Ancora sulla media geometrica e aritmetica

PROPOSITION 0.1. *Se il prodotto di n numeri positivi è uguale ad 1, la loro somma risulta $\geq$ di n.*

PROOF. Il risultato è vero per $n = 1$.
Supponiamo che $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$ e $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$ e dimostriamo che se

$$x_1 x_2 \cdots x_n x_{n+1} = 1,$$

allora

$$x_1 + x_2 \cdots + x_n + x_{n+1} \geq n + 1.$$

Se

$$x_1 x_2 + \cdots + x_n x_{n+1} = 1,$$

allora

- tutti i fattori sono uguali. Quindi sono tutti uguali ad 1 e la loro somma vale $n + 1$, e il risultato è dimostrato.
  Se non,
- Esisterà almeno un fattore più piccolo di 1 ed un fattore più grande di 1.

Supponiamo

$$x_1 < 1, \qquad x_{n+1} > 1.$$

Poniamo

$$y_1 = x_1 x_{n+1},$$

abbiamo

$$y_1 x_2 \cdots x_n = 1,$$

possiamo dunque applicare il risultato assunto vero al passo n, ne segue

$$y_1 + x_2 \cdots + x_n \geq n,$$

ma

$$x_1 + x_2 \cdots x_n + x_{n+1} = (y_1 + x_2 \cdots x_n) + x_{n+1} - y_1 + x_1 \geq$$
$$n + 1 + x_{n+1} - y_1 + x_1 - 1 = n + 1 + x_{n+1} - x_1 x_{n+1} + x_1 - 1 =$$
$$n + 1 + (x_{n+1} - 1)(1 - x_1)$$

Poichè

$$(x_{n+1} - 1)(1 - x_1) \geq 0,$$

il risultato è dimostrato al passo $n + 1$. $\square$

Siano dati $x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots x_n$, non negativi, $n \in \mathbb{N}$. La media geometrica M_g è il numero $M_g := (x_1 x_2 x_3 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}}$. La media aritmetica M_a è il numero

$$M_a := \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}.$$

Si ha

$$M_a \geq M_g.$$

Consideriamo
$\frac{x_1}{M_g}, \ldots, \frac{x_2}{M_g}, \frac{x_n}{M_g}$, allora la radice ennesima del prodotto vale 1 ossia $\frac{x_1}{M_g} \frac{x_2}{M_g} \cdots \frac{x_n}{M_g} = 1$, e per il risultato precedente $\frac{x_1}{M_g} + \frac{x_2}{M_g} + \frac{x_n}{M_g} \geq n$, ossia $M_a \geq M_g$.

0.1. Disuguaglianza di Young per esponenti razionali. Come applicazione della disuguaglianza tra la media aritmetica e geometrica dimostriamo la disuguaglianza di Young per esponenti razionali.
Ricordiamo che in $\mathbb{R}$ è definita la potenza

$$\boxed{x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ volte}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N},}$$

con le proprietà seguenti

$$\boxed{x^n \cdot x^m = x^{n+m} \qquad (x^n)^m = x^{n \cdot m}}$$

DEFINITION. Dato $p > 1$, $p \in \mathbb{R}$ diciamo coniugato di p il numero reale q tale che

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Se $p = \frac{n}{m}$, $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$ il coniugato di p è dato da

$$q = \frac{n}{n-m}.$$

THEOREM 0.2. *Disuguaglianza di Young (esponenti razionali): dati due numeri reali positivi x e y, e dati p, q numeri razionali verificanti $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, si ha*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

Dalla disuguaglianza sulle medie

$$(x_1 x_2 x_3 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

Fissiamo

$$x_1 = x_2 = \dots x_m = x^p \qquad x_{m+1} = \dots x_n = b^q$$

Fissiamo $p = \frac{n}{m}$ con $m < n$, segue che il coniugato di p è dato da $q = \frac{n}{n-m}$.
allora

$$((x^p)^m (y^q)^{n-m})^{\frac{1}{n}} \leq \frac{m x^p + (n-m) y^q}{n}$$
$$((x^p)^{\frac{m}{n}} (y^q)^{\frac{n-m}{n}} \leq \frac{m}{n} x^p + \frac{n-m}{n} y^q,$$

segue allora la disuguaglianza.