ANALISI MATEMATICA I — A.A. 02/03
PROVE SCRITTE E RISOLUZIONI

L. GIACOMELLI, P. LORETI

[1]

Contents

[1]Per evitare confusioni, specifichiamo che in queste pagine la simbologia "$f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$" significa che $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Ometteremo talvolta di specificare il punto di accumulazione x_0, quando questo risulti chiaro dal contesto.

I prova intermedia — 15.11.02 — compito A

1) Sia data la successione
$$a_n = \frac{3n-1}{n+4}, \quad n \in N,\ n \geq 0.$$
(*a*) Determinare (se esiste)
$$\lim_{n\to\infty} a_n\ ;$$
(*b*) dire se $\{a_n\}$ è monotona;
(*c*) determinare estremo superiore/inferiore e (se esistono) massimo/minimo dell'insieme
$$E = \{x \in R:\ x = a_n,\ n \in N, n \geq 0\} \cup \{-1\}.$$
2) Studiare il carattere della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \frac{1}{n^{2\alpha}}$$
al variare del parametro α nei reali positivi.
3) Determinare, se esistono, i seguenti limiti:
(*a*)
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-2}$$
(*b*)
$$\lim_{x\to 3} \frac{\sin(x-3)}{x^2-9}\cos(\pi x)$$
(*c*)
$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha \sin(n\pi + \frac{\pi}{2}) \quad \text{al variare di } \alpha \in R.$$
4) Verificare mediante il principio di induzione che
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{3k}{k+2} \leq 3n-2 \quad \forall n \geq 1.$$

Risoluzioni

Esercizio 1. Si ha
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{1}{n}}{1+\frac{4}{n}} = 3.$$
La successione è monotona crescente: infatti
$$a_{n+1} \geq a_n \iff \frac{3n+2}{n+5} \geq \frac{3n-1}{n+4} \iff 3n^2+14n+8 \geq 3n^2+14n-5 \iff 13 \geq 0.$$
Si ha di conseguenza
$$\sup\{x \in \mathbf{R}:\ x = a_n, n \geq 0\} = 3, \quad \inf\{x \in \mathbf{R}:\ x = a_n, n \geq 0\} = a_0 = -\frac{1}{4},$$
e quindi
$$\sup E = 3, \quad \inf E = -1.$$

Infine, poiché $-1 \in E$, $3 \notin E$,

$$\nexists \max E, \quad \min E = -1.$$

Esercizio 2. Si osserva preliminarmente che

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

Pertanto

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \frac{1}{n^{2\alpha}} \sim \frac{e}{n^{2\alpha}} \quad \text{per } \ n \to \infty.$$

Dal criterio del confronto asintotico segue immediatamente che la serie è convergente per $\alpha > \frac{1}{2}$ ($\iff$ $2\alpha > 1$) e divergente per $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$.

Esercizio 3. (a). Moltiplicando e dividendo l'espressione per $\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}$, si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}} = 0.$$

(b) Effettuando il cambiamento di variabile $y = x - 3$ e ricordando il limite notevole

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1,$$

si ottiene

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sin(x-3)}{x^2-9} \cos(\pi x) = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{(y+6)y} \cos(\pi y + 3\pi) = -\frac{1}{6}.$$

(c) Si osserva anzitutto che

$$\sin(n\pi + \frac{\pi}{2}) = (-1)^n \quad \forall n.$$

Si ha

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha (-1)^n = 0 \quad \text{per } \ \alpha < 0$$

e

$$\nexists \lim_{n\to\infty} n^\alpha (-1)^n \quad \text{per } \ \alpha \geq 0.$$

Infatti, per $\alpha < 0$ la successione è il prodotto di una successione infinitesima e di una limitata:

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha = 0, \quad |(-1)^n| = 1.$$

Per $\alpha \geq 0$ è sufficiente esibire due sottosuccessioni che abbiano limiti diversi: ad esempio

$$\lim_{k\to\infty} (2k)^\alpha (-1)^{2k} = \begin{cases} 1 & \alpha = 0 \\ +\infty & \alpha > 0, \end{cases}$$

mentre

$$\lim_{k\to\infty} (2k+1)^\alpha (-1)^{2k+1} = \begin{cases} -1 & \alpha = 0 \\ -\infty & \alpha > 0. \end{cases}$$

Esercizio 4. La proposizione da dimostrare per $n \geq 1$ è:

$$\mathcal{P}_n : \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{3k}{k+2} \leq 3n - 2 \right]$$

(i) $\mathcal{P}_1$ è vera. Infatti

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{3k}{k+2} = \frac{3}{3} = 1 \leq 1 = 3 \cdot 1 - 2.$$

(ii) $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$. Infatti

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{3k}{k+2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{3k}{k+2} + \frac{3(n+1)}{(n+1)+2} \overset{\mathcal{P}_n \text{ vera}}{\leq} 3n - 2 + \frac{3n+3}{n+3}$$

Poiché

$$3n - 2 + \frac{3n+3}{n+3} \leq 3(n+1) - 2 \iff \frac{3n+3}{n+3} \leq 3 \iff 0 \leq 6,$$

si ottiene

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{3k}{k+2} \leq 3(n+1) - 2,$$

e la verifica è conclusa.

I prova intermedia — 15.11.02 — compito B

1) Sia data la successione

$$a_n = -\frac{n+1}{2n+1}, \quad n \in N,\ n \geq 0.$$

(a) Determinare (se esiste)

$$\lim_{n\to\infty} a_n\ ;$$

(b) dire se $\{a_n\}$ è monotona;

(c) determinare estremo superiore/inferiore e (se esistono) massimo/minimo dell'insieme

$$E = \{x \in R :\ x = a_n,\ n \in N, n \geq 0\} \cup \{-2\}.$$

2) Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \log\left(\frac{n+1}{n}\right) \frac{1}{n^{4\alpha}}$$

al variare del parametro α nei reali positivi.

3) Determinare, se esistono, i seguenti limiti:

(a)

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-2x}$$

(b)

$$\lim_{x\to-1} \frac{(x+2)^{\frac{1}{3}} - 1}{x^2+1} \cos(\pi x)$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha-1}(-1)^n \quad \text{al variare di } \alpha \in R.$$

4) Verificare mediante il principio di induzione che

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{k+1} \geq n \quad \forall n \geq 1.$$

Risoluzioni

Esercizio 1. Si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} -\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = -\frac{1}{2}.$$

La successione è monotona crescente: infatti

$$a_{n+1} \geq a_n \iff \frac{n+2}{2n+3} \leq \frac{n+1}{2n+1} \iff 2n^2+5n+2 \leq 2n^2+5n+3 \iff 0 \leq 1.$$

Si ha di conseguenza

$$\sup\{x \in \mathbf{R} :\ x = a_n, n \geq 0\} = -\frac{1}{2}, \quad \inf\{x \in \mathbf{R} :\ x = a_n, n \geq 0\} = a_0 = -1,$$

e quindi

$$\sup E = -\frac{1}{2}, \quad \inf E = -2.$$

Infine, poiché $-2 \in E$, $-\frac{1}{2} \notin E$,

$$\nexists \max E, \quad \min E = -2.$$

Esercizio 2. Si osserva preliminarmente che

$$\lim_{n\to\infty} n \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Pertanto

$$n \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n^{4\alpha}} \sim \frac{1}{n^{4\alpha}} \quad \text{per } n \to \infty.$$

Dal criterio del confronto asintotico segue immediatamente che la serie è convergente per $\alpha > \frac{1}{4}$ ($\iff 4\alpha > 1$) e divergente per $0 < \alpha \leq \frac{1}{4}$.

Esercizio 3. (a) Moltiplicando e dividendo l'espressione per $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-2x}$, si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-2x}} = 1.$$

(b) La forma non è indeterminata. Si ottiene immediatamente

$$\lim_{x\to-1} \frac{(x+2)^{\frac{1}{3}}-1}{x^2+1}\cos(\pi x) = 0.$$

(c) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha-1}(-1)^n = 0 \quad \text{per } \alpha < 1$$

e

$$\nexists \lim_{n\to\infty} n^{\alpha-1}(-1)^n \quad \text{per } \alpha \geq 1.$$

Infatti, per $\alpha < 1$ la successione è il prodotto di una successione infinitesima e di una limitata:

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha-1} = 0, \quad |(-1)^n| = 1.$$

Per $\alpha \geq 1$ è sufficiente esibire due sottosuccessioni che abbiano limiti diversi: ad esempio

$$\lim_{k\to\infty} (2k)^{\alpha-1}(-1)^{2k} = \begin{cases} 1 & \alpha = 1 \\ +\infty & \alpha > 1, \end{cases}$$

mentre

$$\lim_{k\to\infty} (2k+1)^{\alpha-1}(-1)^{2k+1} = \begin{cases} -1 & \alpha = 1 \\ -\infty & \alpha > 1. \end{cases}$$

Esercizio 4. La proposizione da dimostrare per $n \geq 1$ è:

$$\mathcal{P}_n : \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{k+1} \geq n\right]$$

(*i*) $\mathcal{P}_1$ è vera. Infatti

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{2k}{k+1} = \frac{2}{2} = 1 \geq 1.$$

(*ii*) $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$. Infatti

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{2k}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{k+1} + \frac{2(n+1)}{(n+1)+1} \overset{\mathcal{P}_n \text{ vera}}{\geq} n + \frac{2n+2}{n+2}$$

Poiché

$$n + \frac{2n+2}{n+2} \geq (n+1) \iff \frac{2n+2}{n+2} \geq 1 \iff n \geq 0,$$

si ottiene

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{2k}{k+1} \geq n+1,$$

e la verifica è conclusa.

I prova intermedia — 15.11.02 — compito C

1) Sia data la successione

$$a_n = \frac{3+n}{2n-1}, \quad n \in N,\ n \geq 1.$$

(*a*) Determinare (se esiste)

$$\lim_{n\to\infty} a_n\ ;$$

(*b*) dire se $\{a_n\}$ è monotona;

(*c*) determinare estremo superiore/inferiore e (se esistono) massimo/minimo dell'insieme

$$E = \{x \in R : \ x = a_n,\ n \in N, n \geq 1\} \cup \{5\}.$$

2) Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\frac{1}{n^{3\alpha}}$$

al variare del parametro α nei reali positivi.

3) Determinare, se esistono, i seguenti limiti:

(*a*)

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^3-x}-\sqrt{x^3+4x^2}$$

(*b*)

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\pi^2-x^2}{e^{\pi-x}-1}\sin(-\frac{x}{2})$$

(*c*)

$$\lim_{n\to\infty}n^{3-\alpha}(-1)^n\quad\text{al variare di }\alpha\in R.$$

4) Verificare mediante il principio di induzione che

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{3k}{k+2}\ge n\quad\forall n\ge 1.$$

Risoluzioni

Esercizio 1. Si ha

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}-\frac{1+\frac{3}{n}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}.$$

La successione è monotona decrescente: infatti

$$a_{n+1}\le a_n\iff\frac{4+n}{2n+1}\le\frac{3+n}{2n-1}\overset{n\ge1}{\iff}2n^2+7n-4\le 2n^2+7n+3\iff 0\le 7.$$

Si ha di conseguenza

$$\inf\{x\in\mathbf{R}:\ x=a_n,n\ge 0\}=\frac{1}{2},\quad\sup\{x\in\mathbf{R}:\ x=a_n,n\ge 0\}=a_1=4,$$

e quindi

$$\inf E=\frac{1}{2},\quad\sup E=5.$$

Infine, poiché $5\in E$, $\frac{1}{2}\notin E$,

$$\nexists\min E,\quad\max E=5.$$

Esercizio 2. Si osserva preliminarmente che

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=e^2.$$

Pertanto

$$\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\frac{1}{n^{3\alpha}}\sim\frac{e^2}{n^{3\alpha}}\quad\text{per }n\to\infty.$$

Dal criterio del confronto asintotico segue immediatamente che la serie è convergente per $\alpha>\frac{1}{3}$ ($\iff 3\alpha>1$) e divergente per $0<\alpha\le\frac{1}{3}$.

Esercizio 3. (a) Moltiplicando e dividendo l'espressione per $\sqrt{x^3-x}+\sqrt{x^3+4x^2}$, si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^3-x}-\sqrt{x^3+4x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x^2-x}{\sqrt{x^3-x}+\sqrt{x^3+4x^2}}=-\infty.$$

(b) Effettuando il cambiamento di variabile $y=\pi-x$ e ricordando il limite notevole

$$\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1,$$

si ottiene

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\pi^2-x^2}{e^{\pi-x}-1}\sin(-\frac{x}{2})=\lim_{y\to 0}\frac{y(2\pi-y)}{e^y-1}\sin(-\frac{\pi}{2}+\frac{y}{2})=-2\pi.$$

(c) Si ha

$$\lim_{n\to\infty}n^{3-\alpha}(-1)^n=0\quad\text{per }\ \alpha>3$$

e

$$\nexists\lim_{n\to\infty}n^{3-\alpha}(-1)^n\quad\text{per }\ \alpha\le 3.$$

Infatti, per $\alpha>3$ la successione è il prodotto di una successione infinitesima e di una limitata:

$$\lim_{n\to\infty}n^{3-\alpha}=0,\quad |(-1)^n|=1.$$

Per $\alpha\le 3$ è sufficiente esibire due sottosuccessioni che abbiano limiti diversi: ad esempio

$$\lim_{k\to\infty}(2k)^{3-\alpha}(-1)^{2k}=\begin{cases}1 & \alpha=3\\ +\infty & \alpha<3,\end{cases}$$

mentre

$$\lim_{k\to\infty}(2k+1)^{3-\alpha}(-1)^{2k+1}=\begin{cases}-1 & \alpha=3\\ -\infty & \alpha<3.\end{cases}$$

Esercizio 4. La proposizione da dimostrare per $n\ge 1$ è:

$$\mathcal{P}_n:\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{3k}{k+2}\ge n\right]$$

(i) $\mathcal{P}_1$ è vera. Infatti

$$\sum_{k=1}^{1}\frac{3k}{k+2}=\frac{3}{3}=1\ge 1.$$

(ii) $\mathcal{P}_n\Rightarrow\mathcal{P}_{n+1}$. Infatti

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{3k}{k+2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{3k}{k+2}+\frac{3(n+1)}{(n+1)+2}\overset{\mathcal{P}_n\text{ vera}}{\ge}n+\frac{3n+3}{n+3}$$

Poiché

$$n+\frac{3n+3}{n+3}\ge(n+1)\iff\frac{3n+3}{n+3}\ge 1\iff 2n\ge 0,$$

si ottiene

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{3k}{k+2}\ge n+1,$$

e la verifica è conclusa.

I PROVA INTERMEDIA — 15.11.02 — COMPITO D

1) Sia data la successione
$$a_n = \frac{3n-1}{1-4n}, \quad n \in N,\ n \geq 1.$$
 (a) Determinare (se esiste)
$$\lim_{n\to\infty} a_n\ ;$$
 (b) dire se $\{a_n\}$ è monotona;
 (c) determinare estremo superiore/inferiore e (se esistono) massimo/minimo dell'insieme
$$E = \{x \in R :\ x = a_n,\ n \in N, n \geq 1\} \cup \{0\}.$$
2) Studiare il carattere della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \log\left(\frac{n+2}{n}\right)\frac{1}{n^\alpha}$$
al variare del parametro α nei reali positivi.
3) Determinare, se esistono, i seguenti limiti:
 (a)
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^3+x^2} - \sqrt{x^3+5x}$$
 (b)
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{\tan(x-2)} \cos(\frac{\pi}{2}x)$$
 (c)
$$\lim_{n\to\infty} n^{3-2\alpha}\cos(n\pi) \quad \text{al variare di } \alpha \in R.$$
4) Verificare mediante il principio di induzione che
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{k+1} \leq 2n-1 \quad \forall n \geq 1.$$

RISOLUZIONI

Esercizio 1. Si ha
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{1}{n}}{-4+\frac{1}{n}} = -\frac{3}{4}.$$
La successione è monotona decrescente: infatti
$$a_{n+1} \leq a_n \iff \frac{3n+2}{4n+3} \geq \frac{3n-1}{4n-1} \overset{n\geq 1}{\iff} 12n^2+5n-2 \geq 12n^2+5n-3 \iff 1 \geq 0.$$
Si ha di conseguenza
$$\inf\{x \in \mathbf{R} :\ x = a_n, n \geq 0\} = -\frac{3}{4}, \quad \sup\{x \in \mathbf{R} :\ x = a_n, n \geq 0\} = a_1 = -\frac{2}{3},$$

e quindi

$$\inf E = -\frac{3}{4}, \quad \sup E = 0.$$

Infine, poiché $0 \in E$, $-\frac{3}{4} \notin E$,

$$\nexists \min E, \quad \max E = 0.$$

Esercizio 2. Si osserva preliminarmente che

$$\lim_{n\to\infty} n \log\left(1 + \frac{2}{n}\right) = 2.$$

Pertanto

$$n \log\left(1 + \frac{2}{n}\right) \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{2}{n^\alpha} \quad \text{per } n \to \infty.$$

Dal criterio del confronto asintotico segue immediatamente che la serie è convergente per $\alpha > 1$ e divergente per $0 < \alpha \leq 1$.

Esercizio 3. (a). Moltiplicando e dividendo l'espressione per $\sqrt{x^3 + x^2} + \sqrt{x^3 + 5x}$, si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^3 + x^2} - \sqrt{x^3 + 5x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 5x}{\sqrt{x^3 + x^2} + \sqrt{x^3 + 5x}} = +\infty.$$

(b). Effettuando il cambiamento di variabile $y = x - 2$ e ricordando il limite notevole

$$\lim_{y\to 0} \frac{\tan(y)}{y} = 1,$$

si ottiene

$$\lim_{x\to\pi} \frac{x^2 - 4}{\tan(x - 2)} \cos(\frac{\pi}{2}x) = \lim_{y\to 0} \frac{y(y + 4)}{\tan(y)} \cos(\pi + \frac{\pi y}{2}) = -4.$$

(c). Si osserva preliminarmente che

$$\cos(\pi n) = (-1)^n \quad \forall n.$$

Si ha

$$\lim_{n\to\infty} n^{3-2\alpha}(-1)^n = 0 \quad \text{per } \alpha > \frac{3}{2}$$

e

$$\nexists \lim_{n\to\infty} n^{3-2\alpha}(-1)^n \quad \text{per } \alpha \leq \frac{3}{2}.$$

Infatti, per $\alpha > \frac{3}{2}$ la successione è il prodotto di una successione infinitesima e di una limitata:

$$\lim_{n\to\infty} n^{3-2\alpha} = 0, \quad |(-1)^n| = 1.$$

Per $\alpha \leq \frac{3}{2}$ è sufficiente esibire due sottosuccessioni che abbiano limiti diversi: ad esempio

$$\lim_{k\to\infty} (2k)^{3-2\alpha}(-1)^{2k} = \begin{cases} 1 & \alpha = \frac{3}{2} \\ +\infty & \alpha < \frac{3}{2}, \end{cases}$$

mentre

$$\lim_{k\to\infty} (2k+1)^{3-2\alpha}(-1)^{2k+1} = \begin{cases} -1 & \alpha = \frac{3}{2} \\ -\infty & \alpha < \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Esercizio 4. La proposizione da dimostrare per $n \geq 1$ è:

$$\mathcal{P}_n : \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{k+1} \leq 2n-1\right]$$

(i) $\mathcal{P}_1$ è vera. Infatti

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{2k}{k+1} = \frac{2}{2} = 1 \leq 1 = 2 \cdot 1 - 1.$$

(ii) $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$. Infatti

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{2k}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{k+1} + \frac{2(n+1)}{(n+1)+1} \overset{\mathcal{P}_n \text{ vera}}{\leq} 2n - 1 + \frac{2n+2}{n+2}$$

Poiché

$$2n - 1 + \frac{2n+2}{n+2} \leq 2(n+1) - 1 \iff \frac{2n+2}{n+2} \leq 2 \iff 0 \leq 2,$$

si ottiene

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{2k}{k+1} \leq 2(n+1) - 1,$$

e la verifica è conclusa.

II PROVA INTERMEDIA — 20.12.02 — COMPITO A

1) Sia data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & x \geq 1 \\ a^2x^2 - a & x < 1. \end{cases}$$

Determinare, se esistono, i valori di a tali che:
(a) f è continua in $x = 1$;
(b) f è derivabile in $x = 1$;
(c) $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 2$.

2) Studiare la funzione

$$f(x) = |x|e^{2x}$$

e tracciare un grafico qualitativo.

3) Determinare, se esistono, i seguenti limiti:

$$(a) \qquad \lim_{x\to 0^+} x^x \frac{\sin x}{x}.$$

$$(b) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{4x} - 1 - \log(1+4x)}{x^2}$$

4) Determinare:

$$(a) \qquad \int_0^{\pi} x\cos(3x)\,dx$$

$$(b) \qquad \int \frac{x^3}{2x^2-4}\,dx.$$

Risoluzioni

Esercizio 1. (a). Si ha:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x-1)^2 = 0,$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(a^2x^2-a) = a(a-1).$$

Pertanto la funzione è continua in $x=1$ per $a=0$, $a=1$.

(b). Poiché ogni funzione derivabile in un punto è a fortiori continua in quel punto, ci si può limitare ai casi $a=0$, $a=1$. Si ha:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}(x-1) = 0,$$
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{a^2x^2-a}{x-1} = \begin{cases} 0 & a=0 \\ 2 & a=1. \end{cases}$$

Pertanto la funzione è derivabile in $x=1$ per $a=0$. In alternativa si possono eguagliare i limiti delle derivate dx e sx, purché sia chiaro che si considerano solo i casi in cui f è continua.

(c). Si ha

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{a^2x^2-a}{x^2} = a^2 = 2 \iff a=\pm\sqrt{2}.$$

Esercizio 2.

Dom$f=\mathbf{R}$, $f(x)>0$ per ogni $x\neq 0$, $f(0)=0$. Si ha:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \ \text{(mediante de l'Hôpital o gerarchie)},$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty.$$

La retta $y=0$ è asintoto orizzontale per $x\to-\infty$. Non ci sono asintoti obliqui in quanto

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

Si ha:

$$f'(x) = \begin{cases} e^{2x}(1+2x) & x>0 \\ -e^{2x}(1+2x) & x<0. \end{cases}$$

In $x=0$ la funzione presenta un punto angoloso:

$$f'_+(0)=1, \quad f'_-(0)=-1$$

(mediante limite del rapporto incrementale o, poiché f è continua in $x=0$, mediante limiti dx e sx delle derivate prime). Pertanto la funzione è strettamente crescente in $(-\infty,-\frac{1}{2})$ e in $(0,\infty)$, e strettamente decrescente in $(-\frac{1}{2},0)$. Ha quindi un massimo locale in $x=-\frac{1}{2}$, con $f(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2e}$, e un minimo locale e assoluto in $x=0$, con $f(0)=0$. Si ha:

$$f''(x) \;=\; \begin{cases} 4e^{2x}(1+x) & x>0 \\ -4e^{2x}(1+x) & x<0. \end{cases}$$

Pertanto la funzione è convessa in $(-\infty,-1)$ e in $(0,\infty)$, concava in $(-1,0)$, con flesso in $x=-1$, $f(-1)=e^{-2}$.

Esercizio 3. (a). Si ha:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} \;=\; 1,$$
$$\lim_{x\to 0^+} x^x \;=\; \lim_{x\to 0^+} e^{x\log x} \;=\; 1$$

(per il secondo limite si può utilizzare il teorema di De L'Hôpital, o semplicemente ricordare le gerarchie di infiniti/infinitesimi).

(b). Sviluppando al secondo ordine in $x=0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1-\log(1+4x)}{x^2} \;=\; \lim_{x\to 0}\frac{1+4x+8x^2+o(x^2)-1-(4x-8x^2+o(x^2))}{x^2}$$
$$=\; \lim_{x\to 0}\frac{16x^2+o(x^2)}{x^2} \;=\; 16.$$

Esercizio 4. (a). Integrando per parti:

$$\int x\sin(3x)\,dx \;=\; -\frac{1}{3}x\cos(3x)+\frac{1}{3}\int\cos(3x)\,dx \;=\; -\frac{1}{3}x\cos(3x)+\frac{1}{9}\sin(3x)+C.$$

Quindi

$$\int_0^\pi x\sin(3x)\,dx \;=\; \frac{\pi}{3}.$$

(b). Mediante divisione:

$$\frac{x^3}{x^2-2} \;=\; x+\frac{2x}{x^2-2}.$$

Decomponendo in fratti semplici

$$\frac{x^3}{x^2-2} \;=\; x+\frac{1}{x-\sqrt{2}}+\frac{1}{x+\sqrt{2}},$$

pertanto

$$\int\frac{x^3}{3x^2-6}\,dx \;=\; \frac{1}{3}\int x\,dx+\frac{1}{3}\int\frac{1}{x-\sqrt{2}}+\frac{1}{3}\int\frac{1}{x+\sqrt{2}} \;=\; \frac{1}{6}x^2+\frac{1}{3}\log|x^2-2|+C.$$

Allo stesso risultato si perviene anche senza effettuare la decomposizione, osservando che $2x=(x^2-2)'$.

II PROVA INTERMEDIA — 20.12.02 — COMPITO B

1) Sia data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2(x-1) & x \geq 1 \\ a^2x^2 - a & x < 1. \end{cases}$$

Determinare, se esistono, i valori di a tali che:

(a) f è continua in $x = 1$;

(b) f è derivabile in $x = 1$;

(c) $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 2$.

2) Studiare la funzione

$$f(x) = |x|e^{-2x}$$

e tracciare un grafico qualitativo.

3) Determinare, se esistono, i seguenti limiti:

$$(a) \qquad \lim_{x\to 0^+} x^x \frac{\sin x}{x}.$$

$$(b) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{3x} - 1 - 3\sin(x)}{x^2}$$

4) Determinare:

$$(a) \qquad \int_0^\pi x\sin(3x)\,dx$$

$$(b) \qquad \int \frac{x^3}{3x^2-6}\,dx.$$

Risoluzioni

Esercizio 1. (a). Si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} 2(x-1) = 0, \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} (a^2x^2 - a) = a(a-1). \end{aligned}$$

Pertanto la funzione è continua in $x = 1$ per $a = 0$, $a = 1$.

(b). Poiché ogni funzione derivabile in un punto è a fortiori continua in quel punto, ci si può limitare ai casi $a = 0$, $a = 1$. Si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1^+} 2 = 2, \\ \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1^-} \frac{a^2x^2-a}{x-1} = \begin{cases} 0 & a = 0 \\ 2 & a = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Pertanto la funzione è derivabile in $x = 1$ per $a = 1$. In alternativa si possono eguagliare i limiti delle derivate dx e sx, purché sia chiaro che si considerano solo i casi in cui f è continua.

(c). Si ha

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{a^2x^2-a}{x^2}\;=\;a^2\;=\;2\quad\Longleftrightarrow\quad a=\pm\sqrt{2}.$$

Esercizio 2. Identico al corrispondente del compito A, scambiando x con $-x$.

Esercizio 3. (a). Identico al corrispondente del compito B.

(b). Sviluppando al secondo ordine in $x=0$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1-3\sin(x)}{x^2}\;&=\;\lim_{x\to0}\frac{1+3x+\frac{9}{2}x^2+o(x^2)-1-3(x+o(x^2))}{x^2}\\&=\;\lim_{x\to0}\frac{\frac{9}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}\;=\;\frac{9}{2}.\end{aligned}$$

Esercizio 4. (a). Integrando per parti:

$$\int x\cos(3x)\,dx\;=\;\frac{1}{3}x\sin(3x)-\frac{1}{3}\int\sin(3x)\,dx\;=\;+\frac{1}{3}x\sin(3x)+\frac{1}{9}\cos(3x)+C.$$

Quindi

$$\int_0^{\pi}x\sin(3x)\,dx\;=\;-\frac{2}{9}.$$

(b). Mediante divisione:

$$\frac{x^3}{x^2-2}\;=\;x+\frac{2x}{x^2-2}.$$

Decomponendo in fratti semplici

$$\frac{x^3}{x^2-2}\;=\;x+\frac{1}{x-\sqrt{2}}+\frac{1}{x+\sqrt{2}},$$

pertanto

$$\int\frac{x^3}{2x^2-4}\,dx\;=\;\frac{1}{2}\int x\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+\sqrt{2}}\;=\;\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\log|x^2-2|+C.$$

Allo stesso risultato si perviene anche senza effettuare la decomposizione, osservando che $2x=(x^2-2)'$.

Prova scritta del 08.01.03 — compito A

1) Determinare estremo superiore e inferiore e, se esistono, massimo e minimo delle successioni

$$(a)\qquad a_n=4n-\frac{1}{n+1},\quad n\in N;$$

$$(b)\qquad b_n=\pi-\arctan(-a_n)\,,\quad n\in N.$$

2) Studiare la funzione

$$f(x)=-\frac{x^2}{\log(2x)}$$

e tracciarne un grafico qualitativo.

3) Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \log n}.$$

4) (a). Calcolare

$$\int \frac{1}{x}\left(\frac{1}{3\log x} - \frac{9}{9+\log^2 x}\right) dx.$$

(b) (facoltativo). Determinare i valori di $A \in R$ per i quali la funzione

$$f(x) = \frac{x - A\sin x + x^9}{x^3\sqrt{x}}$$

è integrabile in senso improprio in $(0,1)$.

Risoluzioni

Esercizio 1. (a). La successione è monotona crescente in quanto somma di successioni monotone crescenti. Ovvero:

$$4(n+1) > 4n, \quad -\frac{1}{n+2} > -\frac{1}{n+1} \implies a_{n+1} > a_n \; \forall\, n \in \mathbf{N}.$$

(alternativamente si può effettuare un calcolo diretto). Di conseguenza

$$\sup\{a_n\} = \lim_{n\to\infty} a_n = \infty, \quad \inf\{a_n\} = a_0 = -1.$$

(b). Utilizzando la monotonia della funzione arctan e il risultato precedente, si ottiene:

$$a_n \uparrow \implies -a_n \downarrow \implies \arctan(-a_n) \downarrow \implies b_n \uparrow .$$

Di conseguenza

$$\sup\{b_n\} = \lim_{n\to\infty} b_n, = \frac{3\pi}{2}, \quad \inf\{b_n\} = b_0 = \frac{3\pi}{4}.$$

Esercizio 2. $\mathrm{Dom} f = (0,\infty) \setminus \{\frac{1}{2}\}$, $f(x) > 0$ in $(0, \frac{1}{2})$, $f(x) < 0$ in $(\frac{1}{2}, \infty)$. Si ha:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= 0 \\
\lim_{x\to \frac{1}{2}^-} f(x) &= +\infty, \\
\lim_{x\to \frac{1}{2}^+} f(x) &= -\infty, \\
\lim_{x\to \infty} f(x) &= -\infty \text{ (mediante de l'Hôpital o gerarchie).}
\end{aligned}$$

La retta $x = \frac{1}{2}$ è asintoto verticale. Non ci sono asintoti obliqui in quanto

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \text{ (mediante de l'Hôpital o gerarchie).}$$

Si ha:

$$f'(x) = -\frac{x(2\log(2x)-1)}{\log^2(2x)},$$

da cui

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \qquad & x \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2}), \\ f'(x) < 0 \qquad & x \in (\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2}, \infty), \\ f'(\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2}) = 0. & \end{aligned}$$

Pertanto la funzione è crescente in $(0, \frac{1}{2})$ e in $(\frac{1}{2}, \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2})$, decrescente in $(\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2}, \infty)$, ha un massimo locale in $x = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2}$ con $f(\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2}) = \frac{e}{2}$, e $\sup f = \infty$, $\inf f = -\infty$. Si ha:

$$f''(x) \;=\; -\frac{2\log^2(2x) - 3\log(2x) + 2}{\log^3(2x)},$$

da cui (il numeratore è sempre positivo)

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 \qquad & x \in (0, \frac{1}{2}), \\ f''(x) < 0 \qquad & x \in (\frac{1}{2}, \infty). \end{aligned}$$

Pertanto la funzione è convessa in $(0, \frac{1}{2})$ e concava in $(\frac{1}{2}, \infty)$. Non ha punti di flesso.

Esercizio 3. La successione

$$a_n = \frac{1}{n \log n}, \quad n \geq 2$$

è a termini non negativi. Quindi la serie è a segno alterno. Poiché

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

e

$$a_{n+1} < a_n \impliedby 0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n},\ 0 < \frac{1}{\log(n+1)} < \frac{1}{\log(n)},$$

per il criterio di Liebnitz la serie converge. La serie non è assolutamente convergente: infatti è noto che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\beta} \quad \text{diverge se } \beta \leq 2.$$

Esercizio 4. (a). Effettuando la sostituzione $y = \log x$, si ottiene

$$\int \frac{1}{x}\left(\frac{1}{3\log x} - \frac{9}{9 + \log^2 x}\right) dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{y}\, dy - \int \frac{1}{1 + \frac{y^2}{9}}\, dy.$$

L'integrazione del primo addendo è immediata:

$$\frac{1}{3}\int \frac{1}{y}\, dy = \frac{1}{3}\log|y| + C.$$

Per il secondo si effettua la sostituzione $t = \frac{y}{3}$:

$$\int \frac{1}{1 + \frac{y^2}{9}}\, dy = 3\int \frac{1}{1+t^2}\, dt = 3\arctan t + C = 3\arctan(\frac{y}{3}) + C.$$

In conclusione

$$\int \frac{1}{x}\left(\frac{1}{3\log x} - \frac{9}{9+\log^2 x}\right) dx = \frac{1}{3}\log|\log x| + 3\arctan(\frac{\log x}{3}) + C.$$

(b). La funzione è continua in $(0,1]$. Si verifica facilmente che

$$f(x) \sim \begin{cases} \frac{(1-A)}{x^2\sqrt{x}} & A \neq 1 \\ \frac{1}{6\sqrt{x}} & A = 1 \end{cases} \qquad \text{per } x \to 0^+.$$

Pertanto, dal criterio del confronto asintotico segue che f è integrabile in senso improprio in $(0,1)$ se e solo se $A = 1$.

Prova scritta del 08.01.03 — compito B

1) Determinare estremo superiore e inferiore e, se esistono, massimo e minimo delle successioni

$$(a) \qquad a_n = -3n + \frac{2}{n+1}, \quad n \in N;$$

$$(b) \qquad b_n = -\log\left(3 - a_n\right), \quad n \in N.$$

2) Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{\log(3x)}$$

e tracciarne un grafico qualitativo.

3) Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\log n}.$$

4) (a). Calcolare

$$\int \cos x \left(\frac{5}{\sin x} - \frac{4}{4+\sin^2 x}\right) dx.$$

(b) (facoltativo). Determinare i valori di $A \in R$ per i quali la funzione

$$f(x) = \frac{x - A\log(1+x) + x^7}{x^2\sqrt{x}}$$

è integrabile in senso improprio in $(0,1)$.

Risoluzioni

Esercizio 1. (a). La successione è monotona decrescente in quanto somma di successioni monotone decrescenti. Ovvero:

$$-3(n+1) < -3n, \qquad \frac{2}{n+2} < \frac{2}{n+1} \implies a_{n+1} < a_n \; \forall n \in \mathbf{N}.$$

(alternativamente si può effettuare un calcolo diretto). Di conseguenza

$$\inf\{a_n\} = \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty, \quad \sup\{a_n\} = a_0 = 2.$$

(b). Utilizzando la monotonia della funzione log e il risultato precedente, si ottiene:

$$a_n \downarrow \Longrightarrow 3 - a_n \uparrow \Longrightarrow \log(3 - a_n) \uparrow \Longrightarrow b_n \downarrow .$$

Di conseguenza

$$\inf\{b_n\} = \lim_{n\to\infty} b_n, = -\infty, \quad \sup\{b_n\} = b_0 = 0.$$

Esercizio 2. $\mathrm{Dom} f = (0, \infty) \setminus \{\frac{1}{3}\}$, $f(x) < 0$ in $(0, \frac{1}{3})$, $f(x) > 0$ in $(\frac{1}{3}, \infty)$. Si ha:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= 0 \\
\lim_{x\to \frac{1}{3}^-} f(x) &= -\infty, \\
\lim_{x\to \frac{1}{3}^+} f(x) &= +\infty, \\
\lim_{x\to \infty} f(x) &= +\infty \text{ (mediante de l'Hôpital o gerarchie).}
\end{aligned}$$

La retta $x = \frac{1}{3}$ è asintoto verticale. Non ci sono asintoti obliqui in quanto

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \text{ (mediante de l'Hôpital o gerarchie).}$$

Si ha:

$$f'(x) = \frac{x(2\log(3x) - 1)}{\log^2(3x)},$$

da cui

$$\begin{aligned}
f'(x) < 0 \qquad & x \in (0, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, \frac{e^{\frac{1}{2}}}{3}), \\
f'(x) > 0 \qquad & x \in (\frac{e^{\frac{1}{2}}}{3}, \infty), \\
f'(\frac{e^{\frac{1}{2}}}{3}) = 0. &
\end{aligned}$$

Pertanto la funzione è decrescente in $(0, \frac{1}{3})$ e in $(\frac{1}{3}, \frac{e^{\frac{1}{2}}}{3})$, crescente in $(\frac{e^{\frac{1}{2}}}{3}, \infty)$, ha un minimo locale in $x = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{3}$ con $f(\frac{e^{\frac{1}{2}}}{3}) = \frac{2e}{9}$, e $\sup f = \infty$, $\inf f = -\infty$. Si ha:

$$f''(x) = \frac{2\log^2(3x) - 3\log(3x) + 2}{\log^3(3x)},$$

da cui (il numeratore è sempre positivo)

$$\begin{aligned}
f''(x) < 0 \qquad & x \in (0, \frac{1}{3}), \\
f''(x) > 0 \qquad & x \in (\frac{1}{3}, \infty).
\end{aligned}$$

Pertanto la funzione è concava in $(0, \frac{1}{3})$ e convessa in $(\frac{1}{3}, \infty)$. Non ha punti di flesso.

Esercizio 3. Identico al compito A.

Esercizio 4. (a). Effettuando la sostituzione $y = \sin x$, si ottiene

$$\int \cos x \left(\frac{5}{\sin x} - \frac{4}{4 + \sin^2 x} \right) dx = 5 \int \frac{1}{y}\, dy - \int \frac{1}{1 + \frac{y^2}{4}}\, dy.$$

L'integrazione del primo addendo è immediata:

$$5 \int \frac{1}{y}\, dy = 5 \log |y| + C.$$

Per il secondo si effettua la sostituzione $t = \frac{y}{2}$:

$$\int \frac{1}{1 + \frac{y^2}{4}}\, dy = 2 \int \frac{1}{1 + t^2}\, dt = 2 \arctan t + C = 2 \arctan(\frac{y}{2}) + C.$$

In conclusione

$$\int \cos x \left(\frac{5}{\sin x} - \frac{4}{4 + \sin^2 x} \right) dx = 5 \log |\sin x| + 2 \arctan(\frac{\sin x}{2}) + C.$$

(b). La funzione è continua in $(0, 1]$. Si verifica facilmente che

$$f(x) \sim \begin{cases} \frac{(1-A)}{x\sqrt{x}} & A \neq 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & A = 1 \end{cases} \qquad \text{per } x \to 0^+.$$

Pertanto, dal criterio del confronto asintotico segue che f è integrabile in senso improprio in $(0, 1)$ se e solo se $A = 1$.

Prova scritta del 20.01.03 — compito A

1) Data la successione

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n - 1 & n \geq 0 \\ a_0 = 3 \end{cases}$$

(a) provare, utilizzando il principio di induzione, che $a_n > 1$ per ogni $n \geq 0$;

(b) (supponendo vera la tesi in (a)) provare che a_n è monotona crescente;

(c) (supponendo vera la tesi in (b)) determinare

$$\lim_{n\to\infty} a_n.$$

2) Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$(a) \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n} - \frac{3^n}{n!} \right)$$

$$(b) \qquad \lim_{x\to 1} \frac{(1 + \log x)^\pi - e^{x-1}}{x - 1}.$$

3) (a) Studiare la funzione

$$f(x) = \cos^2 x - \sin x$$

e tracciarne un grafico qualitativo.

(b) Calcolare

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin x)dx.$$

4) Determinare le soluzioni nel campo complesso dell'equazione

$$z^3 - \frac{1}{1+i} = 0$$

Risoluzioni

Esercizio 1. (a).

$$\mathcal{P}_0 \text{ è vera:} \qquad a_0 = 3 > 1.$$

$$\mathcal{P}_n \Longrightarrow \mathcal{P}_{n+1}: \qquad a_{n+1} = 2a_n - 1 \overset{\mathcal{P}_n}{>} 2 - 1 = 1.$$

(b).

$$a_{n+1} = 2a_n - 1 > a_n \iff a_n > 1 \quad \text{vera per } (a)$$

(c). Per (b)

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = L \in (a_0, \infty] = (3, \infty].$$

D'altra parte, passando al limite nella definizione della successione si ottiene

$$L \in \mathbf{R} \Longrightarrow L = 2L - 1 \iff L = 1,$$

quindi necessariamente $L = +\infty$.

Esercizio 2. (a). Poiché

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!} = 0,$$

si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} - \frac{3^n}{n!} = 1.$$

(b). Ponendo $y = x - 1$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{(1+\log x)^\pi - e^{x-1}}{x-1} &= \lim_{y\to 0} \frac{(1+\log(1+y))^\pi - e^y}{y} \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{(1+y+o(y))^\pi - (1+y+o(y))}{y} \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{(1+\pi y + o(y) - 1 - y - o(y)}{y} \\
&= \pi - 1.
\end{aligned}$$

Esercizio 3. (a). Dom$f = \mathbf{R}$. La funzione è periodica di periodo 2π, quindi limiteremo l'analisi all'intervallo $[0, 2\pi]$. Si ha

$$f(x) \geq 0 \iff 1 - sen^2 x - \sin x \geq 0 \iff sinx \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Pertanto

$$\begin{array}{ll} f(x) < 0 & x \in (\arcsin(\frac{\sqrt{5}-1}{2}), \pi - \arcsin(\frac{\sqrt{5}-1}{2})) \\ f(x) = 0 & x = \arcsin(\frac{\sqrt{5}-1}{2}), x = \pi - \arcsin(\frac{\sqrt{5}-1}{2}) \\ f(x) > 0 & \text{altrimenti.} \end{array}$$

Ovviamente (la funzione è continua e periodica) non esistono asintoti. Si ha:

$$f'(x) \;=\; -\cos x\,(2\sin x + 1),$$

da cui

$$\begin{array}{ll} f'(x) > 0 & x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}) \cup (\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}) \\ f'(x) = 0 & x = \frac{\pi}{2},\ x = \frac{7\pi}{6},\ x = \frac{3\pi}{2},\ x = \frac{11\pi}{6} \\ f'(x) < 0 & \text{altrimenti.} \end{array}$$

Si ha inoltre:

$$f(\frac{\pi}{2}) = -1,\ f(\frac{7\pi}{6}) = f(\frac{11\pi}{6}) = \frac{5}{4},\ f(\frac{3\pi}{2}) = 1.$$

Pertanto:

$$\begin{array}{rl} \min f = -1 & \max f = \frac{5}{4}, \\ x = \frac{\pi}{2} & \text{punto di minimo assoluto} \\ x = \frac{3\pi}{2} & \text{punto di minimo locale} \\ x = \frac{7\pi}{6},\ x = \frac{11\pi}{6} & \text{punti di massimo assoluto.} \end{array}$$

Esercizio 4. Si ha

$$\frac{1}{1+i} \;=\; \frac{1}{2}(1-i) \;=\; \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{4}},$$

da cui le soluzioni sono

$$\begin{aligned} z_1 &= 2^{-\frac{1}{6}}\, e^{i\frac{7\pi}{12}}, \\ z_2 &= 2^{-\frac{1}{6}}\, e^{i\frac{5\pi}{4}}, \\ z_3 &= 2^{-\frac{1}{6}}\, e^{i\frac{23\pi}{12}}. \end{aligned}$$

Prova scritta del 20.01.03 — compito B

1) Data la successione

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n - 2 & n \geq 0 \\ a_0 = 3 \end{cases}$$

(*a*) provare, utilizzando il principio di induzione, che $a_n > 1$ per ogni $n \geq 0$;

(*b*) (supponendo vera la tesi in (*a*)) provare che a_n è monotona crescente;

(*c*) (supponendo vera la tesi in (*b*)) determinare

$$\lim_{n\to\infty} a_n.$$

2) Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$(a) \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\cdot\frac{3^n}{n!}$$

$$(b) \qquad \lim_{x\to\pi} \frac{(1-\sin x)^7 - e^{x-\pi}}{x-\pi}.$$

3) (*a*) Studiare la funzione

$$f(x) = \cos x - \sin^2 x$$

e tracciarne un grafico qualitativo.

(b) Calcolare

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin^2 x)dx.$$

4) Determinare le soluzioni nel campo complesso dell'equazione

$$z^3 + \frac{1}{1+i} = 0.$$

Risoluzioni

Esercizio 1. (*a*).

$$\mathcal{P}_0 \text{ è vera:} \qquad a_0 = 3 > 1.$$

$$\mathcal{P}_n \Longrightarrow \mathcal{P}_{n+1}: \qquad a_{n+1} = 3a_n - 2 \overset{\mathcal{P}_n}{>} 3 - 2 = 1.$$

(*b*).

$$a_{n+1} = 3a_n - 2 > a_n \iff a_n > 1 \quad \text{vera per } (a)$$

(*c*). Per (*b*)

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = L \in (a_0, \infty] = (3, \infty].$$

D'altra parte, passando al limite nella definizione della successione si ottiene

$$L \in \mathbf{R} \Longrightarrow L = 3L - 2 \iff L = 1,$$

quindi necessariamente $L = +\infty$.

Esercizio 2. (*a*). Poiché

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!} = 0,$$

si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\cdot\frac{3^n}{n!} = 0.$$

(b). Ponendo $y = x - \pi$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pi} \frac{(1-\sin x)^7 - e^{x-\pi}}{x-\pi} &= \lim_{y\to 0} \frac{(1+\sin y)^7 - e^y}{y} \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{(1+y+o(y))^7 - (1+y+o(y))}{y} \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{(1+7y+o(y) - 1 - y - o(y)}{y} \\
&= 6.
\end{aligned}$$

Esercizio 3. (a). Dom$f = \mathbf{R}$. La funzione è periodica di periodo 2π, quindi limiteremo l'analisi all'intervallo $[0, 2\pi]$. Si ha

$$f(x) \geq 0 \iff \cos x - 1 + \cos^2 x \geq 0 \iff \cos x \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Pertanto

$$\begin{array}{ll}
f(x) < 0 & x \in (\arccos(\frac{\sqrt{5}-1}{2}), 2\pi - \arccos(\frac{\sqrt{5}-1}{2})) \\
f(x) = 0 & x = \arccos(\frac{\sqrt{5}-1}{2}), x = 2\pi - \arccos(\frac{\sqrt{5}-1}{2}) \\
f(x) > 0 & \text{altrimenti.}
\end{array}$$

Ovviamente (la funzione è continua e periodica) non esistono asintoti. Si ha:

$$f'(x) = -\sin x\,(2\cos x + 1),$$

da cui

$$\begin{array}{ll}
f'(x) > 0 & x \in (\frac{2\pi}{3}, \pi) \cup (\frac{4\pi}{3}, 2\pi) \\
f'(x) = 0 & x = \frac{2\pi}{3},\ x = \pi,\ x = \frac{4\pi}{3},\ x = 2\pi \\
f'(x) < 0 & \text{altrimenti.}
\end{array}$$

Si ha inoltre:

$$f(\frac{2\pi}{3}) = f(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{5}{4},\ f(2\pi) = 1,\ f(\pi) = -1.$$

Pertanto:

$$\begin{array}{rl}
\min f = -\frac{5}{4} & \max f = 1, \\
x = 2\pi & \text{punto di massimo assoluto} \\
x = \pi & \text{punto di massimo locale} \\
x = \frac{2\pi}{3},\ x = \frac{4\pi}{3} & \text{punti di minimo assoluto.}
\end{array}$$

Esercizio 4. Si ha

$$-\frac{1}{1+i} = \frac{1}{2}(i-1) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{3\pi}{4}},$$

da cui le soluzioni sono

$$\begin{aligned} z_1 &= 2^{-\frac{1}{6}}\, e^{i\frac{\pi}{4}}, \\ z_2 &= 2^{-\frac{1}{6}}\, e^{i\frac{11\pi}{12}}, \\ z_3 &= 2^{-\frac{1}{6}}\, e^{i\frac{19\pi}{12}}. \end{aligned}$$

Prova scritta del 03.02.03

1) Dimostrare per $n = 1, 2 \dots$ la disuguaglianza

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}.$$

2) (a) Studiare la funzione

$$f(x) = |e^{-x} - 1|e^{2x}$$

e tracciare un grafico qualitativo.

(b). Calcolare

$$\int_e^{e^2} \left(\frac{1}{x \log x}\right) dx.$$

3) (a). Dimostrare per $x > -1$ la disuguaglianza

$$\log(1+x) \leq x.$$

(b). Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right).$$

4) Studiare la funzione

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}}$$

e tracciarne un grafico qualitativo.

Risoluzioni

Esercizio 1. Elevando al quadrato ($\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} > 0$):

$$\frac{1}{n} < n + 1 + n - 1 - 2\sqrt{n^2 - 1} \iff \sqrt{n^2-1} < n - \frac{1}{2n}.$$

Elevando al quadrato ($n - \frac{1}{2n} > 0$):

$$n^2 - 1 < n^2 + \frac{1}{4n^2} - 1 \iff \frac{1}{4n^2} > 0 \text{ vera.}$$

Esercizio 2 (a). $D = \mathbf{R}$. La funzione è continua in $\mathbf{R}$ per composizione. Poichè $e^{-x} - 1 > 0$ per $x < 0$, si ha

$$f(x) = \begin{cases} (e^{-x} - 1)e^{2x} = e^x - e^{2x} & x \leq 0 \\ (1 - e^{-x})e^{2x} = e^{2x} - e^x & x > 0. \end{cases}$$

Si ha

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0,$$

$$f'(x) = \begin{cases} e^x - 2e^{2x} & x < 0, \\ 2e^{2x} - e^x & x \geq 0, \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -1, \qquad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1,$$

quindi $x = 0$ è un punto angoloso. Lo studio del segno di $f'(x)$ (che omettiamo) mostra che

$$\begin{array}{lll} f(x) & \text{crescente per} & x \in (-\infty, -\log 2) \text{ e per } x \in (0,\infty), \\ f(x) & \text{decrescente per} & x \in (-\log 2, 0), \end{array}$$

Pertanto:

$$\sup f = +\infty, \ \min f = 0, \ x = -\log 2 \text{ punto di massimo locale.}$$

Si ha

$$f''(x) = \begin{cases} e^x - 4e^{2x} & x < 0, \\ 4e^{2x} - e^x & x \geq 0. \end{cases}$$

Lo studio del segno di $f''(x)$ mostra che

$$\begin{array}{lll} f(x) & \text{convessa per} & x \in (-\infty, -\log 4) \text{ e } (0,\infty), \\ f(x) & \text{concava per} & x \in (-\log 4, 0), \\ & f'(-\log 4) = 0 & \text{flesso.} \end{array}$$

Esercizio 2 (b). Mediante la sostituzione $y = \log x$:

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x\log x}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{y}\,dy = \log y\Big|_1^2 = \log 2.$$

Esercizio 3 (a). Si considera la funzione

$$f(x) = x - \log(1+x).$$

Si ha $D = (-1,\infty)$, $f \in C(D)$. Poiché

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty,$$

il minimo assoluto è interno, e poiché non ci sono punti singolari, va ricercato tra i punti stazionari. Si ha

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \gtreqless 0 \iff x \gtreqless 0.$$

Pertanto

$$\min f = f(0) = 0$$

da cui segue la tesi.

Esercizio 3 (b). Poiché

$$\frac{1}{n}\log\left(1 + \frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right) \sim \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}} \quad \text{per } n \to \infty,$$

la serie converge per il criterio del confronto asintotico.

Esercizio 4. $D = (0, \infty)$. La funzione si può riscrivere come

$$f(x) = e^{\frac{\log x}{x}}.$$

Si ha

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = 1.$$

$$f'(x) = e^{\frac{\log x}{x}} \frac{1}{x^2}(1 - \log x) > 0 \iff x < e.$$

Quindi

$$\max f = f(e) = e^{\frac{1}{e}}, \quad \inf f = 0.$$

Prova scritta del 01.04.03

1) Studiare la funzione

$$f(x) = e^{\sqrt{|x-1|}}$$

e tracciarne un grafico qualitativo.

2) Calcolare

$$\int (e^x \sin x)^2 \, dx.$$

3) Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)}{\sqrt{n}}.$$

4) Studiare la funzione

$$f(x) = \log(e^x - x - 1)$$

e tracciarne un grafico qualitativo.

Risoluzioni

Esercizio 1. $D = \mathbf{R}$. La funzione è continua in $\mathbf{R}$ per composizione, e simmetrica rispetto all'asse $x = 1$. Si ha

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty,$$

e per simmetria

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

Quindi non vi sono asintoti obliqui. Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2} e^{\sqrt{x-1}} (x-1)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{per } x > 1,$$

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = +\infty.$$

Pertanto (utilizzando la simmetria)

$$\begin{array}{rll} f(x) & \text{crescente per} & x \in (1, +\infty) \\ f(x) & \text{decrescente per} & x \in (-\infty, 1), \\ x = 1 & \text{punto di cuspide} & \end{array}$$

e

$$\sup f = +\infty, \; \min f = 1, \; x = 1 \text{ punto di minimo assoluto.}$$

Si ha

$$f''(x) = \frac{1}{4}\, e^{\sqrt{x-1}}\, (x-1)^{-\frac{3}{2}}\, (\sqrt{x-1} - 1) \quad \text{per } \; x > 1,$$

da cui

$$\begin{array}{rll} f(x) & \text{convessa per} & x \in (2, +\infty) \\ f(x) & \text{concava per} & x \in (1, 2), \\ & x = 2 & \text{punto di flesso,} \end{array}$$

e per simmetria

$$\begin{array}{rll} f(x) & \text{convessa per} & x \in (-\infty, 0), \\ f(x) & \text{concava per} & x \in (0, 1), \\ & x = 0 & \text{punto di flesso.} \end{array}$$

Esercizio 2. Per parti:

$$\begin{aligned} \int (e^x \sin x)^2 \, dx &= \int e^{2x} \sin x \, \sin x \, dx \\ &= -e^{2x} \sin x \, \cos x + 2 \int e^{2x} \sin x \, \cos x \, dx + \int e^{2x} \cos^2 x \, dx \\ &= -e^{2x} \sin x \, \cos x + e^{2x} \sin^2 x - 2 \int e^{2x} \sin^2 x \, dx \\ &\quad + \int e^{2x} \, dx - \int e^{2x} \sin^2 x \, dx \end{aligned}$$

Quindi

$$\int (e^x \sin x)^2 \, dx = \frac{1}{4}\, e^{2x} \left(\frac{1}{2} - \sin x \, \cos x + \sin^2 x \right) + C.$$

Esercizio 3. È sufficiente osservare che $\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = (-1)^n$. Pertanto, poiché la successione $a_n = n^{-1/2}$ è a termini non-negativi, monotona decrescente e tendente a zero, dal criterio di Leibnitz segue che la serie è convergente.

Esercizio 4. Poiché la funzione $y = e^x$ è strettamente convessa in $\mathbf{R}$ e la retta $y = 1 + x$ è tangente ad $y = e^x$ in $x = 0$, si ottiene

$$e^x - x - 1 \;\geq\; 0 \;\; \forall\, x \in \mathbf{R}, \quad e^x - x - 1 \;=\; 0 \iff x = 0.$$

Pertanto $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. La funzione è continua in D per composizione. Si ha

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Poiché

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0,\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\log\left(1-\frac{1+x}{e^x}\right)=0,$$

la retta $y=x$ è asintoto obliquo per $x\to+\infty$. Inoltre

$$\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty.$$

Si ha

$$f'(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x-1}\quad \text{per } x\in D.$$

Pertanto

$$\begin{array}{lll} f(x) & \text{crescente per} & x\in(0,+\infty)\\ f(x) & \text{decrescente per} & x\in(-\infty,0), \end{array}$$

non ci sono estremi locali e

$$\sup f=+\infty,\ \inf f=-\infty.$$

Si ha

$$f''(x)=\frac{e^x(1-x)-1}{(e^x-x-1)^2}.$$

Per determinarne il segno si può ricorrere a uno studio di funzione ausiliario: considerata la funzione

$$g(x)=e^x(1-x)-1$$

si ha $g'(x)=-xe^x$. Pertanto g è crescente in $(-\infty,0)$ e decrescente in $(0,\infty)$. Quindi $x=0$ è punto di massimo assoluto, e poiché $g(0)=0$ si conclude che

$$f(x)\quad \text{concava per}\quad x\in(-\infty,0) \text{ e per } x\in(0,\infty).$$

Prova scritta del 03.06.03

1) Calcolare i seguenti limiti:

(a)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-n^{243}}{2^n+1};$$

(b)

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x+\log(1-e^{-x})-\log\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

2) Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(e^{-n-1}(e-1)).$$

3) Studiare la funzione

$$f(x) \;=\; \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^6}$$

e tracciarne un grafico qualitativo.

4) Calcolare

$$\int_0^1 \frac{x^2-3}{x+1}\,dx.$$

Risoluzioni

Esercizio 1.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n - n^{243}}{2^n+1} \geq \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{2^{n+1}} - \frac{n^{243}}{2^n+1} \geq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\frac{3^n}{2^n} - \frac{n^{243}}{2^n} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n - n^{243}}{2^n+1} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(x + \log(1-e^{-x}) - \log(\frac{1}{x}) \right) = -\infty$$

Esercizio 2. La serie può sia essere ricondotta ad una serie geometrica, ovvero

$$\sum_{n=1}^{\infty} (e^{-n-1}(e-1)) = \frac{(e-1)}{e} \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-n}) = \frac{1}{e},$$

sia ad una serie telescopica, ovvero

$$\sum_{n=1}^{\infty} (e^{-n-1}(e-1)) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-n} - e^{-n-1}) = \frac{1}{e}.$$

Esercizio 3. La funzione è definita per ogni x reale eccetto il punto 0. Il dominio è $D = \{x \in R \quad \text{tali che x} \neq 0\}$. La funzione non presenta simmetrie. Per lo studio del segno, riscriviamo la funzione come

$$f(x) = \left(\frac{x^3-1}{x^6} \right).$$

Nel suo insieme di definizione il denominatore è sempre positivo, ed il numeratore $x^3 - 1$ risulta nullo per $x = 1$, positivo per $x > 1$ e negativo altrimenti.
Studio dei limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^6} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^6} = 0$$

$$\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^6} = -\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^6} = -\infty$$

Calcolo della derivata prima:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^6}\right)' = -\frac{3}{x^4} + \frac{6}{x^7} =$$

$$= -\left(\frac{3}{x^4}\right)\left(1 - \frac{2}{x^3}\right)$$

$$f'(x) = 0 \qquad \text{se e solo se x} = (2)^{\frac{1}{3}}$$

Nell'insieme di definizione, la funzione f' è negativa per $x > (2)^{\frac{1}{3}}$, positiva $x < (2)^{\frac{1}{3}}$, quindi la funzione è decrescente per $x > (2)^{\frac{1}{3}}$, mentre è crescente per $x < (2)^{\frac{1}{3}}$. Pertanto il punto è di massimo relativo. Dal comportamento ai limiti si deduce che il punto è di massimo assoluto. Inoltre

$$f((2)^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{4}.$$

Calcolo della derivata seconda: a tale scopo conviene scrivere la derivata prima come

$$f'(x) = -\frac{3}{x^4} + \frac{6}{x^7}$$

Si ottiene quindi:

$$f''(x) = \frac{12}{x^5} - \frac{42}{x^8} = \left(\frac{6}{x^5}\right)\left(2 - \frac{7}{x^3}\right) = 6\left(\frac{2x^3 - 7}{x^8}\right)$$

Nell'insieme di definizione, il denominatore è sempre positivo, ed il numeratore $6(2x^3 - 7)$ risulta nullo per $x = (\frac{7}{2})^{\frac{1}{3}}$, positivo per $x > (\frac{7}{2})^{\frac{1}{3}}$ e negativo altrimenti.
La funzione f risulta convessa per $x > (\frac{7}{2})^{\frac{1}{3}}$ e concava altrimenti. Il punto $x = (\frac{7}{2})^{\frac{1}{3}}$ è un punto di flesso.

Esercizio 4.

$$\int_0^1 \frac{x^2 - 3}{(x+1)} dx = \int_0^1 \frac{x^2 - 1 - 2}{(x+1)} dx$$

$$\int_0^1 \frac{x^2 - 1}{(x+1)} dx - \int_0^1 \frac{2}{(x+1)} dx = \int_0^1 \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)} dx - 2\int_0^1 \frac{1}{(x+1)} dx$$

Quindi

$$\int_0^1 \frac{x^2 - 3}{(x+1)} dx = \int_0^1 x - 1 dx - 2\log 2 = \frac{1}{2} - 1 - 2\log 2 = -\frac{1}{2} - 2\log 2$$

Prova scritta del 17.07.03

1) Un banchiere vi propone il seguente contratto: ogni mese triplica il vostro capitale e ogni mese detrae 10 EUR di spese. Per quale delle seguenti somme iniziali il contratto non è svantaggioso per voi, e perché ?

$$(a)\ a_0 = 4 \text{ EUR}; \quad (b)\ a_0 = 5 \text{ EUR}; \quad (b)\ a_0 = 6 \text{ EUR}.$$

2) Data la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - x^{\frac{1}{2}}}{x-1},$$

determinare: (a) dominio di definizione; (b) limiti per $x \to 1$ ed $x \to +\infty$; (c) eventuali asintoti orizzontali, verticali, obliqui.

3) Determinare A in modo tale che

$$\int_0^1 \frac{x^2 + A + 1}{x^2 + 1}\, dx = 0.$$

4) Data

$$f(x) = \log(x \sin(x)),$$

calcolare: (a) $f'(x)$; (b) $\lim_{x \to \pi^-} \left(f'(x) - \frac{1}{x}\right)$.

Risoluzioni

Esercizio 1. Detto a_n il capitale all'n-esimo mese, si ha:

$$a_{n+1} = 3\,a_n - 10.$$

Si tratta quindi di una successione definita per ricorrenza.

(a) Se $a_0 = 4$ allora $a_n < 4$ per ogni n, quindi il contratto è svantaggioso. Infatti, per induzione,

$$a_1 = 3 \cdot 4 - 10 = 2 < 4,$$

e se $a_n < 4$ allora

$$a_{n+1} = 3\,a_n - 10 < 3 \cdot 4 - 10 = 2 < 4.$$

(b) Allo stesso modo si verifica che see $a_0 = 5$ allora $a_n = 5$ per ogni n, quindi il contratto non è svantaggioso.

(c) Allo stesso modo si verifica che se $a_0 = 6$ allora $a_n > 6$ per ogni n, quindi il contratto non è svantaggioso.

Esercizio 2. (a). La funzione $x \mapsto x^{\frac{1}{2}}$ è definita in $[0, \infty)$, e la funzione $x \mapsto 1/(x-1)$ in $\mathbf{R} - \{1\}$. Pertanto

$$D = [0, \infty) \setminus \{1\}.$$

(b). Ponendo $y = x - 1$ e ricordando che $(1+y)^\alpha - 1 \sim \alpha\, y$ per $y \to 0$, si ha:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x^{\frac{1}{2}}}{x-1} = \lim_{y \to 0} \frac{(y+1)^{\frac{1}{2}} \left((y+1)^{\frac{3}{2}} - 1\right)}{y} = \frac{3}{2}. \tag{1}$$

Per $x \to \infty$ si ha immediatamente

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x^{\frac{1}{2}}}{x-1} \;=\; \lim_{x\to\infty} \frac{x + o(1)}{1 + o(1)} \;=\; \infty. \tag{2}$$

(c). Poiché f è continua da destra in zero, non ci sono asintoti verticali in $x = 0$. Per (1), non ci sono asintoti verticali in $x = 1$ (anzi, f si estende per continuità in $x = 1$). Per (2), non ci sono asintoti orizzontali per $x \to +\infty$. Poiché

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \;=\; \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x^{\frac{1}{2}}}{x(x-1)} \;=\; 1$$

e

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - x) \;=\; \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x^{\frac{1}{2}}}{x-1} - x \;=\; \lim_{x\to\infty} \frac{x - x^{\frac{1}{2}}}{x-1} \;=\; 1,$$

la funzione ha asintoto obliquo $y = x + 1$ per $x \to +\infty$.

Esercizio 3. Si ha

$$\int_0^1 \frac{x^2 + A + 1}{x^2 + 1}\,dx \;=\; \int_0^1 1\,dx + A \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx \;=\; 1 + A\,\arctan(x)\Big|_0^1 \;=\; 1 + A\,\frac{\pi}{4}.$$

Pertanto $A = -\frac{4}{\pi}$.

Esercizio 4. (a). Utilizzando le regole di derivazione, si ottiene

$$f'(x) \;=\; \frac{\sin(x) + x\,cos(x)}{x\,\sin(x)} \;=\; \frac{1}{x} + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

(b). Pertanto (attenzione al segno!)

$$\lim_{x\to\pi^-} f'(x) - \frac{1}{x} \;=\; \lim_{x\to\pi^-} \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \;=\; -\infty.$$

Prova scritta del 17.09.03

1) (a) Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right).$$

(b) Al variare di $x \in \mathbf{R}$, determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pi^{nx}.$$

2) Studiare la funzione

$$f(x) \;=\; \log\left(\sqrt{x^2 - 1} - x\right)$$

e tracciarne un grafico qualitativo.

3) Calcolare

$$\int_1^e x\,\log(x^2)\,dx.$$

4) Determinare le soluzioni nel campo complesso dell'equazione
$$z^2 - 2\,\mathrm{Im(z)} \;=\; 2\,\mathrm{i}\,\mathrm{Im(z)}.$$

Risoluzioni

Esercizio 1. (a) Poiché
$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \;=\; 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \;=\; 0,$$
si ottiene immediatamente
$$\lim_{n\to\infty} \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right) \;=\; 0.$$
(b) Poiché $\pi^{nx} = (\pi^x)^n$, si riconosce una serie geometrica di ragione π^x. Poiché, essendo $\pi > 1$,
$$\pi^x \lesseqqgtr 1 \quad \text{per } x \lesseqqgtr 0,$$
la serie converge per $x < 0$ e diverge a $+\infty$ per $x \geq 0$. Alternativamente, essendo la serie a termini non negativi, si può utilizzare il criterio del rapporto,
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi^{(n+1)x}}{\pi^{nx}} \;=\; \pi^x \begin{cases} > 1 & \text{per } x > 0 \;\; \Rightarrow \text{ la serie diverge a } +\infty \\ = 1 & \text{per } x = 0 \\ < 1 & \text{per } x < 0 \;\; \Rightarrow \text{ la serie converge,} \end{cases}$$
e una verifica diretta per $x = 0$.

Esercizio 2. Si ha
$$x^2 - 1 \;\geq\; 0 \iff x \in I \;:=\; (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$
e, per $x \in I$,
$$\sqrt{x^2-1} - x \;>\; 0 \quad\iff\quad \sqrt{x^2-1} \;>\; x.$$
Quest'ultima disuguaglianza è vera per $x \in I \cap (-\infty, 0)$, mentre per $x \in I \cap [0, \infty)$ equivale, passando ai quadrati, a
$$x^2 - 1 \;>\; x^2,$$
che è falsa. Pertanto $D = I \cap (-\infty, 0) = (-\infty, -1]$. Si ha
$$f(-1) = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) \;=\; +\infty.$$
Per la derivata prima si ottiene
$$f'(x) \;=\; -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} < 0 \quad \text{per } x \in (-\infty, -1),$$
e
$$\lim_{x\to-1^-} f'(x) \;=\; -\infty.$$
In particolare f è monotona decrescente. Per la derivata seconda si ottiene
$$f''(x) \;=\; x\,(x^2-1)^{-\frac{3}{2}} \;<\; 0 \quad \text{per } x \in (-\infty, -1),$$
pertanto la funzione è concava in $(-\infty, -1)$.

Esercizio 3. Si ha, integrando per parti,

$$\begin{aligned}\int_1^e x\,\log(x^2)\,dx &= \int_1^e 2\,x\,\log(x)\,dx \\ &= \left[x^2\,\log(x)\right]_1^e - \int_1^e x\,dx \\ &= e^2 - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(e^2+1).\end{aligned}$$

Esercizio 4. Posto $z = x + iy$, l'equazione si riscrive come

$$x^2 - y^2 + 2\,i\,x\,y - 2\,y = 2\,i\,y.$$

Eguagliando parte reale e coefficiente immaginario si ottiene

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 2\,y = 0 \\ 2\,y\,(x-1) = 0, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x^2 = 0 \\ y = 0, \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} 1 - y^2 - 2\,y = 0 \iff y = -(1 \pm \sqrt{2}) \\ x = 1. \end{cases}$$

Pertanto le soluzioni sono:

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 1 - i(1+\sqrt{2}), \quad z_3 = 1 - i(1-\sqrt{2}).$$