DISUGUAGLIANZA TRA MEDIA GEOMETRICA E ARITMETICA

Dati n numeri reali positivi x_1, $x_2, \cdots x_n$ la formula della media aritmetica è:

$$M_a = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Dati n numeri reali positivi x_1, $x_2, \cdots x_n$ la formula della media geometrica è:

$$M_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

Si ha la seguente disuguaglianza

$$M_g = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = M_a$$

Si farà uso del principio di induzione

- Per $n = 1$ la disuguaglianza è vera risultando

$$x_1 = x_1$$

- Supponiamo che al passo $n - 1$ risulti

$$M'_g = \sqrt[n-1]{\prod_{i=1}^{n-1} x_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i}{n-1} = M'_a$$

Si ha

$$M_a = \frac{(n-1)}{n} M'_a + \frac{x_n}{n} = \left(M'_a + \frac{(x_n - M'_a)}{n} \right),$$

$$\frac{M_a}{M'_a} = \left(1 + \frac{x_n - M'_a}{M'_a} \frac{1}{n} \right), \qquad \left(\frac{M_a}{M'_a} \right)^n = \left(1 + \frac{x_n - M'_a}{M'_a} \frac{1}{n} \right)^n$$

Per applicare la disuguaglianza di Bernoulli dovrà risultare $-M'_a + x_n \geq -nM'_a$ ossia $(n-1)M'_a + x_n \geq 0$, che risulta verificata.

Pertanto

$$\left(\frac{M_a}{M'_a} \right)^n \geq \left(1 + \frac{x_n - M'_a}{M'_a} \right) = \frac{x_n}{M'_a}$$

$$(M_a)^n \geq x_n (M'_a)^{n-1},$$

e quindi per l'ipotesi induttiva

$$(M_a)^n \geq x_n (G'_a)^{n-1} = x_1 \cdot x_2 \ldots x_n = \prod_{i=1}^{n} x_i,$$

e la dimostrazione è completa