni $p \geq 1$
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq m^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$$

1.3. **Intorni.** Disegnare gli intorni
$$\|x\|_2 \leq 1 \quad \|x\|_\infty \leq 1 \quad \|x\|_1 \leq 1$$



Gli esempi appena visti sono casi particolari di una teoria molto importante. Ricordiamo alcune nozioni fondamentali

1.4. **Spazi vettoriali.** Uno spazio vettoriale su un campo K è un insieme V dotato di due operazioni binarie, dette somma e moltiplicazione per scalare, caratterizzate da determinate proprietà

Gli elementi di V sono detti vettori e quelli di K scalari. Le operazioni sono:

-una somma dati due vettori u, v la somma fornisce un altro vettore indicato con $u+v$,
$$(u, v) \to u+v$$
-un prodotto per scalare che dato un vettore v e uno scalare λ fornisce un altro vettore indicato con λv .
$$(\lambda, v) \to \lambda v$$
Gli assiomi che queste due operazioni devono soddisfare sono i seguenti[

L'insieme V con la somma è un gruppo abeliano:

la somma è commutativa e associativa,

esiste quindi un elemento neutro 0,

ogni vettore v ha un opposto che è normalmente indicato con $-v$;

$$\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v \quad \forall \lambda \in K \ \forall u, v \in V$$

$$(\lambda + \lambda_1)v = \lambda v + \lambda_1 v \quad \forall \lambda, \lambda_1 \in K \ \forall v \in V$$

$$(\lambda\lambda_1)v = \lambda(\lambda_1 v) \quad \forall\lambda, \lambda_1 \in K \ \forall v \in V$$

$$1v = v \ \forall v \in V$$

Esempio $\mathbb{R}^m$ su $\mathbb{R}$.

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_m + y_m)$$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_m)$$

Sia V uno spazio vettoriale, un sottoinsieme W di V è un sottospazio vettoriale se è uno spazio vettoriale rispetto alle stesse operazioni di V.

$$\forall\lambda, \lambda_1 \in K, \ \forall u, v \in V \implies \lambda u + \lambda_1 v \in W$$

Notazione $V(K)$, V su K

1.5. **Spazi normati.** Uno spazio vettoriale $X(\mathbb{R})$ munito di norma si chiama spazio vettoriale normato o semplicemente spazio normato. $\forall x, y, z \in X$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, valgono le proprietà:

- $\|x\| \geq 0$,
- $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

1.6. **Disuguaglianza di Young.** Dato $p > 1$, $p \in \mathbb{R}$ diciamo coniugato di p il numero reale q tale che

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Teorema 1.2. *Disuguaglianza di Young (esponenti reali): dati due numeri reali positivi a e b, e dati p, q numeri reali coniugati, si ha*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Proof. Fissiamo $b > 0$

$$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

$$f(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{b^q}{q} - tb$$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{t^p}{p} + \frac{b^q}{q} - tb = +\infty$$

$$f(0) = \frac{b^q}{q} > 0$$

$$f'(t) = t^{p-1} - b$$

$$t^{p-1} = b \iff t = b^{\frac{1}{p-1}}$$

$$f''(b^{\frac{1}{p-1}}) > 0$$

Punto di minimo relativo che è anche punto di minimo assoluto

$$f(b^{\frac{1}{p-1}}) = \frac{b^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \frac{b^q}{q} b^q - b^{\frac{1}{p-1}} b = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1\right) b^q = 0$$

Allora risulta per ogni numero reale $a \geq 0$

$$f(a) \geq 0,$$

ossia

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$$

□

Teorema 1.3 (disuguaglianza di Hölder)**.** *Per p, q esponenti coniugati e $p, q \in [1, +\infty)$ e $\forall x, y \in \mathbb{R}^m$ abbiamo*

$$|x \cdot y| \leq \|x\|_p \|y\|_q. \tag{1.1}$$

Si fissi

$$a_i = \frac{|x_i|}{\|x\|_p}, \qquad b_i = \frac{|y_i|}{\|y\|_q}$$

Dalla disuguaglianza di Young

$$a_i b_i \leq \frac{1}{p} \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}$$

Sommando

$$\sum_{i=1}^{m} a_i b_i \leq \frac{1}{p} \frac{\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{\sum_{i=1}^{m} |y_i|^q}{\|y\|_q^q} = 1$$

Da cui si evince

$$\sum_{i=1}^{m} a_i b_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{|x_i|}{\|x\|_p} \frac{|y_i|}{\|y\|_q} \leq 1$$

e la disuguaglianza di Hölder segue

$$|x \cdot y| \leq \|x\|_p \|y\|_q. \tag{1.2}$$

Teorema 1.4 (Disuguaglianza Minkowski)**.** *Per* $p \in [1, +\infty)$ *e* $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^m$ *abbiamo*

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p. \tag{1.3}$$

$$|x_i + y_i|^p = |x_i + y_i|^{p-1} |x_i + y_i| \leq$$
$$|x_i + y_i|^{p-1} (|x_i| + |y_i|)$$

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{p-1} |x_i| + \sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{p-1} |y_i|$$

Si ha

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{p-1} |x_i| \leq \|x\|_p \|(x + y)^{(p-1)}\|_q = \|x\|_p \left(\sum_{i=1}^{m} \ |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{p-1} |y_i| \leq \|y\|_p \|(x + y)^{(p-1)}\|_q = \|y\|_p \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}}$$

Quindi da $(p - 1)q = p$

$$\|x + y\|_p^p \leq \|x + y\|_p^{p-1} (\|x\|_p + \|y\|_p)$$

e dividendo per $\|x + y\|_p^{p-1}$ (assumendo non nullo) si ottiene la Disuguaglianza di Minkowski

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Esempio. $\mathbb{R}^m(\mathbb{R})$ dotato della norma euclidea di x. Dato un punto $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$

$$\|x\|_2 = \left(x_1^2 + \cdots + x_m^2 \right)^{1/2}.$$

Due norme $\|x\|_a$ $\|x\|_b$ si dicono equivalenti se esistono due costanti m e M tali che

$$m \|x\|_b \leq \|x\|_a \leq M \|x\|_b.$$

Si ha che le norme p per $p \geq 1$ sono tra loro equivalenti.

Esercizio 1. Data la funzione

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

calcolare la derivata direzionale di f nel punto (1,2) lungo la direzione del versore $v = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

Calcolare il minimo e il massimo assoluti di f nella regione D delimitata dal trapezio di vertici

$$(1,2), (-1,2), (1/4, 1/2), (-1/4, 1/2),$$

compresi i lati

Risposta $f_v = -\sqrt{2}$ $\quad m = -4,\ M = -3/16.$

Esercizio 2. Data la funzione $f(x,y) = x - y$ determinare minimi e massimi assoluti nell'insieme

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ -1 \leq x \leq 1,\ -2 \leq y \leq 2\}$$

Risposta m=-3, M=3.

Esercizio 3. Data la funzione $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy$ determinare minimi e massimi assoluti nel cerchio unitario

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Risposta $m = -\sqrt{2},\ M = \sqrt{2}.$