Facoltà di Architettura
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN ARCHITETTURA

Istituzioni di Matematica 1 (Canale P-Z)
a.a. 2011-2012

http://www.dmmm.uniroma1.it/persone/capitanelli

1 I NUMERI E LE FUNZIONI REALI

Introduzione al corso.
Cenni di teoria degli insiemi: unione, intersezione, differenza, prodotto cartesiano.
Notazione dei quantificatori.
Cenni sui numeri naturali, interi relativi, razionali, reali $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.
Definizione assiomatica dei numeri reali.

Proposizione 1.1 *Non esiste alcun numero razionale q tale che $q^2 = 2$. (dim)*

Osservazione 1.2 $\mathbb{Q}$ *non soddisfa l'assioma di completezza.*

Intervalli.

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$
$[a, b) := \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$
$(a, b] := \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$
$(a, b) := \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$
$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R}, x > a\}$
$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$
$(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R}, x < b\}$
$(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\}$.

Esercizio 1.3 *Sia* $A = \{x \in \mathbb{R}, 2 \leq x \leq 6\}$ *e* $B = \{x \in \mathbb{N}, 3 < x \leq 7\}$. *Determinare* $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.

Esercizio 1.4 *Sia* $A = \{x \in \mathbb{N}, 2 \leq x \leq 6\}$ *e* $B = \{x \in \mathbb{R}, 3 \leq x \leq 7\}$. *Determinare* $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.

Esercizio 1.5 *Sia* $A = \{x \in \mathbb{R}, 2 \leq x \leq 6\}$ *e* $B = \{x \in \mathbb{R}, 3 < x \leq 7\}$. *Determinare* $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.

Esercizio 1.6 *Sia* $A = \{x \in \mathbb{N}, 2 \leq x \leq 6\}$ *e* $B = \{x \in \mathbb{N}, 3 \leq x \leq 7\}$. *Determinare* $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.

Esercizio 1.7 *Sia* $A = \{x \in \mathbb{N}, x \leq 5\}$ *e* $B = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 3\}$. *Determinare* $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.

Esercizio 1.8 *Sia* $A = \{x \in \mathbb{N}, x \leq 5\}$ *e* $B = \{x \in \mathbb{N}, x \geq 3\}$. *Determinare* $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.

Esercizio 1.9 *Sia* $A = \{x \in \mathbb{R}, x \leq 5\}$ *e* $B = \{x \in \mathbb{R}, x > 3\}$. *Determinare* $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.

Esercizio 1.10 *Sia* $A = \{x \in \mathbb{R}, x \leq 5\}$ *e* $B = \{x \in \mathbb{N}, x > 3\}$. *Determinare* $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.

Funzioni e rappresentazione cartesiana

Definizione 1.11 *Funzione, dominio, codominio, grafico.*

Definizione 1.12 *Funzione iniettiva, suriettiva, biettiva*

Definizione 1.13 *Funzione invertibile. Funzione inversa.*

Definizione 1.14 *Funzioni crescenti e decrescenti, strettamente decrescenti e strettamente crescenti. Funzioni monotone.*

Esercizio 1.15 *Studio delle funzioni* $f(x) = 3$, $f(x) = 2x + 1$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = x^2$, $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ 1 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases}$, $f(x) = \begin{cases} 2 & x \leq 1 \\ 4 & x > 1 \end{cases}$.

Definizione 1.16 *Operazioni con le funzioni.*

Definizione 1.17 *Funzione composta.*

Esercizio 1.18 *Siano* $f(x) = x^3$, $g(x) = 2x$. *Determinare* f^{-1}, g^{-1},$f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $g \cdot f$, $\frac{f}{g}$, $\frac{g}{f}$, $f \circ g$ *e* $f \circ g$

Esercizio 1.19 *Siano* $f(x) = x + 4$, $g(x) = x^5$. *Determinare* f^{-1}, $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $g \cdot f$, $\frac{f}{g}$, $\frac{g}{f}$, $f \circ g$ *e* $f \circ g$

Definizione 1.20 *Funzioni lineari. Principali proprietà. Grafici.*

Definizione 1.21 *Funzione valore assoluto. Principali proprietà. Grafici.*

Proposizione 1.22 *Per ogni numero reale* $r \geq 0$, *risulta*

$$|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r$$

$$|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r.$$

Proposizione 1.23 *Disuguaglianza triangolare.*

Esercizio 1.24 *Risolvere*
$|x| = 4$, $|x| \leq 3$, $|x + 2| \leq 3$, $x^2 + 2|x| - 3 < 0$, $x^2 - 2|x| - 3 > 0$, $|x^2 + 1| \geq 2$

Definizione 1.25 *Le funzioni potenza. Principali proprietà. Grafici.*

Definizione 1.26 *Funzioni esponenziali. Principali proprietà. Grafici.*

Definizione 1.27 *Logaritmi. Principali proprietà. Grafici.*

Definizione 1.28 *Funzioni trigonometriche. Principali proprietà. Grafici.*

Definizione 1.29 *Funzioni trigonometriche inverse. Principali proprietà. Grafici.*

Esercizio 1.30 *Risolvere*
$\ln_5 x > 2$, $\ln_3 x < \frac{1}{2}$, $\ln_{\frac{1}{7}} x < \sqrt{2}$, $\ln(1 + \frac{1}{x}) \leq 1$, $2^x > 4$, $4^x > 2$, $e^{|x-1|} < e^x$, $(\frac{1}{3})^{(1-12x)x} < 3$, $(\frac{1}{3})^x > 9$, $\sin x = 5$, $\sin x = 1$, $\sin x = \frac{1}{2}$ $\cos x > 3$, $\cos x > \frac{1}{2}$, $\cos x > -2$, $\cos x < -2$, $\tan x = 1$, $\tan x > 0$, $\arcsin x > 0$, $\arccos x < 0$, $\arctan x < 0$, $\arctan x < 4$.

Esercizio 1.31 *Determinare il campo di esistenza delle seguenti funzioni* $\sqrt{x + 1}$, $\sqrt[3]{x + 1}$, $\sqrt{2 - x^2}$, $\sqrt[4]{\frac{x+1}{6-x}}$, 3^{2-x^2}, $6^{\cos x}$, $\ln \sqrt{x}$, $\sqrt{\ln x}$, $\sqrt{\tan x}$, $\cos(\sqrt{x})$, $\tan(\sqrt{x})$, $\cos(\sqrt{\tan x})$, $\sqrt[4]{3 - \ln_2 x}$, $\ln \sqrt{\frac{x+1}{x}}$, $3^{\ln x}$, $\sqrt{\ln_{\frac{1}{3}}(2x - 1)}$, $(\ln_5 x - 5)^{-\pi}$, $\arcsin(\ln x)$, $\ln_x 6$, $\ln_x x$, $\ln_x(\ln x)$, $\arcsin(2^x)$, x^x, $\frac{\sin \ln x}{\ln x}$, $\ln_x(x^2 + 4x)$, $\ln_x \sqrt{\frac{x+2}{x-2}}$, $\ln_x(x^2 - 3x + 2)$, $\arccos(\frac{x-1}{x+3})$, $\arctan(\frac{\cos x}{x^2+3})$, $\cos(\frac{\arcsin x}{x^3})$.

2 COMPLEMENTI AI NUMERI REALI

Definizione 2.1 *Massimo e minimo di un insieme A di numeri reali.*

Osservazione 2.2 *Il massimo di un insieme, se esiste, è unico. (dim)*

Definizione 2.3 *Maggiorante e minorante di un insieme.*

Definizione 2.4 *Insiemi limitati superiormente, limitati inferiormente, limitati.*

Proposizione 2.5 *Un insieme A è limitato se e soltanto se esiste M tale che $|a| < M$, $\forall a \in A$.*

Osservazione 2.6 *Ci sono insiemi limitati superiormente che non ammettono massimo.*

Definizione 2.7 *Estremo superiore. Estremo inferiore.*

Teorema 2.8 *Teorema di esistenza dell'estremo superiore. (dim)*

Osservazione 2.9 *Il massimo di un insieme, se esiste, è anche estremo superiore.*

Definizione 2.10 *Se A non è limitato superiormente, definiamo $\sup A = \infty$. Se A non è limitato inferiormente, definiamo $\inf A = -\infty$.*

Osservazione 2.11 *L'esistenza dell'estremo superiore di un insieme limitato superiormente non vale in $\mathbb{Q}$.*

Esercizio 2.12 *Calcolare estremo superiore e inferiore (specificando se si tratta di massimo e minimo) dei seguenti insiemi*

$A = \left\{\frac{n-1}{n},\, n \in \mathbb{N}\right\}$
$B = \left\{\frac{1}{n},\, n \in \mathbb{N}\right\}$
$C = \left\{\frac{5n+1}{n},\, n \in \mathbb{N}\right\}$
$D = \{x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 \leq 0\}$
$E = \{x \in \mathbb{R}, x^2 - 4 > 0\}$
$F = \{x \in \mathbb{R}, |x^2 - 9x + 7| < 0\}$
$G = \{x \in \mathbb{R}, \sin x > \cos x\}$
$H = \left\{x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 - 1} > x - 3\right\}$
$I = \left\{x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 - 1} > x + 3\right\}$
$L = \left\{x \in \mathbb{R}, \log_{\frac{1}{3}}(\log_2 x) > 0\right\}$
$M = \left\{x \in \mathbb{R}, 2x - 1 > \sqrt{4x + 1}\right\}$
$N = \left\{x \in \mathbb{R}, \sqrt{x + 2} > \sqrt{4 - x}\right\}$
$0 = \{x \in \mathbb{R}, |x^2 - 9x + 7| < 7\}$

3 MATRICI E DETERMINANTI

Introduzione.

Definizione 3.1 *Matrice.*

Definizione 3.2 *Ordine di una matrice. Matrice quadrata. Matrice rettangolare.*

Operazioni tra matrici.

Definizione 3.3 *Determinante.*

Proposizione 3.4 *Sviluppo di un determinante del secondo ordine.*

Proposizione 3.5 *Sviluppo di un determinante del terzo ordine (regola di Sarrus).*

Principali proprietà di un determinante.

Definizione 3.6 *Complemento algebrico.*

Teorema 3.7 *Primo Teorema di Laplace.*

Teorema 3.8 *Secondo Teorema di Laplace. (dim)*

Ulteriori proprietà di un determinante.

Definizione 3.9 *Matrice inversa.*

Definizione 3.10 *Matrice trasposta.*

Definizione 3.11 *Matrice aggiunta.*

Teorema 3.12 *Teorema della matrice inversa. (dim)*

Esercizio 3.13 *Calcolare il determinante delle seguenti matrici* $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3.14 *Determinare la matrice inversa* A^{-1} *delle seguente matrice* $A = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.
Verificare che $A^{-1}A = I$ *e* $AA^{-1} = I$

Esercizio 3.15 *Determinare la matrice inversa* A^{-1} *delle seguente matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.
Verificare che $A^{-1}A = I$ *e* $AA^{-1} = I$

4 SISTEMI LINEARI

Introduzione.

Definizione 4.1 *Sistema lineare.*

Definizione 4.2 *Coefficienti. Termini noti.*

Definizione 4.3 *Matrice del sistema. Matrice completa.*

Definizione 4.4 *Soluzione del sistema.*

Definizione 4.5 *Sistema compatibile. Sistema incompatibile.*

Teorema 4.6 *Regola di Cramer. (dim)*

Esercizio 4.7 *Risolvere il seguente sistema* $x-2y+3z=1$, $2x+y-4z=2$, $-3x+4y+z=2$.

Esercizio 4.8 *Risolvere il seguente sistema* $2x+3y+4z=5$, $x+y+z=2$, $4x-5y+2z=3$.

Definizione 4.9 *Minore di una matrice.*

Definizione 4.10 *Caratteristica o rango di una matrice.*

Teorema 4.11 *Teorema di Rouché-Capelli.*

Sistemi omogenei.

Esercizio 4.12 *Risolvere il seguente sistema* $3x-3y-z=1$, $4x-5y+2z=2$.

Esercizio 4.13 *Risolvere il seguente sistema* $3x-3y-z=1$, $2x-z=1$, $4x-5y+2z=2$.

Esercizio 4.14 *Risolvere il seguente sistema* $2x-y+3z+t=0$, $4x-2y+2z+3t=1$.

Esercizio 4.15 *Risolvere il seguente sistema* $2x-y+z-3t=0$, $x+y+2z-2t=3$, $-x+2y+z+t=1$.

Esercizio 4.16 *Risolvere il seguente sistema* $2x-y=3$, $3x+5y=1$, $-x-6y=2$, $5x+4y=4$.

Esercizio 4.17 *Determinare per quali valori del parametro a il seguente sistema risulta compatibile e per quei valori calcolare le soluzioni* $3x-2y=5$, $x+5y=13$, $-2x+y=a$.

Esercizio 4.18 *Determinare per quali valori del parametro a il seguente sistema risulta compatibile e per quei valori calcolare le soluzioni* $2x-y=1$, $ax+3y=2$, $3x-4y=a$.

Esercizio 4.19 *Determinare per quali valori del parametro a il seguente sistema risulta compatibile e per quei valori calcolare le soluzioni* $3x+ay-z=3$, $x+5y+3z=-9$, $2x+y-az=a$.

Esercizio 4.20 *Determinare per quali valori del parametro a il seguente sistema risulta compatibile e per quei valori calcolare le soluzioni* $x-y+3z=3$, $3x-y+2z=8$, $2ax+7z=2+a$.

5 ELEMENTI DI CALCOLO VETTORIALE

Introduzione.

Definizione 5.1 *Spazio vettoriale.*

Definizione 5.2 *Prodotto scalare.*

Proposizione 5.3 *Proprietà del prodotto scalare. (dim)*

Proposizione 5.4 *Teorema di rappresentazione del prodotto scalare. (dim)*

Proposizione 5.5 *Ortogonalità fra vettori.*

Proposizione 5.6 *Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.*

Proposizione 5.7 *Disuguaglianza triangolare.*

6 GEOMETRIA ANALITICA

Introduzione.

ELEMENTI DI GEOMETRIA ANALITICA DEL PIANO

Definizione 6.1 *Coordinate cartesiane di un punto.*

Definizione 6.2 *Distanza di due punti(dim).*

Proposizione 6.3 *Punto medio di un segmento. (dim)*

La retta.

Proposizione 6.4 *Equazione generale di una retta.(dim)*

Forme particolari dell'equazione di una retta.

Proposizione 6.5 *Equazione della retta passante per un punto e di dato coefficente angolare.(dim)*

Proposizione 6.6 *Equazione della retta passante per due punti.(dim)*

Intersezione di due rette.
Condizioni di parallelismo e di perpendicolarità di due rette.

Proposizione 6.7 *Equazione della retta passante per un punto e parallela ad una retta data.(dim)*

Proposizione 6.8 *Equazione della retta passante per un punto e perpendicolare ad una retta data.(dim)*

Definizione 6.9 *Fascio di rette.*

Trasformazioni delle coordinate.

Definizione 6.10 *Traslazione degli assi.*

Definizione 6.11 *Rotazione degli assi.*

Le coniche.

Definizione 6.12 *Circonferenza.*

Proposizione 6.13 *Equazione della circonferenza. (dim)*

Definizione 6.14 *Ellisse.*

Proposizione 6.15 *Equazione dell'ellisse. (dim)*

Definizione 6.16 *Iperbole.*

Proposizione 6.17 *Equazione dell'iperbole. (dim)*

Definizione 6.18 *Parabola.*

Proposizione 6.19 *Equazione della parabola. (dim)*

Intersezioni retta e conica.
Retta tangente ad una conica.
Le coniche come sezioni piane del cono.
Equazione generale delle coniche e loro classificazione.

Esercizio 6.20 *Dato il fascio di rette individuato da* $4x + y - 3 = 0$ *e da* $2x + y - 7 = 0$ *determinare*

1) la retta t *del fascio perpendicolare alla retta* r *di equazione* $2x + 3y + 10 = 0$;
2) Il punto d'intersezione di r *e di* t;
3) la retta del fascio parallela alla retta r.

Esercizio 6.21 *Data la funzione* $y = |x^2 + 4x| - (x^2 + 2x)$ *determinarne il grafico e le tangenti negli eventuali punti angolosi.*

Esercizio 6.22 *Presa la retta di equazione* $y = mx + 4$, *determinare* m *in modo che la retta risulti tangente al cerchio* $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$.

Esercizio 6.23 *Presa la retta di equazione* $y = x + p$, *determinare* p *in modo che la retta risulti tangente all'ellisse* $4x^2 + y^2 = 16$.

Esercizio 6.24 *Determinare le rette tangenti all'iperbole* $x^2 - 4y^2 = 16$ *uscenti dal punto* $(2, 0)$.

Esercizio 6.25 *Classificare le seguenti coniche*

$x^2 + 5y^2 + 3x - 1 = 0$
$2x^2 + y^2 + 3x - 4y - 1 = 0$
$x^2 - 3y^2 + 3x + 2y - 1 = 0$
$x^2 + 4y^2 + 4xy + 3x + 2y + 3 = 0$

ELEMENTI DI GEOMETRIA A TRE O PIÙ DIMENSIONI

Lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$.
Elementi di geometria analitica in $\mathbb{R}^n$.
Equazioni della retta in $\mathbb{R}^3$.
Equazioni del piano in $\mathbb{R}^3$.
Condizioni di parallelismo e perpendicolarità di due rette.
Condizioni di parallelismo e perpendicolarità di due piani.
Condizioni di parallelismo e perpendicolarità tra retta e piano.

Esercizio 6.26 *Scrivere le equazioni parametriche della retta di* $\mathbb{R}^3$ *ottenuta come intersezione dei piani di equazione* $x + y - z = 1$, $x - y + 3z = 0$.

Esercizio 6.27 *Determinare l'equazione del piano di* $\mathbb{R}^3$ *passante per il punto di coordinate* $(-1, 2, 4)$, *e parallelo al piano di equazione* $x + 2y + 3z$.

Esercizio 6.28 *Determinare l'equazione del piano di* $\mathbb{R}^3$ *passante per il punto di coordinate* $(0, 0, 0)$ *e perpendicolare alla retta di equazioni parametriche* $x = 1 + t$, $y = 1 - t$, $z = -3 + 2t$ $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6.29 *Determinare l'equazione del piano di* $\mathbb{R}^3$ *passante per i tre punti di coordinate* $(1, 0, 1)$, $(1, -2, 0)$, *e* $(-1, 2, -1)$.

Esercizio 6.30 *Determinare l'equazione del piano di* $\mathbb{R}^3$ *passante per il punto di coordinate* $(-1, 1, -1)$, *e contenente la retta di equazioni parametriche* $x = 1 + t$, $y = 1 + t$, $z = -3 - 2t$, $t \in \mathbb{R}$.

7 LIMITI

Definizione 7.1 *Successioni.*

Rappresentazione delle successioni.

Esercizio 7.2 *Rappresentare le seguenti successioni*
$a_n = n$
$a_n = \frac{1}{n}$
$a_n = \frac{n-1}{n}$
$a_n = (-1)^n$
$a_n = 3$
$a_n = n^2$
$a_n = -n^2$.

Definizione 7.3 *Limite di successione ad un numero reale. Successione convergente.*

Interpretazione grafica del limite.

Esercizio 7.4 *Verificare, tramite la definizione, che*
$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$.

Esercizio 7.5 *Verificare che non è vero che*
$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1$.

Teorema 7.6 *Il limite di una successione, se esiste, è unico. (dim)*

Osservazione 7.7 *Cambiare un numero finito di termini della successione non modifica il suo limite.*

Definizione 7.8 *Limite di successione a $+\infty$. Limite di successione a $-\infty$. Successione divergente.*

Interpretazione grafica del limite.

Esercizio 7.9 *Verificare, tramite la definizione, che*
$\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$
$\lim_{n\to\infty} -n^2 = -\infty$.

Osservazione 7.10 *Ci sono successioni che non ammettono limite. Ad esempio: $a_n = (-1)^n$.*

Definizione 7.11 *Successione regolare. Successione non regolare.*

Definizione 7.12 *Successione infinita. Successione infinitesima.*

Definizione 7.13 *Successioni limitate superiormente, limitate inferiormente, limitate.*

Teorema 7.14 *Ogni successione convergente è limitata.*

Osservazione 7.15 *L'esempio della successione $a_n = (-1)^n$ mostra che il viceversa non è vero.*

Operazioni con i limiti

Proposizione 7.16 *Operazioni con i limiti finiti.*

Esercizio 7.17 *Calcolare i seguenti limiti*

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$
$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^b} = 0 \ \forall b \in \mathbb{N}$
$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^3+3n+1}{4n^3+5n^2+7} = \frac{5}{4}$
$\lim_{n\to\infty} \frac{-n^2+1}{n^2-2n+1} = -1.$

Proposizione 7.18 *Operazioni con i limiti infiniti.*

Forme indeterminate

$$\infty - \infty \qquad \infty \cdot 0 \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0} \qquad 0^0 \qquad (\pm\infty)^0 \qquad 1^{\pm\infty}$$

Osservazione 7.19 *Dire che un limite è una forma indeterminata non vuole dire che il limite non esiste ma che è necessario uno studio più approfondito.*

Esercizio 7.20 *Calcolare i seguenti limiti*

$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n-1} = 0$
$\lim_{n\to\infty} \frac{8n^4+1}{4n^3+6n^2+2} = \infty$
$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+9n+4}{n^6+1} = 0$
$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - n$
$\lim_{n\to\infty} \frac{1-n}{\sqrt{n}+1}$

Teoremi di confronto

Teorema 7.21 *Teorema della permanenza del segno.*

Teorema 7.22 *Teorema dei carabinieri.*

Teorema 7.23 *Teorema del limite del prodotto di una successione limitata per una infinitesima. Se a_n è limitata e b_n è infinitesima, allora $a_n b_n$ è infinitesima.*

Esercizio 7.24 *Calcolare*

$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 0$
$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2+1} = 0.$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n^3} = 0$

Successione monotone

Definizione 7.25 *Successioni crescenti, decrescenti, strettamente crescenti, strettamente decrescenti, monotone, strettamente monotone.*

Teorema 7.26 *Teorema sulle successioni monotone.*

Osservazione 7.27 *Una successione crescente a_n ammette sempre limite, uguale a $\sup_n a_n$. Tale limite è quindi finito se a_n è limitata superiormente, altrimenti vale $+\infty$.*

Esempio 7.28 *Si può dimostrare che la successione $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ è crescente e limitata, quindi converge. Si dimostra che il suo limite è un numero irrazionale che si denota con e il cui sviluppo decimale comincia con 2,7182818284....*

Esercizio 7.29 *Dimostrare che la successione $a_n = \frac{1}{n}$ è strettamente decrescente e limitata inferiormente. Qual è il suo limite?*

Esercizio 7.30 *Dimostrare che la successione $a_n = \frac{n-1}{n}$ è strettamente crescente e limitata superiormente. Qual è il suo limite?*

Alcuni limiti notevoli

$\lim_{n\to\infty} a^n$
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^b}$
$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$
$a_n \to 0 \Rightarrow \sin a_n \to 0$
$a_n \to 0 \Rightarrow \cos a_n \to 1$
$a_n \to 0 \Rightarrow \frac{\sin a_n}{a_n} \to 1$

Infiniti di ordine crescente

Tabella degli infiniti. Le seguenti successioni sono in ordine crescente di infinito:

$$\log n, n^b, a^n, n!, n^n.$$

Osservazione 7.31 *Il precedente ordinamento degli infiniti continua a valere anche nel caso in cui ciascun elemento sia elevato alla stessa potenza positiva. Esempio:* $\lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^5}{n^5} = 0$.

Osservazione 7.32 *Il seguente ordinamento degli infiniti*

$$\log n, n^b, a^n, n^n$$

continua a valere anche nel caso in cui ciascun elemento sia elevato ad una potenza positiva differente. Esempio: $\lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^{5000000}}{3^{\frac{n}{69897543}}} = 0$.

Definizione 7.33 *Successioni asintoticamente equivalenti. Diremo che 2 successioni a_n, b_n sono asintoticamente equivalenti ($a_n \sim b_n$) se* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

Proposizione 7.34 *Principio di sostituzione. Se $a_n \sim b_n$ e $a_n \to l$, allora anche $b_n \to l$.*

Osservazione 7.35 *Non vale il viceversa: due successioni che hanno lo stesso limite non sono necessariamente asintoticamente equivalenti. Esempio: $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$.*

Esercizio 7.36 *Calcolare i seguenti limiti*

$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0$
$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n}{5n^3} = 0$
$\lim_{n\to\infty} \sin n$ *non esiste*
$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$
$\lim_{n\to\infty} 4^n = \infty$
$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$
$\lim_{n\to\infty} 6^n - 7^n = -\infty$
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7} = 1$
$\lim_{n\to\infty} n - \log n = \infty$
$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$
$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$
$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{7}{n}\right)^n = e^7$
$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$
$\lim_{n\to\infty} n\sin \frac{1}{n} = 1$
$\lim_{n\to\infty} n\sin \frac{4}{n} = 4$
$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n^2+n^3+6^n}{3^n+8^n} = 0$
$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+\sin n-e^n}{\log n^2+n^n} = 0$
$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{2n}}{(e^{2n}-1)} = 1$
$\lim_{n\to\infty}(n - \frac{4}{n})(\sqrt{1+\frac{3}{n}} - 1) = \frac{3}{2}$
$\lim_{n\to\infty} \left[\sin(\sin^4 n)\right]^{\frac{n}{4}} = 0$
$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{2}{n}}{\sin \frac{5}{n}} = \frac{2}{5}$
$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n^2 \sin \frac{1}{n}} = \infty$
$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{3} + \frac{1}{n}\right) \sin \frac{5}{n} = \frac{5}{3}$
$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{n^n}} = \infty$
$\lim_{n\to\infty} \frac{5^n+n^3}{n!} = 0$
$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n^3}{n^3} = 0$
$\lim_{n\to\infty} \log \left(\frac{n+3}{n}\right)^n = 3$
$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+1}{n}\right)^n = \infty$
$\lim_{n\to\infty} n^2\sin \frac{3}{n^2} = 3$
$\lim_{n\to\infty} n^4\cos \frac{3}{n^4} = \infty$
$\lim_{n\to\infty} \log n^3\sin \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$
$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-5}{n}\right)^{3n} = e^{-15}$

Esercizio 7.37 *Calcolare, al variare di* $\alpha \in \mathbb{R}$, *i seguenti limiti*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{n\alpha} \cos^5 n}{n(e^{2n} - 1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^4+n^3} - \sqrt{n^4-n^3}}{n^\alpha + n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n + (-1)^n}{n \log n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\log n^\alpha + \frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$$

Introduzione del concetto di limite per le funzioni.

Definizione 7.38 *Punto isolato. Punto di accumulazione*

Definizione 7.39 *Limite di una funzione.*

Definizione 7.40 *Limite destro e limite sinistro di una funzione.*

Legame tra limiti di funzioni e limiti di successioni.

Teorema 7.41 *TEOREMA PONTE. Le seguenti relazioni sono tra loro equivalenti* ($x_0, l \in \mathbb{R}$)

$$\forall x_n \to x_0, x_n \in A - \{x_0\} \, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x_n) \to l$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in A, 0 \neq |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Interpretazione grafica del limite.

Esempi e proprietà dei limiti di funzione.

Teorema 7.42 *Teoremi di confronto.*

Teorema 7.43 *Operazioni con i limiti di funzioni.*

Teorema 7.44 *Limiti di funzione composte.*

Osservazione 7.45 *Si tratta di un* cambio di variabile *nel limite.*

Esercizio 7.46 *Applicando la definizione di limite, verificare che*
$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-6x+8}{x-2} = -2$
$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$
$\lim_{x\to 0^+} (-\ln x) = \infty$
$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+1}{x^2+1} = 2$

Alcuni limiti notevoli.
$\lim_{x\to\infty} a^x$
$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha$
$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^b} = 0 \ b > 0$
$\lim_{x\to\infty} \frac{x^b}{a^x} = 0 \ b > 0 \ a > 1$

Esercizio 7.47 *Calcolare i seguenti limiti*
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$
$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^b-1}{x} = b$

Esercizio 7.48 *Calcolare i seguenti limiti*

$\lim_{x\to 2} 3x = 6$
$\lim_{x\to 2} x^2 = 4$
$\lim_{x\to \infty} \frac{1}{x} = 0$
$\lim_{x\to \infty} \frac{x+5}{x} = 1$
$\lim_{x\to \infty} \frac{x+1}{3x+2} = \frac{1}{3}.$
$\lim_{x\to \infty} x^2 = \infty$
$\lim_{x\to \infty} -x^7 = -\infty.$
$\lim_{x\to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$
$\lim_{x\to \infty} \frac{1}{x^b} = 0 \ \forall b \in \mathbb{N}$
$\lim_{x\to \infty} \frac{3x^4+3x+1}{5x^4+8x^2+2} = \frac{3}{5}$
$\lim_{x\to \infty} \frac{x^8-1}{x^6+1} = \infty.$
$\lim_{x\to \infty} \sqrt{x-1} - \sqrt{x+2} = 0$
$\lim_{x\to \infty} \frac{x^4}{3x^3+6x^2+2} = \infty$
$\lim_{x\to \infty} \frac{5x^8+9x^4+4}{x^9+1} = 0$
$\lim_{x\to \infty} \sqrt{x+1} - x$
$\lim_{x\to \infty} \frac{1-x}{\sqrt{x}+1}$
$\lim_{x\to \infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^x = e^3$
$\lim_{x\to \infty} \frac{\log x^4}{x} = 0$
$\lim_{x\to \infty} \sin x$ *non esiste*
$\lim_{x\to \infty} \sin(\frac{1}{x}) = 0$
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2$
$\lim_{x\to \infty} \frac{\sin 2x}{x} = 0$
$\lim_{x\to \infty} 5^x = \infty$
$\lim_{x\to \infty} \left(\frac{1}{6}\right)^x = 0$
$\lim_{x\to \infty} 9^x - 7^x = \infty$
$\lim_{x\to \infty} x - \log x = \infty$
$\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^x = e^2$
$\lim_{x\to \infty} \left(1-\frac{1}{3x}\right)^x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$
$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{2x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{e^{5x}-1}{2x} = \frac{5}{2}$
$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x} = 0$
$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^3} = \infty$
$\lim_{x\to 0} \frac{e^{4x}-1}{\sin 2x}$
$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{x} = 2$
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\sin 2x}$
$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin 3x} = \frac{2}{3}$
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\tan 2x}$
$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{x^2}$
$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{e^{3(x-1)^2}-1} = \frac{1}{3}$
$\lim_{x\to 3^+} \frac{(x-3)^4}{(e^{x^2-9}-1)^4} = \frac{1}{6^4}$
$\lim_{x\to 1} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{1-x} = \frac{\pi}{2}$
$\lim_{x\to \infty} \sqrt{x^2+bx+c} - x = \frac{b}{2}$
$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{1-x} = 1$

8 FUNZIONI CONTINUE

Definizione 8.1 *Funzione continua in un punto. Funzione continua in un intervallo.*

Teorema 8.2 *Operazioni con i limiti di funzioni continue.*

Osservazione 8.3 *Molte funzioni elementari sono continue nel loro insieme di definizione: le potenze $f(x) = x^a$, le funzioni esponenziali $f(x) = a^x$, con $a > 0$, le funzioni logaritmiche logaritmi $f(x) = log_a x$, con $a > 0, a \neq 1$, le funzioni trigonometriche $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \tan x$, la funzione valore assoluto $f(x) = |x|$.*

Definizione 8.4 *Discontinuità eliminabile, di prima specie, di seconda specie.*

Esercizio 8.5 *Studiare la continuità delle seguenti funzioni*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+|x|}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} \sin x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Esercizio 8.6 *Determinare a e b in modo tale che la seguente funzione sia continua in* $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a \sin x + b & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Esercizio 8.7 *Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$, in modo tale che la seguente funzione sia continua in* $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x}-1}{x} + 2 & x \neq 0 \\ \alpha & x = 0 \end{cases}$$

Esercizio 8.8 *Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$, in modo tale che la seguente funzione sia continua in* $(-\pi, \infty)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-e^{x^3}}{\sin x^3} & -\sqrt[3]{\pi} < x < 0 \\ -(x+\alpha)^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

Esercizio 8.9 *Studiare la continuità in $\mathbb{R}$ della seguente funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2}-1}{\ln(x^2+1)} & x > 0 \\ \frac{2x^2+x^3}{(x-1)^2} & x \leq 0 \end{cases}$$

Esercizio 8.10 *Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$, in modo tale che la seguente funzione sia continua in* $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & x \leq 0 \\ 1 + e^{-\frac{1}{x^\alpha}} & x > 0 \end{cases}$$

Esercizio 8.11 *Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$, in modo tale che la seguente funzione sia continua in $\mathbb{R}$*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ \frac{\sin(x^{\frac{1}{3}})}{x^\alpha} & x \neq 0 \end{cases}$$

Esercizio 8.12 *Determinare $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}^+$, in modo tale che la seguente funzione sia continua in $\mathbb{R}$*

$$f(x) = \begin{cases} c|x|^\alpha + bx^2 + d & x \leq 0 \\ a & x = 0 \\ \frac{\log(1+x)}{x^2+1} & x \geq 0 \end{cases}$$

Alcuni teoremi sulle funzioni continue

Teorema 8.13 *Teorema di permanenza del segno per funzioni continue.*

Teorema 8.14 *Teorema dell'esistenza degli zeri.*

Osservazione 8.15 *Tale punto in generale non è unico. Sicuramente è unico se f è strettamente monotona.*

Teorema 8.16 *Teorema di Weierstrass.*

Osservazione 8.17 *Se l'intervallo non è chiuso, il risultato è falso. Esempio: $f(x) = x$ in $(0, 1)$.*

Osservazione 8.18 *Se l'intervallo non è limitato, il risultato è falso. Esempio: $f(x) = \frac{1}{x}$ in $[1, \infty)$.*

Osservazione 8.19 *Se f non è continua, il risultato è falso. Esempio: $f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1) \\ 0 & x = 1 \end{cases}$ in $[0, 1]$.*

Teorema 8.20 *Teorema dell'esistenza dei valori intermedi. (dim)*

Teorema 8.21 *Teorema di continuità delle funzioni inverse.*

Osservazione 8.22 *La funzione inversa di una funzione monotona ha la stessa monotonia di f (strettamente crescente se f è strettamente crescente, strettamente decrescente se f è strettamente decrescente).*

9 DERIVATE

Introduzione del concetto di derivata.

Definizione 9.1 *Derivata di una funzione in un punto. Funzione derivabile in un punto. Funzione derivabile in un intervallo. Derivata destra e sinistra di una funzione in un punto.*

Osservazione 9.2 *Una funzione è derivabile in un punto se e solo se esistono finite la derivata destra e la derivata sinistra in tale punto e coincidono.*

Esempio 9.3 *La derivata di una funzione costante è nulla in ogni punto.*

Teorema 9.4 *Se f è una funzione derivabile in x_0, allora è anche continua in x_0. (dim)*

Osservazione 9.5 *Una funzione continua può non essere derivabile. Ad esempio, $f(x) = |x|$ è continua in $\mathbb{R}$ ma non è derivabile in $x = 0$.*

Teorema 9.6 *Operazioni con le derivate.*

Teorema 9.7 *Teorema di derivazione delle funzioni composte.*

Teorema 9.8 *Teorema di derivazione delle funzioni inverse.*

Derivate delle funzioni elementari. Utilizzando la definizione e i teoremi di derivazione, calcolare le derivate delle seguenti funzioni

$f(x) = x^a$
$f(x) = a^x$
$f(x) = \log_a x$
$f(x) = \sin x$
$f(x) = \cos x$
$f(x) = \tan x$
$f(x) = \arcsin x$
$f(x) = \arccos x$
$f(x) = \arctan x$

Significato geometrico della derivata.

Equazione della retta tangente al grafico di una funzione derivabile nel punto $(x_0, f(x_0))$:
$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. (dim)

Esercizio 9.9 *Calcolare la derivata delle seguenti funzioni*

$f(x) = x^2$
$f(x) = \sqrt[5]{x}$
$f(x) = 4x + \sqrt[4]{x+3} + 38$
$f(x) = 2^x$
$f(x) = (7x + 8)^5$
$f(x) = \log_3 x$
$f(x) = \sin 2x$
$f(x) = \cos(3x + 4)^2$
$f(x) = \tan x$
$f(x) = \arcsin 6x$
$f(x) = \arccos 8x$
$f(x) = \arctan 3x$
$f(x) = 2^x + 4x + 5$
$f(x) = \sin(\log x)$
$f(x) = \log(\sin x)$
$f(x) = \sqrt[3]{\sin x}$
$f(x) = \sin(\sqrt[3]{x})$
$f(x) = \ln(\ln x)$
$f(x) = \ln(\ln(\ln x))$
$f(x) = (x + 1)^{x+2}$
$f(x) = \frac{1}{\arctan \frac{1}{\sqrt{x}}}$

Esercizio 9.10 *Calcolare l'equazione della retta tangente alla funzione* $f(x) = 3e^x + 4$ *in* $x = 2$.

Esercizio 9.11 *Determinare gli insiemi di continuità e derivabilità della funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+x) & x \geq 0 \\ |1+x| - 1 & x < 0 \end{cases}$$

Esercizio 9.12 *Determinare gli insiemi di continuità e derivabilità della funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x(x-2)} & x \geq 2 \\ \sqrt{x} - \frac{1}{x-2} & 0 < x < 2 \\ \sqrt{x(x-2)} & x \leq 0 \end{cases}$$

Esercizio 9.13 *Determinare gli insiemi di continuità e derivabilità della funzione*

$$f(x) = |4x - 1 + (5 - 3x)|$$

Esercizio 9.14 *Determinare gli insiemi di continuità e derivabilità della funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Esercizio 9.15 *Determinare gli insiemi di continuità e derivabilità della funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Esercizio 9.16 *Determinare gli insiemi di continuità e derivabilità della funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Esercizio 9.17 *Studiare la derivabilità delle funzioni degli esercizi 4.5, 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, 4.10, 4.11 e 4.12.*

10 APPLICAZIONI DELLE DERIVATE

Applicazioni delle derivate per il calcolo dei limiti

Teorema 10.1 *Teorema di L'Hôpital.*

Osservazione 10.2 *Il teorema di L'Hôpital non fornisce informazioni quando* $\lim \frac{f'}{g'}$ *non esiste. In tal caso il limite* $\lim \frac{f}{g}$ *potrebbe esistere o non esistere.*

Esempio. $f(x) = x - \sin x$, $g(x) = x$, *per* $x \to \infty$.

Esempio. $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, $g(x) = x$, *per* $x \to 0^+$.

Esempio. $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $g(x) = x$, *per* $x \to 0^+$.

Osservazione 10.3 *Si può iterare il procedimento più volte.*

Esempio. $f(x) = e^x$, $g(x) = x^3$, *per* $x \to \infty$.

Esercizio 10.4 *Calcolare i seguenti limiti*

$\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x}$
$\lim_{x\to 3} \frac{x-1}{x}$ *(è una forma indeterminata?)*
$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^3}$
$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\log x}$
$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x + x\sin x}{x^2}$
$\lim_{x\to 0} \frac{e^{5x}-1}{\sin 4x}$
$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+4x)}{3x}$
$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-1}{\cos\sqrt{x}-1}$
$\lim_{x\to 0} \frac{x+1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)} = \frac{1}{2}$
$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x} = 1$
$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (1+2cos^2 x)^{\tan^2 x} = e^2$

Esercizio 10.5 *Data la funzione* $f(x) = \begin{cases} x^4+3x^3 & x \geq 0 \\ \frac{ln(1+x^2)-x^2}{\sqrt[3]{x}} & x < 0 \end{cases}$

Stabilire se f *è continua in* $\mathbb{R}$.
Calcolare la derivata sinistra e destra di f *in* 0.
Stabilire se f *è derivabile in* $\mathbb{R}$.

Applicazioni delle derivate per lo studio delle proprietà di funzioni

Definizione 10.6 *Massimo relativo. Minimo relativo.*

Definizione 10.7 *Massimo assoluto. Minimo assoluto.*

Osservazione 10.8 *Il massimo assoluto di f, se esiste, è unico. Il punto di massimo può invece non essere unico.*

Teorema 10.9 *Teorema di Fermat. (dim)*

Significato geometrico del teorema di Fermat.

Osservazione 10.10 *Se una funzione è continua in un intervallo chiuso e limitato, i punti di massimo e minimo assoluti vanno ricercati tra: 1. i punti interni dove si annulla la derivata; 2. gli estremi dell'intervallo; 3. gli eventuali punti di non derivabilità.*

Teorema 10.11 *Teorema di Rolle. (dim)*

Significato geometrico del Teorema di Rolle.

Teorema 10.12 *Teorema di Lagrange. (dim)*

Significato geometrico del Teorema di Lagrange.

Osservazione 10.13 *La continuità agli estremi dell'intervallo è una ipotesi indispensabile. Esempio:* $f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1) \\ 0 & x = 1 \end{cases}$ *in* $[0,1]$.

Teorema 10.14 *Criterio di monotonia.*

Teorema 10.15 *Caratterizzazione delle funzioni costanti in un intervallo.*

Teorema 10.16 *Criterio di stretta monotonia.*

Osservazione 10.17 *Una funzione strettamente monotona può avere derivata nulla in qualche punto. Esempio: la funzione $f(x) = x^3$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$, ma la sua derivata si annulla in $x = 0$.*

Definizione 10.18 *Funzione convessa. Funzione concava.*

Teorema 10.19 *Criterio di convessità.*

Definizione 10.20 *Punto di flesso.*

Osservazione 10.21 *In un punto di flesso il grafico di f attraversa la retta tangente.*

Osservazione 10.22 *Se f è derivabile due volte, allora in un punto di flesso la derivata seconda si annulla.*

Teorema 10.23 *Criterio per i punti di massimo e di minimo (valido per funzioni che ammettono derivata seconda).*

Schema per lo studio di un grafico di funzione.

Esercizio 10.24 *Studiare le seguenti funzioni f*

$f(x) = x^3$
$f(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = e^x$
$f(x) = \ln x$
$f(x) = \sin x$
$f(x) = \cos x$
$f(x) = \tan x$
$f(x) = \arcsin x$
$f(x) = \arccos x$
$f(x) = \arctan x$
$f(x) = x^3 - 3x^2$
$f(x) = \frac{x^2+6x+6}{x+1}$
$f(x) = \frac{x^2-x}{x-2}$
$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$
$f(x) = \frac{x}{x^2+3}$
$f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2}$
$f(x) = xe^{-2x^2}$
$f(x) = xe^x$
$f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$
$f(x) = \frac{e^x}{e^x-1}$
$f(x) = \frac{e^x-1}{e^x}$
$f(x) = e^{\frac{|x-1|}{x}}$
$f(x) = xe^{\frac{|x-1|}{x}}$
$f(x) = \sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ *(seno iperbolico)*
$f(x) = \cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ *(coseno iperbolico)*
$f(x) = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ *(tangente iperbolica)*
$f(x) = x \log x$
$f(x) = x \log^2 x$

$f(x) = x^x$
$f(x) = \frac{x}{|x|+|1-x|}$
$f(x) = \sqrt{2-x} - \sqrt{x}$
$f(x) = \sin^2 x - \sin x$
specificandone dominio; segno e zeri di f; limiti agli estremi degli intervalli costituenti il dominio; asintoti; continuità, esistenza e calcolo delle derivata prima f'; segno e zeri di f'; intervalli di monotonia di f e punti stazionari; massimi e minimi relativi; esistenza e calcolo della derivata seconda f'': intervalli di concavità e convessità e punti di flesso; grafico di f.

Esercizio 10.25 *Determinare massimo e minimo della funzione $f(x) = \sin^2 x + \sqrt{2}\cos x$ in $[0, 2\pi]$.*

Esercizio 10.26 *Determinare massimo e minimo della funzione $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x$ in $[0, 2\pi]$.*

Applicazione delle derivate per l'approssimazione di una funzione regolare in un intorno di un punto tramite polinomi.

Teorema 10.27 *La formula di Taylor.*

Definizione 10.28 *Formula di Mac Laurin.*

Esercizio 10.29 *Sviluppo delle funzioni elementari.*

Teorema 10.30 *Condizioni sufficienti per massimi e minimi.*

Uso della formula nel calcolo dei limiti.

Esercizio 10.31 *Calcolare i seguenti limiti*
$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x\sin x}\right)$
$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{-\frac{1}{x^2}}$
$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x + x\sin x}{x^2}$

11 CALCOLO INTEGRALE PER LE FUNZIONI DI UNA VARIABILE

Introduzione.

Definizione 1.1 *Partizione. Somme integrali.*

Definizione 1.2 *Integrale definito di una funzione limitata f in un intervallo $[a, b]$.*

Osservazione 1.3 *Interpretazione geometrica dell'integrale definito.*

Proprietà dell'integrale.

Teorema 1.4 *Additività dell'integrale rispetto all'intervallo.*

Teorema 1.5 *Linearità dell'integrale.*

Teorema 1.6 *Confronto tra integrali.*

Teorema 1.7 *Teorema della media integrale. (dim)*

Teorema 1.8 *Integrabilità delle funzioni continue.*

Definizione 1.9 *Funzione integrale.*

Teorema 1.10 *Il teorema fondamentale del calcolo integrale. (dim)*

Definizione 1.11 *Primitiva.*

Teorema 1.12 *Caratterizzazione delle primitive di una funzione in un intervallo.*

Teorema 1.13 *Formula fondamentale del calcolo integrale. (dim)*

Definizione 1.14 *Integrale indefinito.*

Osservazione 1.15 *L'integrale definito $\int_a^b f\,dx$ è un numero reale. L'integrale indefinito $\int f\,dx$ è un insieme di funzioni.*

Tabella degli integrali indefiniti.
Integrazione per decomposizione in somma.
Integrazione delle funzioni razionali.
Integrazione per parti.
Integrazione per sostituzione.
Formule di razionalizzazione tramite particolari sostituzioni ($R(y)$ è una funzione razionale fratta)

$\int R(e^x)\,dx$ con $t = e^x$
$\int R(\sin x)\cos x\,dx$ con $t = \sin x$
$\int R(\cos x)\sin x\,dx$ con $t = \cos x$
$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})\,dx$ con $x = a\sin t$
$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ con $t = \tan\frac{x}{2}$
$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \tan x)\,dx$ con $t = \tan x$

Esercizio 1.16 *Calcolare i seguenti integrali*

$\int_1^2 (x^5 + 3x + 6)\,dx$
$\int_0^1 (x+1)^4\,dx$
$\int \cos x \sin x\,dx$
$\int \tan x\,dx$
$\int \frac{x}{x+1}\,dx$
$\int \tan^2 x\,dx$
$\int \frac{x^5 - 3x^4 + x + 3}{x^2 - 1}\,dx$
$\int \frac{x+7}{x^2 - x - 2}\,dx$
$\int \frac{x}{x^2 + 2x + 1}\,dx$
$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 5}\,dx$
$\int \frac{x}{x^2 + x + 1}\,dx$
$\int x e^x\,dx$
$\int \log x\,dx$
$\int \cos^2 x\,dx$
$\int x\cos x\,dx$
$\int x^2 \cos x\,dx$
$\int e^x \sin x\,dx$
$\int \tan 3x\,dx$

$\int x^4 \log x \, dx$
$\int e^{3x} \sin 2x \, dx$
$\int \frac{1}{5+x^2} \, dx$
$\int \sin^2 x \, dx$
$\int \sin^2 x \cos x \, dx$

Calcolo di aree di figure piane.
Formula per il calcolo dell'area.

Esercizio 1.17 *Calcolare l'area di un cerchio di raggio r.*

Esercizio 1.18 *Calcolare l'area della regione piana racchiusa dall'ellisse di equazione* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Esercizio 1.19 *Calcolare l'area della regione piana compresa fra le 2 parabole di equazioni* $y^2 = 9x$ *e* $x^2 = 9y$.

Integrali impropri.

Definizione 1.20 *Integrale improprio in $[a, b)$ di una funzione f non negativa, continua in $[a, b)$ e non limitata in un intorno sinistro di b.*

Definizione 1.21 *Integrale improprio in $(a, b]$ di una funzione f non negativa, continua in $(a, b]$ e non limitata in un intorno destro di a.*

Esercizio 1.22 *Studio dell'integrale improprio* $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$

Esercizio 1.23 *Studio dell'integrale improprio* $\int_0^1 \frac{1}{x^p} \, dx$

Definizione 1.24 *Integrale improprio in $[a, +\infty)$ di una funzione continua e non negativa.*

Definizione 1.25 *Integrale improprio in $(-\infty, b]$ di una funzione continua e non negativa.*

Esercizio 1.26 *Studio dell'integrale improprio* $\int_1^\infty \frac{1}{x^3} \, dx$.

Esercizio 1.27 *Studio dell'integrale improprio* $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} \, dx$.