Prova Scritta del 10.02. 2014: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
E7	
E8	
E9	
E10	

Esercizio 1

L'integrale

$$\int_0^\pi e^{|2-x|}dx, \text{ risulta}$$

$\boxed{\text{a}}$ 0 $\boxed{\text{b}}$ e^π

$\boxed{\text{c}}$ $1 - e^\pi$ $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Risoluzione (giustificare la risposta)

Si ha

$$|2-x| = \begin{cases} 2-x & se\ 2-x \geq 0 \\ 2-x & se\ 2-x < 0 \end{cases}$$

dunque

$$|2-x| = \begin{cases} 2-x & se\ x \leq 2 \\ 2-x & se\ x > 2 \end{cases}$$

$$\int_0^\pi e^{|2-x|}dx = \int_0^2 e^{2-x}dx + \int_2^\pi e^{x-2}dx = e^2\int_0^2 e^{-x}dx + e^{-2}\int_0^2 e^x dx =$$
$$e^2(-e^{-2}+1) + e^{-2}(e^\pi - e^2) = e^{\pi-2} + e^2 - 2$$

Esercizio 2

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}+\pi}\right)^n, \text{ risulta}$$

$\boxed{\text{a}}$ convergente $\boxed{\text{b}}$ divergente $\boxed{\text{c}}$ oscillante

Risoluzione (giustificare la risposta)

La serie é a termini positivi, pertanto converge o diverge.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}+\pi}\right)^n = 0,$$

pertanto non si può escludere la convergenza (se il limite fosse stato diverso da zero avremmo potuto concludere). Si dimostra la convergenza della serie applicando il criterio della radice

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}+\pi}\right)^n\right)^{1/n} = \frac{1}{1+\pi},$$

grazie al limite notevole

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n} = 1$$

Esercizio 3

Dopo aver disegnato le funzioni $|x|$ e $|x-\pi|$ discutere, al variare di $x \in \mathbb{R}$, quando

$$|x| < |x-\pi|$$

Risoluzione (giustificare la risposta)

Dal grafico delle due funzioni si evince $x < \frac{\pi}{2}$

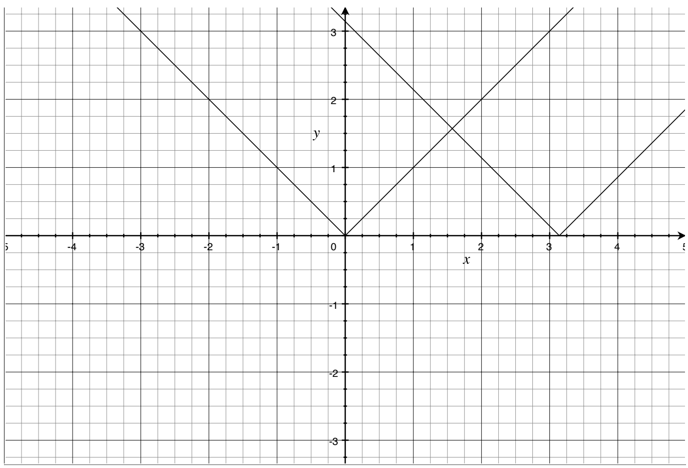

Figura 1: $|x|$, $|x-\pi|$

Esercizio 4

$$\lim_{n\to\infty} |\sin n\frac{\pi}{2}| =$$

a 0 b 1

c non esiste d nessuna delle precedenti

Risoluzione (giustificare la risposta)

Sia $k \in \mathbb{N}$. Si ha

$$|\sin n\frac{\pi}{2}| = \begin{cases} 0 & se\ n = 2k \\ 1 & se\ n = 2k+1, \end{cases}$$

pertanto il limite non esiste.

Esercizio

Calcolare l'integrale

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x - \frac{\pi}{3})dx$$

Risoluzione

Si ha

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\sin(x - \frac{\pi}{3}) = \sin(x)\cos\frac{\pi}{3} - \cos(x)\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos(x)$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x - \frac{\pi}{3})dx = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = -\sqrt{3}$$

Esercizio 6

Determinare la derivata prima e la derivata seconda in $\mathbb{R}$ della funzione

$$f(x) = \sin(2x)\sin(5x)$$

e rispondere alla domanda

$\boxed{\text{Si}}$ $\boxed{\text{No}}$ $x = 0$ è un punto di minimo relativo?

Risoluzione (giustificare la risposta)

$$f'(x) = 2\cos(2x)\sin(5x) + 5\sin(2x)\cos(5x)$$

$$f''(x) = 2[-2\sin(2x)\sin(5x) + 5\cos(2x)\cos(5x)] + 5[2\cos(2x)\cos(5x) - 5\sin(2x)\sin(5x)] =$$

$$-4\sin(2x)\sin(5x) + 10\cos(2x)\cos(5x) + 10\cos(2x)\cos(5x) - 25\sin(2x)\sin(5x) =$$

$$20\cos(2x)\cos(5x) - 29\sin(2x)\sin(5x)$$

$$f'(0) = 0, \qquad f''(0) = 20 > 0.$$

Esercizio 7

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + \sin x}{x + \tan x} =$$

$\boxed{\text{a}}$ 1 $\boxed{\text{b}}$ 0

$\boxed{\text{c}}$ non esiste il limite $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Risoluzione (giustificare la risposta)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + \sin x}{x + \tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1 + \sin x/x)}{x(1 + \tan x/x)} = 1$$

Esercizio 8

L'estremo superiore dell'insieme

$$X = \left\{x \in \mathbb{R},\ x = \frac{n}{n+1}\sqrt{2}, \quad n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, \}\right\}, \text{ risulta}$$

$\boxed{\text{a}}$ $\sqrt{2}$ $\boxed{\text{b}}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{\text{c}}$ 1 $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Risoluzione (giustificare la risposta)

$$x_n = \frac{n}{n+1}\sqrt{2} = \frac{n+1-1}{n+1}\sqrt{2} = \frac{n+1}{n+1}\sqrt{2} - \frac{1}{n+1}\sqrt{2}$$

Pertanto la successione é crescente. Segue

$$\sup_n\{x_n\} = \lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$$

Esercizio 9

$i\sqrt{2}$ é radice di $z^2 + 2 = 0$

VERO FALSO

vero $(i\sqrt{2})^2 + 2 = 0$.
ll prodotto di un numero reale per se stesso é sempre positivo

VERO FALSO

falso $0^2 = 0$

Esercizio 10

Disegnare le funzioni elementari $f(x) = \arctan x$ e $f(x) = \ln |x|$

Risoluzione

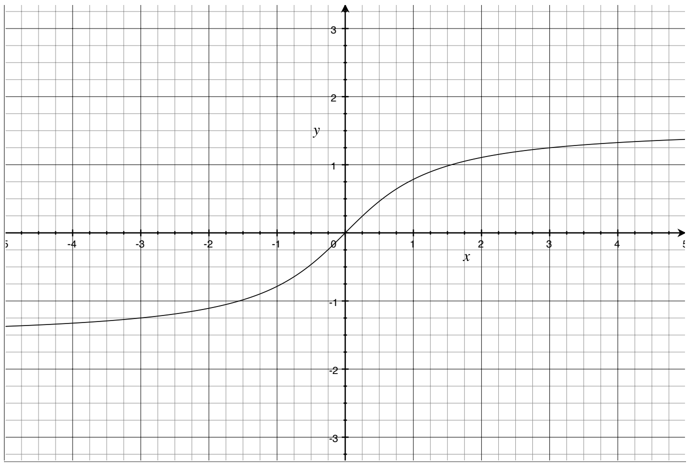

Figura 2: arctan x

Risoluzione

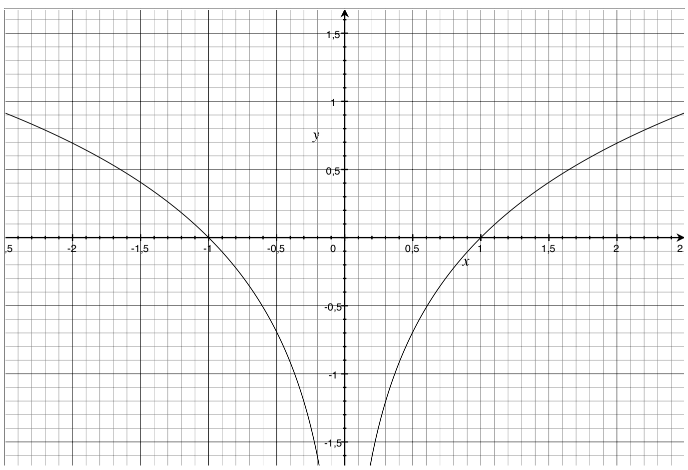

Figura 3: ln $|x|$