1. Successioni

Una successione di numeri reali è un'applicazione dall'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali in $\mathbb{R}$:

$$f : n \in \mathbb{N} \longrightarrow f(n) \in \mathbb{R}$$

L'elemento x_n della successione è quindi l'immagine del numero n secondo la funzione f: $x_n = f(n)$

1.1. **Successioni convergenti.**

Definizione. Si dice che la successione $(x_n)_{\mathbb{N}}$ *converge* al numero reale l, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $n > \nu \Longrightarrow |x_n - l| < \varepsilon$. In simboli

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l,$$

che si legge *limite di* x_n *rispetto a* n *uguale ad* l.

Poichè $|x_n - l| < \varepsilon$ equivale a

$$-\varepsilon < x_n - l < \varepsilon,$$

cioè

$$l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon,$$

si può anche scrivere

$$n > \nu \Longrightarrow l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon.$$

Esempio di successione convergente : $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

1.2. **Successioni divergenti positivamente e negativamente.**

Definizione. Una successione $(x_n)_{\mathbb{N}}$ si dice *divergente positivamente*, se per ogni numero reale $M > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$n > \nu \Longrightarrow x_n > M.$$

In questo caso si scrive

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty.$$

Definizione. Una successione $(x_n)_{\mathbb{N}}$ si dice *divergente negativamente*, se per ogni numero reale $M > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$n > \nu \Longrightarrow x_n < -M.$$

In questo caso si scrive

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

Esempio di successione divergente positivamente : $x_n = 2^n$

$$\lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty$$

Esempio di successione divergente negativamente : $x_n = -2^n$

$$\lim_{n\to\infty} -2^n = -\infty$$

1.3. **Successione non regolare.**

Definizione. Una successione $(x_n)_{\mathbb{N}}$ si dice *non regolare* se non ammette limite.

Esempio di successione non regolare: $x_n = (-1)^n$ non esiste il $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$

2. Analisi del caso misto

- $$\boxed{x_n = q^n}$$

  Allora
  $$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} +\infty & q > 1 \\ 1 & q = 1 \\ 0 & q \in]-1,1[\\ \nexists & q \leq -1 \end{cases}$$

  Consideriamo

- $$\boxed{1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + \cdots}$$

  serie geometrica di ragione q.

Ridotta $-n$sima
$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$$
Se $q = 1$ si ha
$$s_n = 1 + 1 + \cdots + 1 = n.$$
Sia $q \neq 1$. Abbiamo dimostrato che
$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$
Se $|q| < 1$ allora $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ e pertanto
$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$
Se $q > 1$, poichè $\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty$ si ha
$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{1}{q-1} \cdot \lim_{n\to\infty} q^n - 1 = \frac{1}{q-1} \cdot +\infty = +\infty$$
Sia ora $q = -1$,
$$s_n = \frac{1 - (-1)^n}{2} = \begin{cases} 0 & , \quad n = 2p \\ 1 & , \quad n = 2p + 1 \end{cases}$$
Pertanto la successione $(s_n)_{\mathbb{N}}$ non è regolare.
Sia infine $q < -1$. Possiamo scrivere $q = -|q|$, e quindi
$$s_n = \frac{1 - (-|q|)^n}{1 + |q|} = \frac{1 - (-1)^n |q|^n}{1 + |q|}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{1 - |q|^{2p}}{1 + |q|}, & n = 2p \\ \dfrac{1 + |q|^{2p-1}}{1 + |q|}, & n = 2p - 1 \end{cases}$$
Ne segue che $S_{2p} \to -\infty$ e $S_{2p-1} \to +\infty$ e pertanto $\nexists \lim_{n\to\infty} s_n$
Allora
$$\lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} +\infty & q \geq 1 \\ \dfrac{1}{1-q} & q \in]-1,1[\\ \nexists & q \leq -1 \end{cases}$$