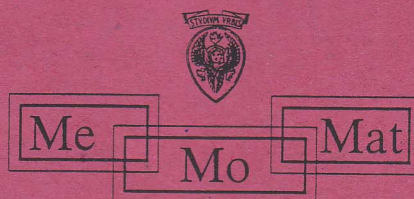


Università degli Studi di Roma
“La Sapienza”

TRASFORMATA DI HILBERT

Giorgio VERGARA CAFFARELLI
Paola LORETI



Quaderni Didattici del
Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici
per le Scienze Applicate

Trasformata di Hilbert

Giorgio Vergara Caffarelli* e Paola Loreti*

February 17, 1999

Nota degli autori.

Allo scopo di semplificare le varie dimostrazioni, nel presente quaderno i risultati vengono esposti senza tenere conto delle ipotesi più raffinate.

Per uno studio più approfondito si rimanda ad esempio al libro: J.N. PAUDEL, *The Hilbert transform of Schwartz distributions and applications* (Wiley-Interscience).

1 Trasformata di Hilbert—Definizioni

Nel seguito utilizzeremo la notazione \mathcal{H} per indicare la trasformata di Hilbert.

Definizione 1.1 Diremo che g è la \mathcal{H} -trasformata di una distribuzione f se

$$(1) \quad g(x) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \left(\frac{1}{x} \right) * f(x) = \mathcal{H}(f)$$

essendo $\mathcal{P} \left(\frac{1}{x} \right)$ la parte principale di $\frac{1}{x}$ ed $*$ il prodotto di convoluzione.

Osservazione 1. $\mathcal{H}(f)$ non è sempre definita poiché è il prodotto di convoluzione di due distribuzioni.

Definizione 1.2 La \mathcal{H} -trasformata in rappresentazione di integrale è data da

$$(2) \quad g(x) = \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt = \mathcal{H}(f)$$

Dalla (2) si ha

$$(3) \quad g(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|t-x| > \varepsilon} \frac{f(t)}{x-t} dt$$

Inoltre dalla (3), posto $t' = x - t$ otteniamo

$$\mathcal{H}(f)(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|t'| > \varepsilon} \frac{f(x-t')}{t'} dt' = \frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x-t) - f(x+t)}{t} dt,$$

essendo $1/t$ una funzione dispari.

Si ha quindi (quando esiste)

$$(4) \quad \mathcal{H}(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(x-t) - f(x+t)}{t} dt$$

Infine, tenuto conto delle regole di derivazione per il prodotto di convoluzione si ha

$$(5) \quad \mathcal{H}(f)(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} (\ln|x| * f(x)) = \frac{1}{\pi} \frac{df}{dx} * \ln|x|$$

Come già precisato, nel seguito non ci occuperemo delle proprietà di esistenza della trasformata di Hilbert quale, ad esempio, del fatto che trasforma funzioni di quadrato sommabile in funzioni di quadrato sommabile, bensì soltanto delle sue proprietà formali.

2 Legame tra la parte reale e immaginaria della trasformata di Fourier di un segnale causale

Ricordiamo alcune proprietà note della \mathcal{F} -trasformata

$$(1) \quad \mathcal{F}(f \cdot g) = \frac{1}{2\pi} F * G \quad \mathcal{F}(\text{sgn}(x))(\omega) = \frac{2}{i} \mathcal{P}\left(\frac{1}{\omega}\right)$$

Consideriamo ora un segnale causale e reale f cioè

$$(2) \quad f(x) \equiv 0 \quad \text{per } x < 0 \quad \text{e} \quad f(x) \in \mathbb{R};$$

ricordiamo inoltre che possiamo scrivere f come somma di una funzione pari e di una funzione dispari, più esattamente $f = f_p + f_d$ con

$$f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad f_d(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Dalle (2) si ha che

$$\begin{aligned} \text{per } x < 0 & \quad f_p(x) = -f_d(x) \\ \text{per } x > 0 & \quad f_p(x) = f_d(x) \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} f_p(x) &= \text{sign}(x) f_d(x) \\ f_d(x) &= \text{sign}(x) f_p(x) \end{aligned}$$

Consideriamo la trasformata di Fourier

$$F(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega) = \mathcal{F}(f_p)(\omega) + \mathcal{F}(f_d)(\omega)$$

ed inoltre poniamo $R(\omega) = \text{Re}F(\omega)$ e $X(\omega) = \text{Im}F(\omega)$ cioè

$$F(\omega) = R(\omega) + iX(\omega)$$

da cui deduciamo per le proprietà delle \mathcal{F} -trasformate delle funzioni pari e dispari

$$(3) \quad \text{Re } F(\omega) = \mathcal{F}(f_p)(\omega) = R(\omega)$$

$$(4) \quad \text{Im } F(\omega) = \frac{\mathcal{F}(f_d)(\omega)}{i} = X(\omega)$$

Abbiamo quindi

$$R(\omega) = \mathcal{F}(f_p)(\omega) = \mathcal{F}(\text{sign}(x) f_d(x))(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{i} \mathcal{P}\left(\frac{1}{\omega}\right) * (iX(\omega))$$

cioè

$$(5) \quad R = \mathcal{H}(X)$$

mentre da $f_d(x) = f_p(x) \operatorname{sgn}(x)$ e (4) deduciamo

$$iX(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{i} \mathcal{P} \left(\frac{1}{\omega} \right) * R(\omega),$$

cioè

$$(6) \quad X = -\mathcal{H}(R)$$

3 Relazioni incrociate

Come nel paragrafo precedente sia f reale e causale. Poniamo per la sua \mathcal{F} -trasformata F :

$$F(\omega) = R(\omega) + iX(\omega)$$

Abbiamo visto che

$$X = -\mathcal{H}(R) \quad \text{e} \quad R = \mathcal{H}(X)$$

Inoltre, essendo f reale, si ha $F(\omega) = \overline{F(-\omega)}$ per cui $R(\omega)$ è una funzione pari e $X(\omega)$ è una funzione dispari.

Proposizione 3.1 *Sussistono le seguenti relazioni (relazioni incrociate)*

$$(1) \quad R(\omega) = \frac{2}{\pi} \text{v.p.} \int_0^{+\infty} \frac{\nu X(\nu)}{\nu^2 - \omega^2} d\nu$$

$$(2) \quad X(\omega) = \frac{2\omega}{\pi} \text{v.p.} \int_0^{+\infty} \frac{R(\nu)}{\nu^2 - \omega^2} d\nu$$

Dimostrazione. Consideriamo $R(\omega)$

$$R(\omega) = \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{X(\nu)}{\omega - \nu} d\nu$$

Decomponiamo l'integrale

$$R(\omega) = \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{X(\nu)}{\omega - \nu} d\nu + \int_0^{+\infty} \frac{X(\nu)}{\omega - \nu} d\nu \right)$$

Introduciamo la nuova variabile $\nu' = -\nu$ e sostituiamola nel primo integrale; poiché il numeratore è una funzione dispari si ottiene

$$R(\omega) = \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \left(\int_0^{+\infty} X(\nu) \left[\frac{1}{\omega - \nu} - \frac{1}{\omega + \nu} \right] d\nu \right)$$

da cui la (1).

Mentre, dalla formula

$$X(\omega) = -\frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R(\nu)}{\omega - \nu} d\nu$$

ricordando che R è pari, decomponendo l'integrale e sostituendo $\nu' = -\nu$ nel primo integrale otteniamo

$$\begin{aligned} X(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \text{v.p.} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{R(\nu)}{\omega - \nu} d\nu + \int_0^{+\infty} \frac{R(\nu)}{\omega - \nu} d\nu \right) = \\ &= +\frac{1}{\pi} \text{v.p.} \left(\int_0^{+\infty} R(\nu) \left[\frac{1}{\omega + \nu} + \frac{1}{\omega - \nu} \right] d\nu \right) \end{aligned}$$

da cui la (2).

4 Relazione di dispersione

Studieremo ora il legame sull'asse reale tra $\text{Re } f(z)$ e $\text{Im } f(z)$ per $z = x$, con $f(z)$ olomorfa in un semipiano contenente tale asse.

Indichiamo con $u(z)$ la parte reale e con $v(z)$ la parte immaginaria di f :

$$f(z) = u(z) + iv(z)$$

Supporremo inoltre che

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow +\infty \\ \text{Im } z > 0}} f(z) = 0 \quad \text{uniformemente per } \text{Arg } z \in [0, \pi]$$

Consideriamo $x \in R$; mettiamo intorno ad x una piccola semicirconfenza γ_ε in modo che, considerato il circuito di figura 4.1, nel piano complesso $\zeta = \xi + \eta$, valga dal 2° teorema di Cauchy, la formula

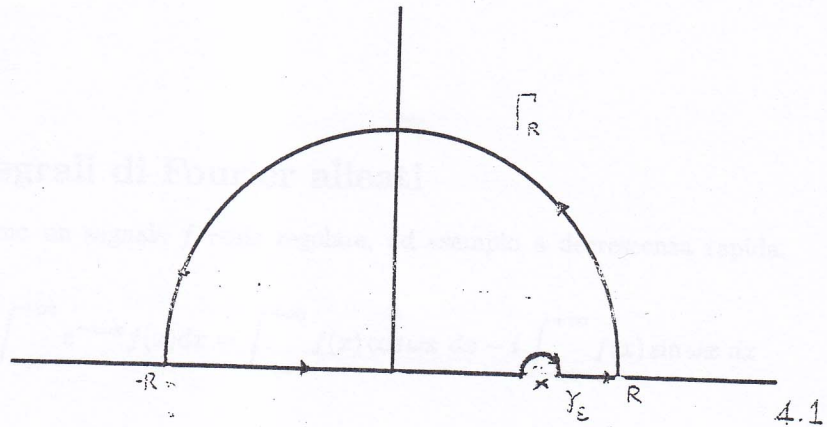
$$(1) \quad \int_{-R:|\xi-x|>\varepsilon}^R \frac{f(\xi)}{\xi - x} d\xi + \int_{+\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - x} d\zeta + \int_{+\Gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - x} d\zeta = 2\pi i f(x)$$

Effettuando il limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ e per $R \rightarrow +\infty$, per il lemma del grande settore e per il lemma del piccolo settore gli integrali curvilinei su γ_ε e Γ_R convergono rispettivamente a $-\pi i f(x)$ e zero per cui si ha

$$-\pi i f(x) = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi)}{x - \xi} d\xi$$

e quindi separando parte reale e parte immaginaria otteniamo le formule

$$(2) \quad v(x) = \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(\xi)}{x - \xi} d\xi$$



$$(3) \quad u(x) = -\frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v(\xi)}{x-\xi} d\xi$$

da cui

$$(4) \quad v(x) = \mathcal{H}(u)(x)$$

$$(5) \quad u(x) = -\mathcal{H}(v)(x)$$

Definizione 4.1 Diremo segnale analitico associato a un segnale reale $u(x)$ il segnale complesso

$$w(x) = u(x) + i\mathcal{H}(u)(x)$$

5 Teorema di convoluzione

Teorema di convoluzione. Consideriamo due funzioni u, v , ad esempio in $L^p(\mathbb{R})$ con $p > 2$. Si ha

$$\mathcal{H}(u\mathcal{H}(v) + v\mathcal{H}(u)) = \mathcal{H}(u)\mathcal{H}(v) - u \cdot v$$

Dimostrazione. L'aspetto fondamentale della dimostrazione è il fatto che con le funzioni u, v si possono costruire due funzioni olomorfe Φ_1, Φ_2 nel seguente modo:

si pone

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= u, & \psi_1 &= \mathcal{H}(u), & \Phi_1 &= \varphi_1 + i\psi_1 \\ \varphi_2 &= v, & \psi_2 &= \mathcal{H}(v), & \Phi_2 &= \varphi_2 + i\psi_2. \end{aligned}$$

Adesso consideriamo il prodotto $\Phi = \Phi_1 \cdot \Phi_2$ che è ancora una funzione olomorfa e risulta

$$(1) \quad \text{Re}(\Phi_1 \cdot \Phi_2) = \varphi_1\varphi_2 - \psi_1\psi_2$$

$$(2) \quad \text{Im}(\Phi_1 \cdot \Phi_2) = \psi_1\varphi_2 + \varphi_1\psi_2$$

Poiché $\text{Re} \Phi(x) = -\mathcal{H}(\text{Im} \Phi)(x)$ si ha

$$uv - \mathcal{H}(u)\mathcal{H}(v) = -\mathcal{H}(u\mathcal{H}(v) + v\mathcal{H}(u))$$

6 Integrali di Fourier alleati

Consideriamo un segnale f reale regolare, ad esempio a decrescenza rapida. Abbiamo

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \omega x dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \omega x dx$$

Definendo

$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \omega x dx$$

$$b(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \omega x dx$$

ne segue

$$F(\omega) = a(\omega) - ib(\omega).$$

Decomposto $F(\omega)$ in parte pari e parte dispari, cioè posto

$$F(\omega) = F_p(\omega) + F_d(\omega),$$

risulta

$$a(\omega) = F_p(\omega),$$

$$b(\omega) = iF_b(\omega)$$

Per la formula dell'antitrasformata si ha inoltre

$$(1) f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} F(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \{a(\omega) \cos \omega x + b(\omega) \sin \omega x\} d\omega$$

Andiamo ad introdurre l'integrale alleato. Consideriamo ora la funzione della variabile complessa $z = x + iy$ definita da

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \{a(\omega) - ib(\omega)\} e^{iz\omega} d\omega \quad \text{per } y = \text{Im } z \geq 0.$$

Φ è olomorfa nel semipiano $\text{Im } z > 0$ ed inoltre, poiché

$$e^{iz\omega} = e^{-y\omega} (\cos x\omega + i \sin x\omega)$$

si ha

$$\text{Re } \Phi(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-y\omega} \{a(\omega) \cos x\omega + b(\omega) \sin x\omega\} d\omega$$

$$\text{Im } \Phi(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-y\omega} \{-b(\omega) \cos x\omega + a(\omega) \sin x\omega\} d\omega$$

Calcoliamo ora le tracce di $\text{Re } \Phi(z)$ & $\text{Im } \Phi(z)$ sull'asse reale

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \text{Re } \Phi(z) = f(x)$$

e poniamo, passando al limite sotto il segno di integrale

$$(2) \quad g(x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \text{Im } \Phi(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \{-b(\omega) \cos x\omega + a(\omega) \sin x\omega\} d\omega$$

Definizione 6.1 La funzione g definita dalla (2) prende il nome di integrale di Fourier alleato di $f(x)$, definita dalla (1). Ovviamente per l'olomorfia di Φ

$$g(x) = \mathcal{H}(f)(x)$$

Studiamo infatti il legame tra $F(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega)$ e $G(\omega) = \mathcal{F}(g)(\omega)$.

Ricordiamo la (2) e poiché risulta

$$a(\omega) = \frac{F(\omega) + F(-\omega)}{2} \quad \text{e} \quad b(\omega) = \frac{F(\omega) - F(-\omega)}{2} i$$

sostituendo si ha

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} [-b(\omega) \cos \omega x + a(\omega) \sin \omega x] d\omega = \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_0^{+\infty} -[F(\omega) - F(-\omega)] \cos \omega x - i[F(\omega) + F(-\omega)] \sin \omega x d\omega \\ &= -\frac{i}{2\pi} \left(\int_0^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega - \int_0^{+\infty} F(-\omega) e^{-i\omega x} d\omega \right) = \\ &= -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \text{sign } \omega e^{i\omega x} d\omega \end{aligned}$$

quindi, per la formula dell'antitrasformata

$$(3) \quad G(\omega) = -iF(\omega) \text{sgn } (\omega)$$

osserviamo che(3) equivale a

$$(4) \quad g = \mathcal{H}(f)$$

Per le regole di simmetria infatti, applicando a (3) la \mathcal{F} -trasformata segue

$$g(-x) = -if(-x) * \frac{1}{\pi i} \mathcal{P} \left(\frac{1}{x} \right)$$

da cui cambiando $-x$ in x

$$g(x) = \frac{1}{\pi} f(x) * \mathcal{P} \left(\frac{1}{x} \right)$$

Osservazione. Risulta

$$\mathcal{H}^2(f)(x) = -f(x)$$

infatti posto $g = \mathcal{H}(f)$ & $l = \mathcal{H}(g)$ si ha, considerando le \mathcal{F} -trasformate,

$$G(\omega) = -iF(\omega) \operatorname{sgn}(\omega) \text{ \& } L(\omega) = -iG(\omega) \operatorname{sign}(\omega)$$

da cui

$$L(\omega) = -F(\omega)$$

cioè

$$l(x) = \mathcal{H}^2(f)(x) = -f(x) .$$

7 Formula di Parseval

Diamo una prima dimostrazione dell'identità di Parseval per la \mathcal{H} -trasformata, sfruttando, per le funzioni di quadrato sommabile, gli integrali di Fourier alleati.

Abbiamo ora dimostrato che le relazioni

$$g = \mathcal{H}(f)$$

$$G(\omega) = -iF(\omega) \operatorname{sign} \omega$$

sono equivalenti. Essendo allora

$$|G(\omega)| = |F(\omega)|$$

dall'identità di Parseval per le \mathcal{F} -trasformate si ha

$$\|g\|_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|G\|_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|F\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$$

cioè

$$\|\mathcal{H}(f)\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$$

8 Formule di Plemely

Teorema 8.1 *Sussistono le seguenti formule (Formule di Plemely)*

$$(1) \quad \begin{cases} F_+(\omega) + F_-(\omega) = F(\omega) \\ F_+(\omega) - F_-(\omega) = \frac{1}{i} \mathcal{H}(F)(\omega) \end{cases}$$

ove

$$F_+(\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx, \quad F_-(\omega) = \int_{-\infty}^0 e^{-i\omega x} f(x) dx$$

ed

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx .$$

Dim. Supponendo $f(x)$ sommabile ed introdotta la variabile complessa $\zeta = \omega + i\eta$ estendiamo $F_+(\omega)$ nel semipiano $\eta = \text{Im } \zeta \leq 0$ ponendo

$$F_+(\zeta) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x} e^{\eta x} dx = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-i\zeta x} dx \quad \text{per } \text{Im } \zeta \leq 0$$

e analogamente estendiamo $F_-(\omega)$ nel semipiano $\eta = \text{Im } \zeta \geq 0$ ponendo

$$F_-(\zeta) = \int_{-\infty}^0 f(x)e^{-i\omega x} e^{\eta x} dx = \int_{-\infty}^0 f(x)e^{-i\zeta x} dx \quad \text{per } \text{Im } \zeta \geq 0$$

Risulta ovviamente:

$F_-(\zeta)$ olomorfa in $\eta > 0$

$F_+(\zeta)$ olomorfa in $\eta < 0$

Per applicare il lemma del grande settore assumiamo che sia

$$\lim_{\substack{|\zeta| \rightarrow +\infty \\ \text{Im } \zeta \geq 0}} F_-(\zeta) = 0 \quad \text{uniformemente per } 0 \leq \text{Arg } \zeta \leq \pi$$

&

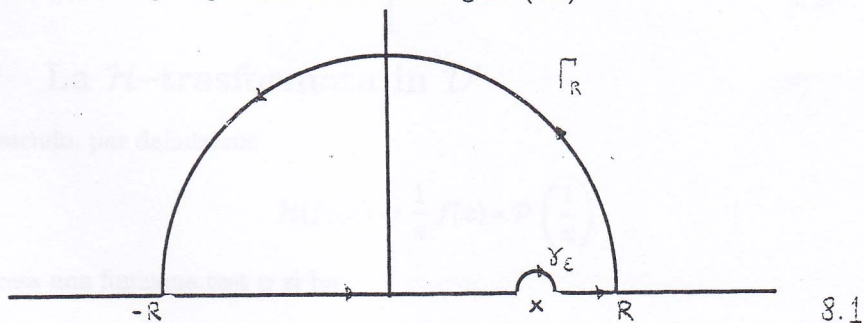
$$\lim_{\substack{|\zeta| \rightarrow +\infty \\ \text{Im } \zeta \leq 0}} F_+(\zeta) = 0 \quad \text{uniformemente per } -\pi \leq \text{Arg } \zeta \leq 0$$

Nota: ad esempio, se si suppone $f'(x)$ sommabile le due relazioni di limite si possono dimostrare con una integrazione per parti.

Calcoliamo ora

$$\text{v.p. } \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_-(\lambda)}{\lambda - \omega} d\lambda = -\mathcal{H}(F_-)(\omega)$$

integrando lungo il percorso indicato in figura (8.1)



Essendo

$$\lim_{\substack{|\zeta| \rightarrow +\infty \\ \text{Im } \zeta > 0}} \frac{\zeta F_-(\zeta)}{\zeta - \omega} = 0$$

e

$$\lim_{\substack{\zeta \rightarrow \omega \\ \text{Im } \zeta > 0}} \frac{(\zeta - \omega)F_-(\zeta)}{\zeta - \omega} = F_-(\omega)$$

Applicando il lemma del grande e del piccolo settore e il I teorema di Cauchy si ha

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_-(\lambda)}{\lambda - \omega} d\lambda = +\pi i F_-(\omega)$$

cioè

$$(2) \quad \mathcal{H}(F_-)(\omega) = -iF_-(\omega)$$

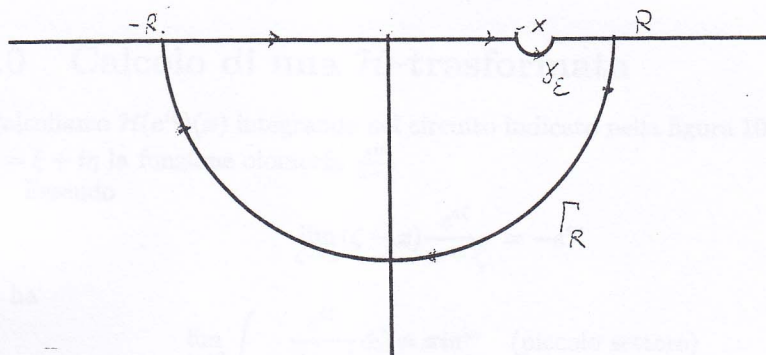
Analogamente integrando F_+ nel circuito indicato in figura (8.2) si ha

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_+(\lambda)}{\lambda - \omega} d\lambda = -\pi i F_+(\omega)$$

cioè

$$(3) \quad \mathcal{H}(F_+)(\omega) = iF_+(\omega)$$

e quindi sommando (2) e (3) la tesi.



8.2

9 La \mathcal{H} -trasformata in \mathcal{D}'

Essendo, per definizione

$$\mathcal{H}(f)(x) = \frac{1}{\pi} f(x) * \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)$$

presa una funzione test φ si ha

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{H}(f), \varphi \rangle &= \frac{1}{\pi} \langle \langle f(\xi) \otimes \mathcal{P}\left(\frac{1}{\eta}\right), \varphi(\xi + \eta) \rangle \rangle \\ &= \langle f(\xi), \langle \frac{1}{\pi} \mathcal{P}\left(\frac{1}{\eta}\right), \varphi(\xi + \eta) \rangle \rangle \end{aligned}$$

Del resto posto $y = \xi + \eta$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \langle \mathcal{P} \left(\frac{1}{\eta} \right), \varphi(\xi + \eta) \rangle = \\ & \text{v.p.} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\xi + \eta)}{\eta} d\eta = \\ & = \text{v.p.} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y - \xi} dy = -\mathcal{H}(\varphi)(\xi) \end{aligned}$$

pertanto si può definire la \mathcal{H} -trasformata di una distribuzione con la formula

$$\langle \mathcal{H}(f), \varphi \rangle = -\langle f, \mathcal{H}(\varphi) \rangle$$

Ponendo ora $f = \mathcal{H}(g)$ e tenendo presente che $-\mathcal{H}^2 = \text{Identità}$ si ha

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi(x)dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}(g)\mathcal{H}(\varphi)dx$$

da cui segue presa $\varphi = g$ la relazione di Parseval.

10 Calcolo di una \mathcal{H} -trasformata

Calcoliamo $\mathcal{H}(e^{i\xi})(x)$ integrando nel circuito indicato nella figura 10.1 del piano

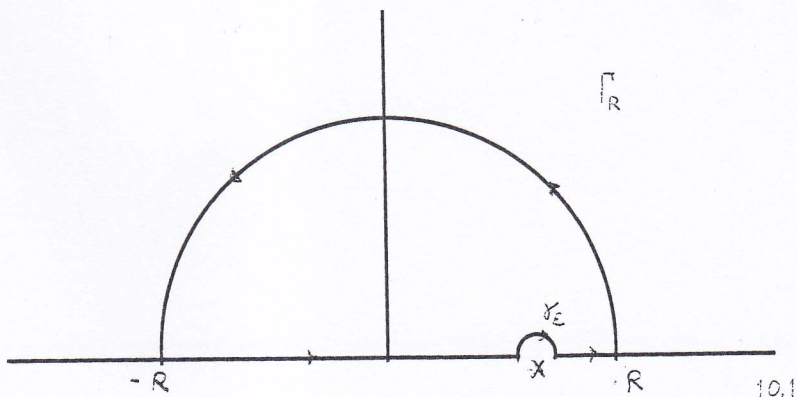
$\zeta = \xi + i\eta$ la funzione olomorfa $\frac{e^{i\zeta}}{x - \zeta}$

Essendo

$$\lim_{\zeta \rightarrow x} (\zeta - x) \frac{e^{i\zeta}}{x - \zeta} = -e^{ix}$$

si ha

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\gamma_\epsilon} \frac{e^{i\zeta}}{x - \zeta} d\zeta = \pi i e^{ix} \quad (\text{piccolo settore})$$



e

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{i\zeta}}{x - \zeta} d\zeta = 0 \quad (\text{lemma di Jordan})$$

e quindi

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\xi}}{x - \xi} d\xi = -\pi i e^{ix}$$

cioè

$$\mathcal{H}(e^{i\xi})(x) = -ie^{ix}$$

Separando la parte reale e immaginaria ne segue

$$\mathcal{H}(\cos \xi)(x) = \sin x$$

$$\mathcal{H}(\sin \xi)(x) = -\cos x$$