Correzione scritto 07/01/2020

Esercizio 1

Soluzione: Si noti che f è dispari dunque $a_{100} = 0$. Inoltre,

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x \sin x dx$$
$$\frac{2}{\pi}\Big[-x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx\Big] = \frac{2}{\pi}\pi = 2.$$

Esercizio 2

Soluzione: Calcolando le derivate parziali, i punti critici verificano il seguente sistema:

$$\begin{cases} f_x = 2x = 0, \\ f_y = 2\cos(2y) = 0. \end{cases}$$

Dalla prima otteniamo $x = 0$. Dalla seconda $2y = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Perciò i punti critici sono

$$P_k = \Big(0, \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\Big), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Calcolando le derivate seconde, l'Hessiana è data da

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4\sin(2y) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Dunque, se k é pari, da (1)

$$H(P_k) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4\sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Dunque, se k é pari, allora $\det H(P_k) < 0$ quindi P_k è un punto di sella.

Se k é dispari, da (1), abbiamo che

$$H(P_k) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\det H(P_k) > 0$ e $f_{xx}(P_k) > 0$. Quindi, se k è dispari, P_k è un minimo relativo.

Esercizio 3

Soluzione: a) Poiché $f(x,y) = e^{\ln(y^{x\ln y})} = e^{x(\ln y)^2}$, allora

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y}[x(\ln y)^2]e^{\ln(y^{x\ln y})} = 2\frac{x}{y}\,\ln y\, y^{x\ln y}.$$

b) Notiamo che $f_x = \frac{1}{x+y}$, $f_{xx} = -\frac{1}{(x+y)^2}$, $f_{xxx} = 2\frac{1}{(x+y)^3}$.... Dunque si può ipotizzare che

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} f = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(x+y)^n}. \tag{2}$$

La formula precedente si dimostra per induzione. Infatti, abbiamo visto che per $n = 1$ la formula è vera. Dunque, supponendo (2) vera per $n-1$, allora

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} f = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} f = \frac{\partial}{\partial x}\Big[(-1)^{n-2}(n-2)!\frac{1}{(x+y)^{n-1}}\Big] = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(x+y)^n}.$$

Esercizio 4

Soluzione: Sia $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^2$ una mappa di classe C^1, cioé una curva regolare. Allora la lunghezza $L(\gamma)$ è data da:

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt,$$

dove $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

Nel caso di una circonferenza di raggio 2 si ha: $x(t) = 2\cos t$, $y(t) = 2\sin t$ per $t \in [0, 2\pi]$. Con semplici calcoli si ha $L(\gamma) = 4\pi$.

Esercizio 5

Formule di Gauss-Green: Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio con frontiera ∂D regolare, $f : D \to \mathbb{R}$ di classe C^1 allora

$$\int_D \frac{\partial f}{\partial x} dxdy = \int_{\partial^+ D} f dy, \tag{3}$$

$$\int_D \frac{\partial f}{\partial y} dxdy = -\int_{\partial^+ D} f dx; \tag{4}$$

dove $\partial^+ D$ indica la frontiera di D orientata positivamente.

Si ricorda che l'area di D (che indichiamo con $m(D)$) è dato dall'integrale doppio

$$m(D) = \int_D 1 dxdy.$$

Usando (3) con $f(x,y)=x$ otteniamo

$$m(D)=\int_{\partial^+ D} xdy.$$

Analogamente, ponendo in (4) $f(x,y)=y$ si ottiene

$$m(D)=-\int_{\partial^+ D} ydx.$$

Combinando le precedenti ottieniamo

$$\frac{1}{2}\Big[\int_{\partial^+ D} xdy-ydx\Big]=\frac{1}{2}[m(D)+m(D)]=m(D). \tag{5}$$

L'ellisse $E:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}<1\}$ ha semiassi maggiore (sulle ascisse) pari ad 5 e semiasse minore (sulle ordinate) pari ad 2. La frontiera orientata $\partial^+ E$ può essere parametrizzata come

$$\begin{cases} x(t)=5\cos t, \\ y(t)=2\sin t; \end{cases} \tag{6}$$

con $t\in[0,2\pi]$. Dunque, usando (5) si ottiene

$$\begin{aligned} m(D) &= \frac{1}{2}\int_{\partial^+ E} xdy-ydx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x(t)y'(t)dt-y(t)x'(t)dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 5\cos t(2\cos t)dt-2\sin t(-5\sin t)dt=10\pi; \end{aligned}$$

dove abbiamo usato che $\cos^2 t+\sin^2 t=1$.