Facoltà di Architettura "Valle Giulia"
Corso di Laurea Specialistica Quinquennale U.E.

Istituzioni di Matematica 2
a.a. 2007-2008

http://www.dmmm.uniroma1.it/persone/capitanelli

1 CALCOLO INTEGRALE PER LE FUNZIONI DI UNA VARIABILE

Introduzione.

Definizione 1.1 *Partizione. Somme integrali.*

Definizione 1.2 *Integrale definito di una funzione limitata f in un intervallo $[a, b]$.*

Osservazione 1.3 *Interpretazione geometrica dell'integrale definito.*

Proprietà dell'integrale.

Teorema 1.4 *Additività dell'integrale rispetto all'intervallo.*

Teorema 1.5 *Linearità dell'integrale.*

Teorema 1.6 *Confronto tra integrali.*

Teorema 1.7 *Teorema della media integrale. (dim)*

Teorema 1.8 *Integrabilità delle funzioni continue.*

Definizione 1.9 *Funzione integrale.*

Teorema 1.10 *Il teorema fondamentale del calcolo integrale. (dim)*

Definizione 1.11 *Primitiva.*

Teorema 1.12 *Caratterizzazione delle primitive di una funzione in un intervallo.*

Teorema 1.13 *Formula fondamentale del calcolo integrale. (dim)*

Definizione 1.14 *Integrale indefinito.*

Osservazione 1.15 *L'integrale definito $\int_a^b f\,dx$ è un numero reale. L'integrale indefinito $\int f\,dx$ è un insieme di funzioni.*

Tabella degli integrali indefiniti.
Integrazione per decomposizione in somma.
Integrazione delle funzioni razionali.
Integrazione per parti.
Integrazione per sostituzione.
Formule di razionalizzazione tramite particolari sostituzioni ($R(y)$ è una funzione razionale fratta)

$\int R(e^x)\,dx$ con $t = e^x$
$\int R(\sin x)\cos x\,dx$ con $t = \sin x$
$\int R(\cos x)\sin x\,dx$ con $t = \cos x$
$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})\,dx$ con $x = a \sin t$
$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ con $t = \tan \frac{x}{2}$
$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \tan x)\,dx$ con $t = \tan x$

Esercizio 1.16 *Calcolare i seguenti integrali*
$\int_1^2 (x^5 + 3x + 6)\, dx$
$\int_0^1 (x+1)^4\, dx$
$\int \cos x \sin x\, dx$
$\int \tan x\, dx$
$\int \frac{x}{x+1}\, dx$
$\int \tan^2 x\, dx$
$\int \frac{x^5 - 3x^4 + x + 3}{x^2 - 1}\, dx$
$\int \frac{x+7}{x^2 - x - 2}\, dx$
$\int \frac{x}{x^2 + 2x + 1}\, dx$
$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 5}\, dx$
$\int \frac{x}{x^2 + x + 1}\, dx$
$\int xe^x\, dx$
$\int \log x\, dx$
$\int \cos^2 x\, dx$
$\int x \cos x\, dx$
$\int x^2 \cos x\, dx$
$\int e^x \sin x\, dx$
$\int \tan 3x\, dx$
$\int x^4 \log x\, dx$
$\int e^{3x} \sin 2x\, dx$
$\int \frac{1}{5 + x^2}\, dx$
$\int \sin^2 x\, dx$
$\int \sin^2 x \cos x\, dx$

Calcolo di aree di figure piane.
Formula per il calcolo dell'area.

Esercizio 1.17 *Calcolare l'area di un cerchio di raggio r.*

Esercizio 1.18 *Calcolare l'area della regione piana racchiusa dall'ellisse di equazione* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Esercizio 1.19 *Calcolare l'area della regione piana compresa fra le 2 parabole di equazioni $y^2 = 9x$ e $x^2 = 9y$.*

Integrali impropri.

Definizione 1.20 *Integrale improprio in $[a, b)$ di una funzione f non negativa, continua in $[a, b)$ e non limitata in un intorno sinistro di b.*

Definizione 1.21 *Integrale improprio in $(a, b]$ di una funzione f non negativa, continua in $(a, b]$ e non limitata in un intorno destro di a.*

Esercizio 1.22 *Studio dell'integrale improprio* $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

Esercizio 1.23 *Studio dell'integrale improprio* $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\, dx$

Definizione 1.24 *Integrale improprio in $[a, +\infty)$ di una funzione continua e non negativa.*

Definizione 1.25 *Integrale improprio in $(-\infty, b]$ di una funzione continua e non negativa.*

Esercizio 1.26 *Studio dell'integrale improprio* $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$.

Esercizio 1.27 *Studio dell'integrale improprio* $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$.

ESERCITAZIONI svolte dalla Dott.ssa Lecian

Esercizio 1.28 *Risolvere i seguenti integrali*

Per sostituzione

$$\int \cot x dx \tag{1.1}$$

$$\int \tan x\,dx \tag{1.2}$$

$$\int (\sin x)^5 cosx\,dx \tag{1.3}$$

$$\int (\sin x)^n cosx\,dx \tag{1.4}$$

$$\int (\cos x)^n sinx\,dx \tag{1.5}$$

$$\int \frac{1}{\sin x \cos x}\,dx \tag{1.6}$$

$$\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \tag{1.7}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}\,dx \tag{1.8}$$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)\arctan x}\,dx \tag{1.9}$$

$$\int \sin(ax)\,dx \tag{1.10}$$

$$\int \cos(ax)\,dx \tag{1.11}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx \tag{1.12}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx \tag{1.13}$$

$$\int \sqrt{x+2}\,dx \tag{1.14}$$

$$\int \sqrt{3-2x^2}x\,dx \tag{1.15}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{2-3x^2}}\,dx \tag{1.16}$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx \tag{1.17}$$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\,dx \tag{1.18}$$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}\,dx \tag{1.19}$$

$$\int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{1-x^n}}\,dx \tag{1.20}$$

$$\int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{1-x^{2n}}}\,dx \tag{1.21}$$

$$\int \quad x \quad e^{x^2}\,dx \tag{1.22}$$

$$\int \quad f'(x) \quad e^{f(x)}\,dx \tag{1.23}$$

$$\int \frac{\lg x}{x}\,dx \tag{1.24}$$

$$\int \frac{(\lg x)^n}{x}\,dx \tag{1.25}$$

$$\int \frac{1}{(\lg x)^n x}\,dx \tag{1.26}$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-(\lg x)^2}}\,dx \tag{1.27}$$

$$\int \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx \tag{1.28}$$

Per decomposizione in somma (+sostituzione)

$$\int \frac{x}{1+x}\,dx \tag{1.29}$$

$$\int \frac{3x+2}{4x+5}\,dx \tag{1.30}$$

$$\int \frac{1-x^6+x^2}{1+x^3}\,dx \tag{1.31}$$

$$\int \frac{1}{x(1+x)}\,dx \tag{1.32}$$

$$\int \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx \tag{1.33}$$

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx \tag{1.34}$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+2}\,dx \tag{1.35}$$

$$\int \frac{e^x}{3e^{2x}-e^x+2}\,dx \tag{1.36}$$

$$\int \frac{3x+2}{x^2+x+1}\,dx \tag{1.37}$$

Funzioni razionali e irrazionali

$$\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx \tag{1.38}$$

$$\int \frac{x+3}{x^2-6x}\,dx \tag{1.39}$$

$$\int \frac{3x+1}{x^2-6x+5}\,dx \tag{1.40}$$

$$\int \frac{x^2-7x+2}{(x-2)^3}\,dx \tag{1.41}$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\,dx \tag{1.42}$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x+4}}\,dx \tag{1.43}$$

Per parti

$$\int \quad x \sin x\,dx \tag{1.44}$$

$$\int \quad xe^x\,dx \tag{1.45}$$

$$\int \quad x \lg x\,dx \tag{1.46}$$

$$\int \quad \arcsin x\,dx \tag{1.47}$$

$$\int \quad \arctan x\,dx \tag{1.48}$$

$$\int \quad \lg x\,dx \tag{1.49}$$

$$\int \quad \frac{\ln \ln x}{x}\,dx \tag{1.50}$$

$$\int \quad \arctan \sqrt{x}\,dx \tag{1.51}$$

$$\int \quad \frac{\sin x}{(\cos x)^3} e^{\tan x}\,dx \tag{1.52}$$

$$\int \quad \lg x (xe^x + e^x)\,dx \tag{1.53}$$

$$\int \quad \lg x (\sin x + x \cos x)\,dx \tag{1.54}$$

$$\int \quad (\lg x)^2\,dx \tag{1.55}$$

$$\int \quad \frac{\lg(1+x)}{x^2}\,dx \tag{1.56}$$

Per parti (formule di riduzione)

$$\int \quad x^2 \cos x\,dx \tag{1.57}$$

$$\int x^3 \sin x \, dx \tag{1.58}$$

$$\int x^n \sin(ax) \, dx \tag{1.59}$$

$$\int x^n \cos(ax) \, dx \tag{1.60}$$

$$\int x^2 e^x \, dx \tag{1.61}$$

$$\int x^n e^{ax} \, dx \tag{1.62}$$

Per parti (formule di ricorrenza)

$$\int (\sin x)^2 \, dx \tag{1.63}$$

$$\int x(\sin x)^2 \, dx \tag{1.64}$$

$$\int e^x \sin x \, dx \tag{1.65}$$

$$\int \cos \lg x \, dx \tag{1.66}$$

Integrali definiti

$$\int_1^{3^{1/4}} \frac{x}{1+x^4} \, dx \tag{1.67}$$

$$\int_0^{\lg 2} \sqrt{e^x - 1} \, dx \tag{1.68}$$

$$\int_{-1}^{4} \mid x^2 - 3x \mid \, dx \tag{1.69}$$

$$\int_{-2}^{1} dx \quad \frac{3+x}{\sqrt{1+\mid x \mid}} \, dx \tag{1.70}$$

Esercizio 1.29 *Calcolare l'area delle regioni limitate da*

- $y = \mid x - 1 \mid$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 3$.
- $y^2 = 4x$; $2x + y - 4 = 0$; $y = 0$.
- $y = 1/x$; $y = 0$; $x = a$; $x = 5a$, $a > 0$.
- $y = -2x + 3$; $y = x^2$.
- $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Esercizio 1.30 *Calcolare i seguenti integrali impropri*

$$\int_0^b \frac{1}{x^p}\,dx, \quad b>0, \quad p>1, \quad p<1, \quad p=1 \tag{1.71}$$

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx \tag{1.72}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \tag{1.73}$$

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx, \quad a>0, \quad p>1, \quad p<1, \quad p=1 \tag{1.74}$$

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\lg x}\,dx \tag{1.75}$$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx, \quad \alpha>0 \tag{1.76}$$

2 FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

Introduzione.

Definizione 2.1 *Insieme di definizione.*

Esercizio 2.2 *Determinare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni*

$z = x^2 - y^2$
$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$
$z = 1 - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$
$z = 1/\sin(x+y)$
$z = \sqrt{1-xy}$
$z = \sqrt{\sin(\pi(x^2+y^2))}$
$z = \sqrt{\sin(x\pi(x^2+y^2))}$
$z = \lg\left(\frac{1}{1-xy}\right)$.

Osservazione 2.3 *Rappresentazione geometrica.*

Definizione 2.4 *Punto di accumulazione.*

Definizione 2.5 *Limiti.*

Esercizio 2.6 *Calcolare i seguenti limiti*

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$
$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$
$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

Osservazione 2.7 *Confronto con le funzioni di una variabile.*

Definizione 2.8 *Continuità.*

Osservazione 2.9 *Come accade per le funzioni di una variabile, anche le funzioni di due variabili, ottenute componendo potenze, esponenziali, logaritmi e funzioni trigonometriche, sono continue nel loro insieme di definizione.*

Definizione 2.10 *Derivata parziale.*

Osservazione 2.11 *Significato geometrico delle derivate parziali.*

Definizione 2.12 *Gradiente.*

Osservazione 2.13 *Significato geometrico del gradiente.*

Definizione 2.14 *Piano tangente alla superficie.*

Definizione 2.15 *Derivate di ordine superiore.*

Teorema 2.16 *Teorema di inversione delle derivazioni (Teorema di Schwarz) .*

Osservazione 2.17 *Un esempio di funzione per la quale non vale il Teorema di inversione è fornito dall'esercizio 2.44.*

Esercizio 2.18 *Calcolare le derivate parziali prime, seconde, terze di*
$f(x,y) = e^x$
$f(x,y) = \tan y$
$f(x,y) = x^8 + y^3 - 5x^2y^3$
$f(x,y) = \ln(5x+7y) + \sin(x^2+y^3-7) + e^y x$
$f(x,y) = \cos(y^2 \lg x)$.

Definizione 2.19 *Funzione composta.*

Teorema 2.20 *Formula di derivazione delle funzioni composte.*

Esercizio 2.21 *Determinare la derivata (rispetto a t) della funzione $z = \sqrt{x^2+y^2}$ composta con $x = t^2+1, y = e^t$.*

Esercizio 2.22 *Determinare la derivate parziali (rispetto a ρ e a θ) della funzione $z = \sqrt{x^2+y^2}$ composta con $x = \rho\sin\theta, y = \rho\cos\theta$.*

Teorema 2.23 *Il teorema del valor medio. (dim)*

Osservazione 2.24 *Conseguenze del teorema del valor medio.*

Osservazione 2.25 *Confronto con le funzioni di una variabile.*

Definizione 2.26 *Differenzialità.*

Teorema 2.27 *Differenzialità implica continuità. (dim)*

Osservazione 2.28 *La sola derivabilità parziale non implica la continuità (esercizi 2.39 e 2.42).*

Osservazione 2.29 *Confronto con le funzioni di una variabile.*

Teorema 2.30 *Teorema del differenziale.*

Definizione 2.31 *Differenziale totale.*

Osservazione 2.32 *Confronto con le funzioni di una variabile.*

Definizione 2.33 *Massimi e minimi relativi.*

Teorema 2.34 *Condizione necessaria per massimi e minimi.*

Definizione 2.35 *Hessiano.*

Teorema 2.36 *Condizione sufficiente per massimi e minimi.*

Osservazione 2.37 *Confronto con le funzioni di una variabile.*

Esercizio 2.38 *Studiare i punti critici delle seguenti funzioni*
$f(x, y) = x^2$
$f(x, y) = y^2$
$f(x, y) = x^2 + y^2$
$f(x, y) = x^2y^2$
$f(x, y) = x^3 - 6y(x + y)$
$f(x, y) = ye^{-(x^2+y^2)}$.

ESERCITAZIONI svolte dalla Dott.ssa Lecian

Esercizio 2.39 *Determinare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni*

- $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
- $z = 1/\sin(x - y)$
- $z = \lg\left(\frac{x-y}{xy}\right)$.
- $z = \lg(1 + x - y) - (y - x^2)^{1/6}$.

Esercizio 2.40 *Calcolare i seguenti limiti*

- $\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x}{x^2+y^2}$
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$
- $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{2x-y}{xy-2}$.
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$.

Esercizio 2.41 *Dimostrare che* $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}$ *nell'origine è continua rispetto a* x *e* y *separatamente, ma non nel complesso delle variabili.*

Esercizio 2.42 *Dimostrare che* $f(x, y) = \begin{cases} \sin\arctan(y/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ *nell'origine è continua rispetto a* x *e* y *separatamente, ma non nel complesso delle variabili, e che è discontinua anche in qualsiasi altro punto* $(0, y_0)$ *dell'asse* y *diverso dall'origine.*

Esercizio 2.43 *Calcolare le derivate parziali prime di*

$f(x, y) = \sin(5x + 7y) + \lg(x^2 + y^3 - 7) + \cos^2 x$.

$f(x, y) = \sin(y \lg x)$.

Esercizio 2.44 *Utilizzando la definizione di derivata, dimostrare che* $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x=y=0 \end{cases}$ *è parzialmente derivabile nell'origine.*

Esercizio 2.45 *Calcolare le derivate parziali prime, seconde e terze di* $f(x,y) = x^4 + xy^2 + 2y^3$.

Esercizio 2.46 *Dimostrare che* $f(x,y) = \begin{cases} \frac{yx^3-xy^3}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x=y=0 \end{cases}$ *nell'origine ammette derivate parziali seconde miste, e che queste sono diverse. Dimostrare inoltre che* f_{xy} *nell'origine non è continua.*

Esercizio 2.47 *Studiare i punti critici delle seguenti funzioni*

- $f(x,y) = x^2 + y^2$.
- $f(x,y) = -x^2 - y^2$.
- $f(x,y) = x^2 - y^2$.
- $f(x,y) = xy$.
- $f(x,y) = x^3 + y^3 + xy$.
- $f(x,y) = x^3 - y^3 + xy$.
- $f(x,y) = xy^4 - 16yx^2 + x$.
- $f(x,y) = 2(x^2 + y^2 + 1) - (x^4 + y^4)$.
- $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$.
- $f(x,y) = 2(x^4 + y^4 + 1) - (x + y^2)$.

3 CALCOLO INTEGRALE PER LE FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

Introduzione.

Definizione 3.1 *Partizione. Somme integrali.*

Definizione 3.2 *Integrale definito di una funzione limitata* $f(x,y)$ *in un dominio.*

Osservazione 3.3 *Interpretazione geometrica dell'integrale definito.*

Teorema 3.4 *Integrabilità delle funzioni continue.*

Proprietà dell'integrale.

Definizione 3.5 *Domini normali.*

Teorema 3.6 *Teorema di riduzione di un integrale doppio.*

Esercizio 3.7 *Calcolare l'integrale doppio della funzione f(x,y)=x+y esteso al triangolo di vertici* $A = (1,2), B = (2,1), C = (2,2)$.

Calcolo degli integrali doppi in coordinate polari.

Esercizio 3.8 *Calcolare l'integrale doppio della funzione f(x,y)=xy esteso al quarto di cerchio di equazione* $x^2 + y^2 = r^2$ *compreso nel primo quadrante*

Derivazione sotto il segno.

Teorema 3.9 *Teorema di derivazione sotto il segno d'integrale.*

Esercizio 3.10 *Calcolare la derivata delle seguenti funzioni*
$F(y) = \int_0^5 (x^2 + xy - 2y^2)\, dx$
$F(y) = \int_1^2 (x^3y^2 + xy + 4)\, dx$
$F(y) = \int_0^1 \log(x^2 + y^2)\, dx$

Differenziali.

Definizione 3.11 *Differenziali. Differenziali esatti.*

Teorema 3.12 *Condizione necessaria e sufficiente per i differenziali esatti. (dim)*

Esercizio 3.13 *Verificare che le seguenti espressioni sono differenziali esatti e integrarli*
$x\, dx + y\, dy$
$(3x^2 - y^2)\, dx + (x^3 - 2xy + 1)\, dy$
$(\frac{1}{xy})\, dx + \frac{\ln x}{y^2}\, dy$

Definizione 3.14 *Integrali curvilinei.*

Proposizione 3.15 *Integrazione curvilinea di un differenziale esatto.*

Esercizio 3.16 *Calcolare i seguenti integrali curvilinei della forma differenziale* $w = 2xydx + x^2dy$ *lungo i seguenti cammini:*

- *lungo il cammino* $y = x$, $0 \leq x \leq 1$;
- *lungo il cammino* $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$;
- *lungo il cammino* $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$.

Osservare che la forma risulta esatta e che quindi il valore dell' integrale curvilineo dipende unicamente dai valori che la primitiva della forma assume agli estremi.

ESERCITAZIONI svolte dalla Dott.ssa Lecian

Esercizio 3.17 *Calcolare i seguenti integrali*
- in coordinate cartesiane

- $\int\int_A xy \ \ dxdy$, *dove* A *è il semicerchio di centro* $(1, 0)$ *e raggio* 1 , *con* $y > 0$.
- $\int\int_A xy \ \ dxdy$, *dove* $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2x - x^2\}$.
- $\int\int_A \frac{x}{1+y} \ \ dxdy$, *dove* $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$, *considerando il dominio di integrazione normale rispetto all'asse* y.
- $\int\int_A x \ \ dxdy$, *dove* A *è il semicerchio chiuso di centro l'origine e raggio* 1, *con* $x > 0$, *considerando il dominio di integrazione prima normale rispetto all'asse* x, *poi normale rispetto all'asse* y.

- $\int\int_A \frac{y}{(1+x)(1+y^2)} \quad dxdy$, *dove A è delimitato $x=0$, $y=1$, $x=y^2$, considerando il dominio di integrazione prima normale rispetto all'asse x, poi normale rispetto all'asse y.*
- $\int\int_A e^{y^2} \quad dxdy$, *dove A è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,1)$, $(2,1)$.*
- $\int\int_A (x-y) \quad dxdy$, *dove A è il semicerchio di centro l'origine e raggio r, con $y>0$.*
- $\int\int_A (ax^2+by) \quad dxdy$, *$a,b\in\mathbb{R}$, dove $A=\{(x,y)\in[-1,1]\times\mathbb{R} : x^2\le y\le 1\}$.*
- $\int\int_A x\cos y \quad dxdy$, *dove $A=\{(x,y)\in[0,1]\times$ $Rset : 0\le y\le 1-x^2\}$.*
- $\int\int_A \frac{y}{x^2+y^2} \quad dxdy$, *dove $A=\{(x,y)\in Rset^2 : y\ge 0, 1\le x^2+y^2\le 4\}$.*

- in coordinate polari

- $\int\int_A \sqrt{x^2+y^2} \quad dxdy$, *dove A è il settore del cerchio di centro l'origine e raggio 1, contenuto nel primo quadrante*
- $\int\int_A e^{-(x^2+y^2)}x^2 \quad dxdy$, *dove A è la circonferenza di centro l'origine e raggio 1.*
- $\int\int_A x^2(1+yx^2)dxdy$, *dove A è la corona circolare di centro l'origine e raggi 1 e 2.*
- $\int\int_A (x-y) \quad dxdy$, *dove $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le r^2, y>0, r>0\}$.*
- $\int\int_A xdxdy$, *dove A è il settore di corona circolare di centro l'origine e raggi 1 e 2, delimitato dalle rette $\sqrt{3}x-y=0$ e $x-\sqrt{3}y=0$, $y>0$.*
- $\int\int_A y^2dxdy$, *dove A è il settore di corona circolare di centro l'origine e raggi 1 e 2,, delimitato dalle rette $\sqrt{3}x-y=0$ e $x-\sqrt{3}y=0$, $y>0$.*

Esercizio 3.18 *Svolgere il seguente integrale in coordinate cartesiane ed in coordinate polari*

- $\int\int_A x^3 \quad dxdy$, *dove A è il semicerchio $x^2+y^2\le 1$, $x\ge 0$.*

Esercizio 3.19 *Verificare che le seguenti forme sono esatte e trovarne una primitiva*

- $w=(2x+5y^3)dx+(15xy^2+2y)dy$.
- $w=xdx+ydy$.
- $w=e^x(2x^2+yx^2+y^3/3)dx+e^x(x^2+y^2)dy$.
- $w=(1+y^2+yx^2)dx+(2xy+y^3/3)dy$.
- $w=\frac{1}{1+y^2}dx-\frac{2xy}{(1+y^2)^2}dy$.
- $w=(\sin y-y\cos x)dx+(x\cos y-\sin x)dy$.
- $w=(\log y+\cos x)dx+(\frac{x}{y})dy$.
- $w=(x^3-3xy^2+2)dx-(3yx^2-y^2)dy$.
- $w=(x+\frac{y}{x^2+y^2})dx+(y-\frac{x}{x^2+y^2})dy$.

- $w = \frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2-3x^2}{y^4}dy$.

Esercizio 3.20 *Calcolare i seguenti integrali curvilinei di una forma differenziale w lungo un cammino C :* $\int_C w$

- $w = 2xydx - x^2dy$, *lungo il cammino* $y = x/2$, $0 \le x \le 2$;
- $w = (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy$, *lungo il cammino* $y = x^2$, $1 \le x \le 2$;
- $w = xydx + (1 + y^2)dy$, *lungo il cammino* $\{x = t, y = t\}$, $0 \le x \le 1$, *e lungo il cammino* $\{x = t^2, y = t\}$, $0 \le x \le 1$;
- $w = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$, *lungo la circonferenza di raggio 2 e centro l'origine, di estremi* $(2, 0)$ *e* $(\sqrt{3}, 1)$, *e lungo la generica circonferenza di raggio* $a > 0$ *e centro l'origine. Notare che il risultato non dipende dal raggio della circonferenza, ma solo dall'angolo considerato.*

Esercizi di riepilogo.

Esercizio 3.21 *Calcolare i seguenti integrali definiti*

- $\int_1^e \frac{\lg x}{\sqrt{x}}dx$;
- $\int_{-1/2}^{4/5} \frac{|x(x-1)|}{x^2-1}dx$.

Esercizio 3.22 *Calcolare l'area delle regioni definite da*

- $y_1 = x^2 - 3x + 2$, $y_2 = -x^2 + x + 2$;
- $y_1 = 3\sqrt{x}$, $y_2 = x^2/9$.

Esercizio 3.23 *Calcolare i seguenti integrali impropri*

- $\int_0^a \frac{1}{(x-a)^2}dx$, $a > 0$;
- $\int_{-1}^{\infty} xe^{-\alpha x^2}dx$, $\alpha > 0$;
- $\int_a^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$, $a > 0$;
- $\int_3^{\infty} \frac{2x+1}{x^3-x}dx$.

4 NUMERI COMPLESSI

Introduzione.
Motivazioni dell'introduzione dei numeri complessi.

Definizione 4.1 *Unità immaginaria. Forma algebrica. Parte reale* $Re(z)$ *e parte immaginaria* $Im(z)$ *di un numero complesso.*

Rappresentazione geometrica dei numeri complessi nel piano di Gauss.

Definizione 4.2 *Forma trigonometrica di un numero complesso. Modulo di un numero complesso. Argomento di un numero complesso.*

Osservazione 4.3 *L'argomento è determinato a meno di multipli di* 2π.

Definizione 4.4 *Forma esponenziale di un numero complesso.*

Proposizione 4.5 *Formule di Eulero. (dim)*

5 EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

Introduzione.

Definizione 5.1 *Equazione differenziale.*

Definizione 5.2 *Soluzione di una equazione differenziale.*

Definizione 5.3 *Integrale generale, integrali particolari e singolari.*

Definizione 5.4 *Ordine di una equazione differenziale.*

Definizione 5.5 *Condizione iniziale. Problema di Cauchy.*

Risoluzione di alcuni tipi di equazioni differenziali.

Definizione 5.6 *Equazioni differenziali a variabili separabili.*

Teorema 5.7 *Integrale generale di una equazione differenziale del primo ordine risolubile per separazione di variabili. (dim)*

Esercizio 5.8 *Risolvere le seguenti equazioni differenziali*

- $y' = x$;
- $y' = y$;
- $y' = xy$;
- $y' = \sqrt[3]{y^2}$;
- $y' = xy^2$.

Esercizio 5.9 *Risolvere i seguenti problemi di Cauchy*

- $y' = 2x, \quad y(1) = 0$;
- $y' = 3y, \quad y(1) = 1$;
- $y' = 4xy, \quad y(1) = 2$;
- $y' = 5\sqrt[3]{y^2}, \quad y(1) = 3$;
- $y' = 6xy^2$, *y(1)=4.*

Definizione 5.10 *Equazioni differenziali lineari.*

Definizione 5.11 *Equazioni differenziali lineari del primo ordine.*

Teorema 5.12 *Integrale generale di una equazione differenziale lineare del primo ordine. (dim - vedere esercizio 5.26)*

Esercizio 5.13 *Risolvere le seguenti equazioni differenziali*

- $y' = \frac{y}{x} + \cos x$;
- $y' = \frac{y}{x} + x\cos x$.

Esercizio 5.14 *Risolvere i seguenti problemi di Cauchy*

- $y' = \frac{y}{x} + x\cos x, \quad y(2) = 3;$
- $y' = -2\frac{y}{x} + \frac{\cos x}{x^2}, \quad y(\pi) = 0.$

Definizione 5.15 *Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti.*

Definizione 5.16 *Equazione differenziale lineare omogenea.*

Definizione 5.17 *Polinomio caratteristico.*

Teorema 5.18 *Integrale generale di una equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti. (dim)*

Esercizio 5.19 *Risolvere le seguenti equazioni differenziali*

- $y'' - 6y' - 5y = 0;$
- $y'' - 2y' - 2y = 0;$
- $y'' + 2y' + y = 0.$

Esercizio 5.20 *Risolvere i seguenti problemi di Cauchy*

- $y'' - 3y' + 2y = 0 \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2;$
- $y'' + y = 0 \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2;$
- $y'' - 2y' + y = 0 \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

Definizione 5.21 *Equazione differenziale lineare non omogenea.*

Teorema 5.22 *Rappresentazione dell'integrale generale di una equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti.*

Proposizione 5.23 *Integrali particolari di una equazione differenziale lineare non omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti per termini noti del tipo* $f(x) = P_n(x)$, $f(x) = a\cos x + b\sin x$, $f(x) = e^{\alpha x}$, $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos x + Q_m(x)\sin x)$ *dove* $P_n(x)$ *è un polinomio di grado* n *e* $Q_m(x)$ *è un polinomio di grado* m.

Esercizio 5.24 *Risolvere le seguenti equazioni differenziali*

- $y'' + y = x^3 + 5;$
- $y'' + y' = x^3 + 5;$
- $y'' = x^3 + 5.$
- $y'' + y = e^x;$
- $y'' - y' = e^x;$
- $y'' + 3y' = \sin x;$
- $y'' + y = e^x \cos x;$
- $y'' - y' = x^2 e^x;$

- $y'' + y = xe^x \sin x$.

ESERCITAZIONI svolte dalla Dott.ssa Lecian

Esercizio 5.25 *Integrare le seguenti equazioni differenziali, discutendo le soluzioni e le costanti di integrazione.*

- $y' = \cos^2 y$;
- $xy' = y \log y$;
- $xy' = 1+y^2$. *Trovare inoltre la soluzione particolare per le condizioni iniziali* $y(1) = 1$ *e* $y(-1) = 1$.
- $y' + 3x^2y^4 = 0$. *Trovare inoltre la soluzione particolare per le condizioni iniziali* $y(1) = 0$ *e* $y(-1) = 1$.

Esercizio 5.26 *Verificare che*

$$y(x) = e^{A(x)} \left[\int e^{-A(x)} b(x) + C \right], \quad A(x) = \int a(x)dx \tag{5.1}$$

è soluzione di

$$y' = a(x)y + b(x). \tag{5.2}$$

(Suggerimento. Moltiplicare la (5.1) per $e^{-A(x)}$, portare il termine in a a sinistra dell'uguale, riconoscere la derivata del prodotto $e^{-A(x)}y(x)$ ed integrare ambo i membri: si ottiene la (5.2).)

Esercizio 5.27 *Integrare le seguenti equazioni differenziali*

- $y' = -2\frac{y}{x} + \frac{\sin 4x}{x^2}$;
- $y' = y+1$. *Trovare inoltre la soluzione particolare per la condizione iniziale* $y(0) = 1$.

Esercizio 5.28 *Verificare che*

- $y' = ay + b$

può essere integrata con entrambi i metodi.

Esercizio 5.29 *Un esempio di equazioni differenziali di ordine superiore al primo (non lineare):*

- $y' = x(2 - y'')$.

Si risolve con un abbassamento di ordine. Notare che, essendo l'equazione del secondo ordine, si ottengono 2 costanti di integrazione.

Esercizio 5.30 *Trovare la soluzione generale delle seguenti equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti omogenee e determinare la soluzione particolare per il problema alla Cauchy.*

- $y'' + 2y' + y = 0$, $y(0) = \sqrt{2}$, $y'(0) = 0$;
- $y'' - 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 7$, $y'(0) = 6$;

- $y'' - 6y' + 5y = 0$;
- $y'' - 2y' + 2y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$;
- $y'' - 2y' + y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 3$;
- $y'' - 2y' = 0,\ y(0) = 4,\ y'(0) = 2$;
- $y'' + 4y = 0,\ y(0) = 5,\ y'(0) = 3$;
- $y'' + y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0$.

Esercizio 5.31 *Trovare la soluzione generale delle seguenti equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenee e determinare la soluzione particolare per il problema alla Cauchy.*

- $y'' - 3y' + 2y = 2x^3 - x^2 + 1,\ y(0) = 9,\ y'(0) = 4$;
- $y'' - 4y' = x^2 + 1,\ y(0) = 1/4,\ y'(0) = 7/32$;
- $y'' - 2y' + y = xe^x,\ y(0) = 3,\ y'(0) = 6$;
- $y'' + y = xe^x \sin x,\ y(0) = 16/25,\ y'(0) = 3/25$.

Esercizi di Riepilogo.

Calcolare l'area delle regioni delimitate da

- $y = \log x$, $y = 0$, $x = e$;
- $y = 1/x^\alpha$, $0 < a < x < b$, $\alpha > 1$; discutere i casi 1)$a \to 0$ e b fissato 2)$b \to \infty$ e a fissato, 3)$a \to 0$ e $b \to \infty$ contemporaneamente.

Calcolare i seguenti integrali impropri

- $\int_2^\infty \frac{1}{x(\log x)^2} dx$;
- $\int_3^\infty \frac{\log x}{x} dx$.

Verificare che le seguenti forme differenziali sono esatte, e calcolarne una primitiva

- $w = (2e^y - ye^x)dx + (2xe^y - e^x)dy$;
- $w = (1 + \cos x \cos y)dx + (2y \cos x - \sin x \sin y)dy$.

Calcolare l'integrale della forma $w = x^2dx + xydy$ lungo i cammini C, $\int_C w$,

- $C : y = x^2$, $a \le x \le b$;
- $C : x = y^2$, $0 \le x \le 1, y > 0$;
- $C : y = x$, $0 < a \le x \le b$;
- C: il segmento congiungente i punti $(3, 1)$ e $(3, 2)$;
- C: il segmento congiungente i punti $(1, 4)$ e $(3, 4)$;
- C: l'arco di circonferenza di raggio a e centro l'origine, compreso tra i punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2).

Calcolare gli integrali doppi

- $\int\int_D \frac{x^2}{y^2} dx \;\; dy$, dove D e' la regione di piano delimitata da $y = x$, $y = 1/x$, $x = 1$, $x = 2$, esprimendo il dominio di integrazione in forma normale rispetto all'asse x. Svolgere l'integrale in coordinate cartesiane;

- $\int\int_D (x + y) dx \;\; dy$, dove D e' la regione di piano delimitata da $x = y^2$, $x = a > 0$, esprimendo il dominio di integrazione in forma normale rispetto all'asse y. Svolgere l'integrale in coordinate cartesiane;

- $\int\int_D x^2 dx \;\; dy$, dove D e' il settore di corona circolare delimitata dalle circonferenze di raggio a e b centrate nell'origine, con $a < b$, e le due rette $y = \alpha x$ e $y = \beta x$, nel semipiano delle y positive, discutendo i casi 1)α, β concordi e positivi, 2) α, β concordi e negativi, 3) α, β discordi. Svolgere l'integrale in coordinate polari.

Determinare massimi e minimi della seguenti funzioni di due variabili

- $f(x, y) = x^3 + y^3 - xy$;

- $f(x, y) = e^{-x^2}(1 - xy + x)$.

Equazioni differenziali lineari del primo ordine: calcolare la soluzione generale

- $y' = e^x - y/x$;

- $y' = (1 + y) \cos x$.

Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenee: calcolare la soluzione generale e quella particolare per il problema alla Cauchy considerato

- $y'' + y = x \sin x \;\; y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

- $y'' - 4y = e^{2x} \sin 2x$, $y(0) = -1/10$, $y'(0) = 5/2$.

Equazioni differenziali del primo ordine alle variabili separabili: calcolare e discutere le soluzioni generali e trovare la soluzione particolare per il problema alla Cauchy considerato

- $y' = \frac{1-y}{x}$, $y(1) = 0$;

- $y' \tan x = y$, $y(\pi/2) = 3$.