

## 1 I NUMERI E LE FUNZIONI REALI

Introduzione al corso.

Cenni di teoria degli insiemi: unione, intersezione, differenza, prodotto cartesiano.

Notazione dei quantificatori.

Cenni sui numeri naturali, interi relativi, razionali, reali  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ .

Definizione assiomatica dei numeri reali.

**Proposizione 1.1** *Non esiste alcun numero razionale  $q$  tale che  $q^2 = 2$ . (dim)*

**Osservazione 1.2**  $\mathbb{Q}$  non soddisfa l'assioma di completezza.

**Intervalli.**

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$$

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$$

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$$

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$$

$$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R}, x > a\}$$

$$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$$

$$(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R}, x < b\}$$

$$(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\}.$$

**Esercizio 1.3** Sia  $A = \{x \in \mathbb{R}, 2 \leq x \leq 6\}$  e  $B = \{x \in \mathbb{N}, 3 < x \leq 7\}$ . Determinare  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A - B$ ,  $B - A$ .

**Esercizio 1.4** Sia  $A = \{x \in \mathbb{N}, 2 \leq x \leq 6\}$  e  $B = \{x \in \mathbb{R}, 3 \leq x \leq 7\}$ . Determinare  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A - B$ ,  $B - A$ .

**Esercizio 1.5** Sia  $A = \{x \in \mathbb{R}, 2 \leq x \leq 6\}$  e  $B = \{x \in \mathbb{R}, 3 < x \leq 7\}$ . Determinare  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A - B$ ,  $B - A$ .

**Esercizio 1.6** Sia  $A = \{x \in \mathbb{N}, 2 \leq x \leq 6\}$  e  $B = \{x \in \mathbb{N}, 3 \leq x \leq 7\}$ . Determinare  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A - B$ ,  $B - A$ .

**Esercizio 1.7** Sia  $A = \{x \in \mathbb{N}, x \leq 5\}$  e  $B = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 3\}$ . Determinare  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A - B$ ,  $B - A$ .

**Esercizio 1.8** Sia  $A = \{x \in \mathbb{N}, x \leq 5\}$  e  $B = \{x \in \mathbb{N}, x \geq 3\}$ . Determinare  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A - B$ ,  $B - A$ .

**Esercizio 1.9** Sia  $A = \{x \in \mathbb{R}, x \leq 5\}$  e  $B = \{x \in \mathbb{R}, x > 3\}$ . Determinare  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A - B$ ,  $B - A$ .

**Esercizio 1.10** Sia  $A = \{x \in \mathbb{R}, x \leq 5\}$  e  $B = \{x \in \mathbb{N}, x > 3\}$ . Determinare  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A - B$ ,  $B - A$ .

## Funzioni e rappresentazione cartesiana

**Definizione 1.11** *Funzione, dominio, codominio, grafico.*

**Definizione 1.12** *Funzione iniettiva, suriettiva, biettiva*

**Definizione 1.13** *Funzione invertibile. Funzione inversa.*

**Definizione 1.14** *Funzioni crescenti e decrescenti, strettamente decrescenti e strettamente crescenti. Funzioni monotone.*

**Esercizio 1.15** *Studio delle funzioni  $f(x) = 3$ ,  $f(x) = 2x + 1$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $f(x) = x^2$ ,  $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ 1 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 2 & x \leq 1 \\ 4 & x > 1 \end{cases}$ .*

**Definizione 1.16** *Operazioni con le funzioni.*

**Definizione 1.17** *Funzione composta.*

**Esercizio 1.18** *Siano  $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = 2x$ . Determinare  $f^{-1}$ ,  $g^{-1}$ ,  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $f \cdot g$ ,  $g \cdot f$ ,  $\frac{f}{g}$ ,  $\frac{g}{f}$ ,  $f \circ g$  e  $f \circ f$*

**Esercizio 1.19** *Siano  $f(x) = x + 4$ ,  $g(x) = x^5$ . Determinare  $f^{-1}$ ,  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $f \cdot g$ ,  $g \cdot f$ ,  $\frac{f}{g}$ ,  $\frac{g}{f}$ ,  $f \circ g$  e  $f \circ f$*

**Definizione 1.20** *Funzioni lineari. Principali proprietà. Grafici.*

**Definizione 1.21** *Funzione valore assoluto. Principali proprietà. Grafici.*

**Proposizione 1.22** *Per ogni numero reale  $r \geq 0$ , risulta*

$$|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r$$

$$|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r.$$

**Proposizione 1.23** *Disuguaglianza triangolare.*

**Esercizio 1.24** *Risolvere*

$$|x| = 4, |x| \leq 3, |x + 2| \leq 3, x^2 + 2|x| - 3 < 0, x^2 - 2|x| - 3 > 0, |x^2 + 1| \geq 2$$

**Definizione 1.25** *Le funzioni potenza. Principali proprietà. Grafici.*

**Definizione 1.26** *Funzioni esponenziali. Principali proprietà. Grafici.*

**Definizione 1.27** *Logaritmi. Principali proprietà. Grafici.*

**Definizione 1.28** *Funzioni trigonometriche. Principali proprietà. Grafici.*

**Definizione 1.29** *Funzioni trigonometriche inverse. Principali proprietà. Grafici.*

**Esercizio 1.30** *Risolvere*

$$\ln_5 x > 2, \ln_3 x < \frac{1}{2}, \ln_{\frac{1}{7}} x < \sqrt{2}, \ln(1 + \frac{1}{x}) \leq 1, 2^x > 4, 4^x > 2, e^{|x-1|} < e^x, (\frac{1}{3})^{(1-12x)x} < 3, (\frac{1}{3})^x > 9, \sin x = 5, \sin x = 1, \sin x = \frac{1}{2}, \cos x > 3, \cos x > \frac{1}{2}, \cos x > -2, \cos x < -2, \tan x = 1, \tan x > 0, \arcsin x > 0, \arccos x < 0, \arctan x < 0, \arctan x < 4.$$

**Esercizio 1.31** *Determinare il campo di esistenza delle seguenti funzioni  $\sqrt{x+1}$ ,  $\sqrt[3]{x+1}$ ,*

$$\sqrt{2-x^2}, \sqrt[4]{\frac{x+1}{6-x}}, 3^{2-x^2}, 6^{\cos x}, \ln \sqrt{x}, \sqrt{\ln x}, \sqrt{\tan x}, \cos(\sqrt{x}), \tan(\sqrt{x}), \cos(\sqrt{\tan x}), \sqrt[4]{3-\ln_2 x},$$

$$\ln \sqrt{\frac{x+1}{x}}, 3^{\ln x}, \sqrt{\ln_{\frac{1}{3}}(2x-1)}, (\ln_5 x - 5)^{-\pi}, \arcsin(\ln x), \ln_x 6, \ln_x x, \ln_x(\ln x), \arcsin(2^x),$$

$$x^x, \frac{\sin \ln x}{\ln x}, \ln_x(x^2 + 4x), \ln_x \sqrt{\frac{x+2}{x-2}}, \ln_x(x^2 - 3x + 2), \arccos(\frac{x-1}{x+3}), \arctan(\frac{\cos x}{x^2+3}), \cos(\frac{\arcsin x}{x^3}).$$

## 2 COMPLEMENTI AI NUMERI REALI

**Definizione 2.1** Massimo e minimo di un insieme  $A$  di numeri reali.

**Osservazione 2.2** Il massimo di un insieme, se esiste, è unico. (dim)

**Definizione 2.3** Maggiorante e minorante di un insieme.

**Definizione 2.4** Insiemi limitati superiormente, limitati inferiormente, limitati.

**Proposizione 2.5** Un insieme  $A$  è limitato se e soltanto se esiste  $M$  tale che  $|a| < M$ ,  $\forall a \in A$ .

**Osservazione 2.6** Ci sono insiemi limitati superiormente che non ammettono massimo.

**Definizione 2.7** Estremo superiore. Estremo inferiore.

**Teorema 2.8** Teorema di esistenza dell'estremo superiore. (dim)

**Osservazione 2.9** Il massimo di un insieme, se esiste, è anche estremo superiore.

**Definizione 2.10** Se  $A$  non è limitato superiormente, definiamo  $\sup A = \infty$ . Se  $A$  non è limitato inferiormente, definiamo  $\inf A = -\infty$ .

**Osservazione 2.11** L'esistenza dell'estremo superiore di un insieme limitato superiormente non vale in  $\mathbb{Q}$ .

**Esercizio 2.12** Calcolare estremo superiore e inferiore (specificando se si tratta di massimo e minimo) dei seguenti insiemi

$$A = \left\{ \frac{n-1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$B = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$C = \left\{ \frac{5n+1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 \leq 0\}$$

$$E = \{x \in \mathbb{R}, x^2 - 4 > 0\}$$

$$F = \{x \in \mathbb{R}, |x^2 - 9x + 7| < 0\}$$

$$G = \{x \in \mathbb{R}, \sin x > \cos x\}$$

$$H = \{x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 - 1} > x - 3\}$$

$$I = \{x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 - 1} > x + 3\}$$

$$L = \left\{ x \in \mathbb{R}, \log_{\frac{1}{3}}(\log_2 x) > 0 \right\}$$

$$M = \{x \in \mathbb{R}, 2x - 1 > \sqrt{4x + 1}\}$$

$$N = \{x \in \mathbb{R}, \sqrt{x + 2} > \sqrt{4 - x}\}$$

$$O = \{x \in \mathbb{R}, |x^2 - 9x + 7| < 7\}$$

## 3 MATRICI E DETERMINANTI

Introduzione.

**Definizione 3.1** Matrice.

**Definizione 3.2** Ordine di una matrice. Matrice quadrata. Matrice rettangolare.

Operazioni tra matrici.

**Definizione 3.3** *Determinante.*

**Proposizione 3.4** *Sviluppo di un determinante del secondo ordine.*

**Proposizione 3.5** *Sviluppo di un determinante del terzo ordine (regola di Sarrus).*

Principali proprietà di un determinante.

**Definizione 3.6** *Complemento algebrico.*

**Teorema 3.7** *Primo Teorema di Laplace.*

**Teorema 3.8** *Secondo Teorema di Laplace. (dim)*

Ulteriori proprietà di un determinante.

**Definizione 3.9** *Matrice inversa.*

**Definizione 3.10** *Matrice trasposta.*

**Definizione 3.11** *Matrice aggiunta.*

**Teorema 3.12** *Teorema della matrice inversa. (dim)*

**Esercizio 3.13** *Calcolare il determinante delle seguenti matrici*  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ,  
 $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Esercizio 3.14** *Determinare la matrice inversa  $A^{-1}$  delle seguente matrice  $A = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ .*

*Verificare che  $A^{-1}A = I$  e  $AA^{-1} = I$*

**Esercizio 3.15** *Determinare la matrice inversa  $A^{-1}$  delle seguente matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ .*

*Verificare che  $A^{-1}A = I$  e  $AA^{-1} = I$*

## 4 SISTEMI LINEARI

Introduzione.

**Definizione 4.1** *Sistema lineare.*

**Definizione 4.2** *Coefficienti. Termini noti.*

**Definizione 4.3** *Matrice del sistema. Matrice completa.*

**Definizione 4.4** *Soluzione del sistema.*

**Definizione 4.5** *Sistema compatibile. Sistema incompatibile.*

**Teorema 4.6** *Regola di Cramer. (dim)*

**Esercizio 4.7** *Risolvere il seguente sistema  $x - 2y + 3z = 1$ ,  $2x + y - 4z = 2$ ,  $-3x + 4y + z = 2$ .*

**Esercizio 4.8** *Risolvere il seguente sistema  $2x + 3y + 4z = 5$ ,  $x + y + z = 2$ ,  $4x - 5y + 2z = 3$ .*

**Definizione 4.9** *Minore di una matrice.*

**Definizione 4.10** *Caratteristica o rango di una matrice.*

**Teorema 4.11** *Teorema di Rouché-Capelli.*

Sistemi omogenei.

**Definizione 4.12** *Autovalori.*

**Definizione 4.13** *Autovettori.*

**Teorema 4.14** . *Sia  $A$  una matrice simmetrica. Due autovettori corrispondenti ad autovalori diversi sono fra loro ortogonali.*

**Esercizio 4.15** *Risolvere il seguente sistema  $3x - 3y - z = 1$ ,  $4x - 5y + 2z = 2$ .*

**Esercizio 4.16** *Risolvere il seguente sistema  $3x - 3y - z = 1$ ,  $2x - z = 1$ ,  $4x - 5y + 2z = 2$ .*

**Esercizio 4.17** *Risolvere il seguente sistema  $2x - y + 3z + t = 0$ ,  $4x - 2y + 2z + 3t = 1$ .*

**Esercizio 4.18** *Risolvere il seguente sistema  $2x - y + z - 3t = 0$ ,  $x + y + 2z - 2t = 3$ ,  $-x + 2y + z + t = 1$ .*

**Esercizio 4.19** *Risolvere il seguente sistema  $2x - y = 3$ ,  $3x + 5y = 1$ ,  $-x - 6y = 2$ ,  $5x + 4y = 4$ .*

**Esercizio 4.20** *Determinare per quali valori del parametro  $a$  il seguente sistema risulta compatibile e per quei valori calcolare le soluzioni  $3x - 2y = 5$ ,  $x + 5y = 13$ ,  $-2x + y = a$ .*

**Esercizio 4.21** *Determinare per quali valori del parametro  $a$  il seguente sistema risulta compatibile e per quei valori calcolare le soluzioni  $2x - y = 1$ ,  $ax + 3y = 2$ ,  $3x - 4y = a$ .*

**Esercizio 4.22** *Determinare per quali valori del parametro  $a$  il seguente sistema risulta compatibile e per quei valori calcolare le soluzioni  $3x + ay - z = 3$ ,  $x + 5y + 3z = -9$ ,  $2x + y - az = a$ .*

**Esercizio 4.23** *Determinare per quali valori del parametro  $a$  il seguente sistema risulta compatibile e per quei valori calcolare le soluzioni  $x - y + 3z = 3$ ,  $3x - y + 2z = 8$ ,  $2ax + 7z = 2 + a$ .*

**Esercizio 4.24** *Determinare gli autovalori e autovettori della matrice simmetrica*

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 5 ELEMENTI DI CALCOLO VETTORIALE

Introduzione.

**Definizione 5.1** *Spazio vettoriale.*

**Definizione 5.2** *Prodotto scalare.*

**Proposizione 5.3** *Proprietà del prodotto scalare. (dim)*

**Proposizione 5.4** *Teorema di rappresentazione del prodotto scalare. (dim)*

**Proposizione 5.5** *Ortogonalità fra vettori.*

**Proposizione 5.6** *Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.*

**Proposizione 5.7** *Disuguaglianza triangolare.*

## 6 GEOMETRIA ANALITICA

Introduzione.

ELEMENTI DI GEOMETRIA ANALITICA DEL PIANO

**Definizione 6.1** *Coordinate cartesiane di un punto.*

**Definizione 6.2** *Distanza di due punti(dim).*

**Proposizione 6.3** *Punto medio di un segmento. (dim)*

**La retta.**

**Proposizione 6.4** *Equazione generale di una retta.(dim)*

Forme particolari dell'equazione di una retta.

**Proposizione 6.5** *Equazione della retta passante per un punto e di dato coefficiente angolare.(dim)*

**Proposizione 6.6** *Equazione della retta passante per due punti.(dim)*

Intersezione di due rette.

Condizioni di parallelismo e di perpendicolarità di due rette.

**Proposizione 6.7** *Equazione della retta passante per un punto e parallela ad una retta data.(dim)*

**Proposizione 6.8** *Equazione della retta passante per un punto e perpendicolare ad una retta data.(dim)*

**Definizione 6.9** *Fascio di rette.*

**Trasformazioni delle coordinate.**

**Definizione 6.10** *Traslazione degli assi.*

**Definizione 6.11** *Rotazione degli assi.*

**Le coniche.**

**Definizione 6.12** *Circonferenza.*

**Proposizione 6.13** *Equazione della circonferenza. (dim)*

**Definizione 6.14** *Ellisse.*

**Proposizione 6.15** *Equazione dell'ellisse. (dim)*

**Definizione 6.16** *Iperbole.*

**Proposizione 6.17** *Equazione dell'iperbole. (dim)*

**Definizione 6.18** *Parabola.*

**Proposizione 6.19** *Equazione della parabola. (dim)*

Intersezioni retta e conica.

Retta tangente ad una conica.

Le coniche come sezioni piane del cono.

Equazione generale delle coniche e loro classificazione.

**Esercizio 6.20** *Dato il fascio di rette individuato da  $4x + y - 3 = 0$  e da  $2x + y - 7 = 0$  determinare*

1) *la retta  $t$  del fascio perpendicolare alla retta  $r$  di equazione  $2x + 3y + 10 = 0$ ;*

2) *Il punto d'intersezione di  $r$  e di  $t$ ;*

3) *la retta del fascio parallela alla retta  $r$ .*

**Esercizio 6.21** *Data la funzione  $y = |x^2 + 4x| - (x^2 + 2x)$  determinarne il grafico e le tangenti negli eventuali punti angolosi.*

**Esercizio 6.22** *Preso la retta di equazione  $y = mx + 4$ , determinare  $m$  in modo che la retta risulti tangente al cerchio  $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$ .*

**Esercizio 6.23** *Preso la retta di equazione  $y = x + p$ , determinare  $p$  in modo che la retta risulti tangente all'ellisse  $4x^2 + y^2 = 16$ .*

**Esercizio 6.24** *Determinare le rette tangenti all'iperbole  $x^2 - 4y^2 = 16$  uscenti dal punto  $(2, 0)$ .*

**Esercizio 6.25** *Classificare le seguenti coniche*

$$x^2 + 5y^2 + 3x - 1 = 0$$

$$2x^2 + y^2 + 3x - 4y - 1 = 0$$

$$x^2 - 3y^2 + 3x + 2y - 1 = 0$$

$$x^2 + 4y^2 + 4xy + 3x + 2y + 3 = 0$$

## ELEMENTI DI GEOMETRIA A TRE O PIÙ DIMENSIONI

Lo spazio euclideo  $\mathbb{R}^n$ .

Elementi di geometria analitica in  $\mathbb{R}^n$ .

Equazioni della retta in  $\mathbb{R}^3$ .

Equazioni del piano in  $\mathbb{R}^3$ .

Condizioni di parallelismo e perpendicolarità di due rette.

Condizioni di parallelismo e perpendicolarità di due piani.

Condizioni di parallelismo e perpendicolarità tra retta e piano.

**Esercizio 6.26** *Scrivere le equazioni parametriche della retta di  $\mathbb{R}^3$  ottenuta come intersezione dei piani di equazione  $x + y - z = 1$ ,  $x - y + 3z = 0$ .*

**Esercizio 6.27** *Determinare l'equazione del piano di  $\mathbb{R}^3$  passante per il punto di coordinate  $(-1, 2, 4)$ , e parallelo al piano di equazione  $x + 2y + 3z$ .*

**Esercizio 6.28** *Determinare l'equazione del piano di  $\mathbb{R}^3$  passante per il punto di coordinate  $(0, 0, 0)$  e perpendicolare alla retta di equazioni parametriche  $x = 1 + t$ ,  $y = 1 - t$ ,  $z = -3 + 2t$   $t \in \mathbb{R}$ .*

**Esercizio 6.29** *Determinare l'equazione del piano di  $\mathbb{R}^3$  passante per i tre punti di coordinate  $(1, 0, 1)$ ,  $(1, -2, 0)$ , e  $(-1, 2, -1)$ .*

**Esercizio 6.30** *Determinare l'equazione del piano di  $\mathbb{R}^3$  passante per il punto di coordinate  $(-1, 1, -1)$ , e contenente la retta di equazioni parametriche  $x = 1 + t$ ,  $y = 1 + t$ ,  $z = -3 - 2t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .*

## 7 LIMITI

**Definizione 7.1** *Successioni.*

Rappresentazione delle successioni.

**Esercizio 7.2** *Rappresentare le seguenti successioni*

$$a_n = n$$

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$a_n = \frac{n-1}{n}$$

$$a_n = (-1)^n$$

$$a_n = 3$$

$$a_n = n^2$$

$$a_n = -n^2.$$

**Definizione 7.3** *Limite di successione ad un numero reale. Successione convergente.*

Interpretazione grafica del limite.

**Esercizio 7.4** *Verificare, tramite la definizione, che*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1.$$

**Esercizio 7.5** *Verificare che non è vero che*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1.$$



**Teorema 7.6** *Il limite di una successione, se esiste, è unico. (dim)*

**Osservazione 7.7** *Cambiare un numero finito di termini della successione non modifica il suo limite.*

**Definizione 7.8** *Limite di successione a  $+\infty$ . Limite di successione a  $-\infty$ . Successione divergente.*

Interpretazione grafica del limite.

**Esercizio 7.9** *Verificare, tramite la definizione, che*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} -n^2 = -\infty.$$

**Osservazione 7.10** *Ci sono successioni che non ammettono limite. Ad esempio:  $a_n = (-1)^n$ .*

**Definizione 7.11** *Successione regolare. Successione non regolare.*

**Definizione 7.12** *Successione infinita. Successione infinitesima.*

**Definizione 7.13** *Successioni limitate superiormente, limitate inferiormente, limitate.*

**Teorema 7.14** *Ogni successione convergente è limitata.*

**Osservazione 7.15** *L'esempio della successione  $a_n = (-1)^n$  mostra che il viceversa non è vero.*

## Operazioni con i limiti

**Proposizione 7.16** *Operazioni con i limiti finiti.*

**Esercizio 7.17** *Calcolare i seguenti limiti*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^b} = 0 \quad \forall b \in \mathbb{N}$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 + 3n + 1}{4n^3 + 5n^2 + 7} = \frac{5}{4}$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2 + 1}{n^2 - 2n + 1} = -1.$$

**Proposizione 7.18** *Operazioni con i limiti infiniti.*

## Forme indeterminate

$$\infty - \infty \quad \infty \cdot 0 \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \frac{0}{0} \quad 0^0 \quad (\pm\infty)^0 \quad 1^{\pm\infty}$$

**Osservazione 7.19** *Dire che un limite è una forma indeterminata non vuole dire che il limite non esiste ma che è necessario uno studio più approfondito.*

**Esercizio 7.20** Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n-1} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^4+1}{4n^3+6n^2+2} = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2+9n+4}{n^6+1} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n}{\sqrt{n+1}}$$

### Teoremi di confronto

**Teorema 7.21** Teorema della permanenza del segno.

**Teorema 7.22** Teorema dei carabinieri.

**Teorema 7.23** Teorema del limite del prodotto di una successione limitata per una infinitesima. Se  $a_n$  è limitata e  $b_n$  è infinitesima, allora  $a_n b_n$  è infinitesima.

**Esercizio 7.24** Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{n^2+1} = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n^3} = 0$$

### Successione monotone

**Definizione 7.25** Successioni crescenti, decrescenti, strettamente crescenti, strettamente decrescenti, monotone, strettamente monotone.

**Teorema 7.26** Teorema sulle successioni monotone.

**Osservazione 7.27** Una successione crescente  $a_n$  ammette sempre limite, uguale a  $\sup_n a_n$ . Tale limite è quindi finito se  $a_n$  è limitata superiormente, altrimenti vale  $+\infty$ .

**Esempio 7.28** Si può dimostrare che la successione  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  è crescente e limitata, quindi converge. Si dimostra che il suo limite è un numero irrazionale che si denota con  $e$  e il cui sviluppo decimale comincia con 2,7182818284....

**Esercizio 7.29** Dimostrare che la successione  $a_n = \frac{1}{n}$  è strettamente decrescente e limitata inferiormente. Qual è il suo limite?

**Esercizio 7.30** Dimostrare che la successione  $a_n = \frac{n-1}{n}$  è strettamente crescente e limitata superiormente. Qual è il suo limite?

### Alcuni limiti notevoli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^b}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

$$a_n \rightarrow 0 \Rightarrow \sin a_n \rightarrow 0$$

$$a_n \rightarrow 0 \Rightarrow \cos a_n \rightarrow 1$$

$$a_n \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\sin a_n}{a_n} \rightarrow 1$$

## Infiniti di ordine crescente

**Tabella degli infiniti.** Le seguenti successioni sono in ordine crescente di infinito:

$$\log n, n^b, a^n, n!, n^n.$$

**Osservazione 7.31** *Il precedente ordinamento degli infiniti continua a valere anche nel caso in cui ciascun elemento sia elevato alla stessa potenza positiva. Esempio:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log n)^5}{n^5} = 0$ .*

**Osservazione 7.32** *Il seguente ordinamento degli infiniti*

$$\log n, n^b, a^n, n^n$$

*continua a valere anche nel caso in cui ciascun elemento sia elevato ad una potenza positiva differente. Esempio:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log n)^{5000000}}{3^{69897543} n^5} = 0$ .*

**Definizione 7.33** *Successioni asintoticamente equivalenti. Diremo che 2 successioni  $a_n, b_n$  sono asintoticamente equivalenti ( $a_n \sim b_n$ ) se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ .*

**Proposizione 7.34** *Principio di sostituzione. Se  $a_n \sim b_n$  e  $a_n \rightarrow l$ , allora anche  $b_n \rightarrow l$ .*

**Osservazione 7.35** *Non vale il viceversa: due successioni che hanno lo stesso limite non sono necessariamente asintoticamente equivalenti. Esempio:  $a_n = \frac{1}{n}$ ,  $b_n = \frac{1}{n^2}$ .*

**Esercizio 7.36** *Calcolare i seguenti limiti*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n}{5n^3} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n \text{ non esiste}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 6^n - 7^n = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{7} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n - \log n = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{n}\right)^n = e^7$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{4}{n} = 4$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n^2 + n^3 + 6^n}{3^n + 8^n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sin n - e^n}{\log n^2 + n^n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{2n}}{(e^{2n} - 1)} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \frac{4}{n}\right) \left(\sqrt{1 + \frac{3}{n}} - 1\right) = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sin(\sin^4 n)\right]^{\frac{n}{4}} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{2}{n}}{\sin \frac{5}{n}} = \frac{2}{5}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n^2 \sin \frac{1}{n}} = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3} + \frac{1}{n}\right) \sin \frac{5}{n} = \frac{5}{3}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{n^n}} &= \infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + n^3}{n!} &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n^3}{n^3} &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left( \frac{n+3}{n} \right)^n &= 3 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n+1}{n} \right)^n &= \infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sin \frac{3}{n^2} &= 3 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n^4 \cos \frac{3}{n^4} &= \infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \log n^3 \sin \frac{1}{\sqrt{n}} &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-5}{n} \right)^{3n} &= e^{-15} \end{aligned}$$

**Esercizio 7.37** Calcolare, al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ , i seguenti limiti

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n\alpha} \cos^5 n}{n(e^{2n} - 1)} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 + n^3} - \sqrt{n^4 - n^3}}{n^\alpha + n} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^n + (-1)^n}{n \log n} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \log n^\alpha + \frac{1}{n^{\alpha+1}} \right) \end{aligned}$$

**Introduzione del concetto di limite per le funzioni.**

**Definizione 7.38** *Punto isolato. Punto di accumulazione*

**Definizione 7.39** *Limite di una funzione.*

**Definizione 7.40** *Limite destro e limite sinistro di una funzione.*

Legame tra limiti di funzioni e limiti di successioni.

**Teorema 7.41** *TEOREMA PONTE. Le seguenti relazioni sono tra loro equivalenti ( $x_0, l \in \mathbb{R}$ )*

$$\forall x_n \rightarrow x_0, x_n \in A - \{x_0\} \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x_n) \rightarrow l$$

$\Updownarrow$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in A, 0 \neq |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Interpretazione grafica del limite.

Esempi e proprietà dei limiti di funzione.

**Teorema 7.42** *Teoremi di confronto.*

**Teorema 7.43** *Operazioni con i limiti di funzioni.*

**Teorema 7.44** *Limiti di funzione composte.*

**Osservazione 7.45** Si tratta di un cambio di variabile nel limite.

**Esercizio 7.46** Applicando la definizione di limite, verificare che

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1} = 2$$

Alcuni limiti notevoli.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^b} = 0 \quad b > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^b}{a^x} = 0 \quad b > 0 \quad a > 1$$

**Esercizio 7.47** Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^b - 1}{x} = b$$

**Esercizio 7.48** Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 2} 3x = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+5}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{3x+2} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -x^7 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^b} = 0 \quad \forall b \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 3x + 1}{5x^4 + 8x^2 + 2} = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^8 - 1}{x^6 + 1} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x-1} - \sqrt{x+2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{3x^3 + 6x^2 + 2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^8 + 9x^4 + 4}{x^9 + 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+1} - x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x}{\sqrt{x+1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x = e^3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x^4}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \text{ non esiste}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 5^x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{6}\right)^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 9^x - 7^x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x - \log x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^x = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3x}\right)^x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{2x} = \frac{5}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^3} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\sin 2x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1+2x)} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 2x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin 3x} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\tan 2x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{e^{3(x-1)^2} - 1} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-3)^4}{(e^{x^2-9} - 1)^4} = \frac{1}{6^4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{1-x} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + bx + c} - x = \frac{b}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{1-x} = 1$$

## 8 FUNZIONI CONTINUE

**Definizione 8.1** *Funzione continua in un punto. Funzione continua in un intervallo.*

**Teorema 8.2** *Operazioni con i limiti di funzioni continue.*

**Osservazione 8.3** *Molte funzioni elementari sono continue nel loro insieme di definizione: le potenze  $f(x) = x^a$ , le funzioni esponenziali  $f(x) = a^x$ , con  $a > 0$ , le funzioni logaritmiche  $f(x) = \log_a x$ , con  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , le funzioni trigonometriche  $f(x) = \sin x$ ,  $f(x) = \cos x$ ,  $f(x) = \tan x$ , la funzione valore assoluto  $f(x) = |x|$ .*

**Definizione 8.4** *Discontinuità eliminabile, di prima specie, di seconda specie.*

**Esercizio 8.5** *Studiare la continuità delle seguenti funzioni*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+|x|}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} \sin x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

**Esercizio 8.6** *Determinare  $a$  e  $b$  in modo tale che la seguente funzione sia continua in  $\mathbb{R}$*

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a \sin x + b & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

**Esercizio 8.7** Determinare  $\alpha \in \mathbb{R}$ , in modo tale che la seguente funzione sia continua in  $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x}-1}{x} + 2 & x \neq 0 \\ \alpha & x = 0 \end{cases}$$

**Esercizio 8.8** Determinare  $\alpha \in \mathbb{R}$ , in modo tale che la seguente funzione sia continua in  $(-\pi, \infty)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-e^{x^3}}{\sin x^3} & -\sqrt[3]{\pi} < x < 0 \\ -(x+\alpha)^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

**Esercizio 8.9** Studiare la continuità in  $\mathbb{R}$  della seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2}-1}{\ln(x^2+1)} & x > 0 \\ \frac{2x^2+x^3}{(x-1)^2} & x \leq 0 \end{cases}$$

**Esercizio 8.10** Determinare  $\alpha \in \mathbb{R}$ , in modo tale che la seguente funzione sia continua in  $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & x \leq 0 \\ 1 + e^{-\frac{1}{x^\alpha}} & x > 0 \end{cases}$$

**Esercizio 8.11** Determinare  $\alpha \in \mathbb{R}$ , in modo tale che la seguente funzione sia continua in  $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ \frac{\sin(x^{\frac{1}{3}})}{x^\alpha} & x \neq 0 \end{cases}$$

**Esercizio 8.12** Determinare  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  e  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , in modo tale che la seguente funzione sia continua in  $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} c|x|^\alpha + bx^2 + d & x \leq 0 \\ a & x = 0 \\ \frac{\log(1+x)}{x^2+1} & x \geq 0 \end{cases}$$

### Alcuni teoremi sulle funzioni continue

**Teorema 8.13** Teorema di permanenza del segno per funzioni continue.

**Teorema 8.14** Teorema dell'esistenza degli zeri.

**Osservazione 8.15** Tale punto in generale non è unico. Sicuramente è unico se  $f$  è strettamente monotona.

**Teorema 8.16** Teorema di Weierstrass.

**Osservazione 8.17** Se l'intervallo non è chiuso, il risultato è falso. Esempio:  $f(x) = x$  in  $(0, 1)$ .

**Osservazione 8.18** Se l'intervallo non è limitato, il risultato è falso. Esempio:  $f(x) = \frac{1}{x}$  in  $[1, \infty)$ .

**Osservazione 8.19** Se  $f$  non è continua, il risultato è falso. Esempio:  $f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1) \\ 0 & x = 1 \end{cases}$  in  $[0, 1]$ .

**Teorema 8.20** Teorema dell'esistenza dei valori intermedi. (dim)

**Teorema 8.21** Teorema di continuità delle funzioni inverse.

**Osservazione 8.22** La funzione inversa di una funzione monotona ha la stessa monotonia di  $f$  (strettamente crescente se  $f$  è strettamente crescente, strettamente decrescente se  $f$  è strettamente decrescente).

## 9 DERIVATE

Introduzione del concetto di derivata.

**Definizione 9.1** Derivata di una funzione in un punto. Funzione derivabile in un punto. Funzione derivabile in un intervallo. Derivata destra e sinistra di una funzione in un punto.

**Osservazione 9.2** Una funzione è derivabile in un punto se e solo se esistono finite la derivata destra e la derivata sinistra in tale punto e coincidono.

**Esempio 9.3** La derivata di una funzione costante è nulla in ogni punto.

**Teorema 9.4** Se  $f$  è una funzione derivabile in  $x_0$ , allora è anche continua in  $x_0$ . (dim)

**Osservazione 9.5** Una funzione continua può non essere derivabile. Ad esempio,  $f(x) = |x|$  è continua in  $\mathbb{R}$  ma non è derivabile in  $x = 0$ .

**Teorema 9.6** Operazioni con le derivate.

**Teorema 9.7** Teorema di derivazione delle funzioni composte.

**Teorema 9.8** Teorema di derivazione delle funzioni inverse.

**Derivate delle funzioni elementari.** Utilizzando la definizione e i teoremi di derivazione, calcolare le derivate delle seguenti funzioni

$$f(x) = x^a$$

$$f(x) = a^x$$

$$f(x) = \log_a x$$

$$f(x) = \sin x$$

$$f(x) = \cos x$$

$$f(x) = \tan x$$

$$f(x) = \arcsin x$$

$$f(x) = \arccos x$$

$$f(x) = \arctan x$$

**Significato geometrico della derivata.**

Equazione della retta tangente al grafico di una funzione derivabile nel punto  $(x_0, f(x_0))$ :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \text{ (dim)}$$



**Esercizio 9.9** Calcolare la derivata delle seguenti funzioni

$$f(x) = x^2$$

$$f(x) = \sqrt[5]{x}$$

$$f(x) = 4x + \sqrt[4]{x+3} + 38$$

$$f(x) = 2^x$$

$$f(x) = (7x + 8)^5$$

$$f(x) = \log_3 x$$

$$f(x) = \sin 2x$$

$$f(x) = \cos(3x + 4)^2$$

$$f(x) = \tan x$$

$$f(x) = \arcsin 6x$$

$$f(x) = \arccos 8x$$

$$f(x) = \arctan 3x$$

$$f(x) = 2^x + 4x + 5$$

$$f(x) = \sin(\log x)$$

$$f(x) = \log(\sin x)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{\sin x}$$

$$f(x) = \sin(\sqrt[3]{x})$$

$$f(x) = \ln(\ln x)$$

$$f(x) = \ln(\ln(\ln x))$$

$$f(x) = (x + 1)^{x+2}$$

$$f(x) = \frac{1}{\arctan \frac{1}{\sqrt{x}}}$$

**Esercizio 9.10** Calcolare l'equazione della retta tangente alla funzione  $f(x) = 3e^x + 4$  in  $x = 2$ .

**Esercizio 9.11** Determinare gli insiemi di continuità e derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+x) & x \geq 0 \\ |1+x| - 1 & x < 0 \end{cases}$$

**Esercizio 9.12** Determinare gli insiemi di continuità e derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x(x-2)} & x \geq 2 \\ \sqrt{x} - \frac{1}{x-2} & 0 < x < 2 \\ \sqrt{x(x-2)} & x \leq 0 \end{cases}$$

**Esercizio 9.13** Determinare gli insiemi di continuità e derivabilità della funzione

$$f(x) = |4x - 1 + (5 - 3x)|$$

**Esercizio 9.14** Determinare gli insiemi di continuità e derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

**Esercizio 9.15** Determinare gli insiemi di continuità e derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

**Esercizio 9.16** Determinare gli insiemi di continuità e derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

**Esercizio 9.17** Studiare la derivabilità delle funzioni degli esercizi 4.5, 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, 4.10, 4.11 e 4.12.

## 10 APPLICAZIONI DELLE DERIVATE

Applicazioni delle derivate per il calcolo dei limiti

**Teorema 10.1** Teorema di L'Hôpital.

**Osservazione 10.2** Il teorema di L'Hôpital non fornisce informazioni quando  $\lim \frac{f'}{g'}$  non esiste. In tal caso il limite  $\lim \frac{f}{g}$  potrebbe esistere o non esistere.

Esempio.  $f(x) = x - \sin x$ ,  $g(x) = x$ , per  $x \rightarrow \infty$ .

Esempio.  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = x$ , per  $x \rightarrow 0^+$ .

Esempio.  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = x$ , per  $x \rightarrow 0^+$ .

**Osservazione 10.3** Si può iterare il procedimento più volte.

Esempio.  $f(x) = e^x$ ,  $g(x) = x^3$ , per  $x \rightarrow \infty$ .

**Esercizio 10.4** Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{x} \text{ (è una forma indeterminata?)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{\log x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x + x \sin x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x}-1}{\sin 4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{\cos \sqrt{x}-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos^2 x)^{\tan^2 x} = e^2$$

**Esercizio 10.5** Data la funzione  $f(x) = \begin{cases} x^4 + 3x^3 & x \geq 0 \\ \frac{\ln(1+x^2)-x^2}{\sqrt[3]{x}} & x < 0 \end{cases}$

Stabilire se  $f$  è continua in  $\mathbb{R}$ .

Calcolare la derivata sinistra e destra di  $f$  in 0.

Stabilire se  $f$  è derivabile in  $\mathbb{R}$ .

Applicazioni delle derivate per lo studio delle proprietà di funzioni

**Definizione 10.6** Massimo relativo. Minimo relativo.

**Definizione 10.7** Massimo assoluto. Minimo assoluto.

**Osservazione 10.8** Il massimo assoluto di  $f$ , se esiste, è unico. Il punto di massimo può invece non essere unico.

**Teorema 10.9** *Teorema di Fermat. (dim)*

Significato geometrico del teorema di Fermat.

**Osservazione 10.10** *Se una funzione è continua in un intervallo chiuso e limitato, i punti di massimo e minimo assoluti vanno ricercati tra: 1. i punti interni dove si annulla la derivata; 2. gli estremi dell'intervallo; 3. gli eventuali punti di non derivabilità.*

**Teorema 10.11** *Teorema di Rolle. (dim)*

Significato geometrico del Teorema di Rolle.

**Teorema 10.12** *Teorema di Lagrange. (dim)*

Significato geometrico del Teorema di Lagrange.

**Osservazione 10.13** *La continuità agli estremi dell'intervallo è una ipotesi indispensabile. Esempio:  $f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1) \\ 0 & x = 1 \end{cases}$  in  $[0, 1]$ .*

**Teorema 10.14** *Criterio di monotonia.*

**Teorema 10.15** *Caratterizzazione delle funzioni costanti in un intervallo.*

**Teorema 10.16** *Criterio di stretta monotonia.*

**Osservazione 10.17** *Una funzione strettamente monotona può avere derivata nulla in qualche punto. Esempio: la funzione  $f(x) = x^3$  è strettamente crescente in  $\mathbb{R}$ , ma la sua derivata si annulla in  $x = 0$ .*

**Definizione 10.18** *Funzione convessa. Funzione concava.*

**Teorema 10.19** *Criterio di convessità.*

**Definizione 10.20** *Punto di flesso.*

**Osservazione 10.21** *In un punto di flesso il grafico di  $f$  attraversa la retta tangente.*

**Osservazione 10.22** *Se  $f$  è derivabile due volte, allora in un punto di flesso la derivata seconda si annulla.*

**Teorema 10.23** *Criterio per i punti di massimo e di minimo (valido per funzioni che ammettono derivata seconda).*

Schema per lo studio di un grafico di funzione.

**Esercizio 10.24** *Studiare le seguenti funzioni  $f$*

$$f(x) = x^3$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = e^x$$

$$f(x) = \ln x$$

$$f(x) = \sin x$$

$$f(x) = \cos x$$

$$f(x) = \tan x$$

$$f(x) = \arcsin x$$

$$f(x) = \arccos x$$

$$f(x) = \arctan x$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

$$f(x) = \frac{x^2+6x+6}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{x^2-x}{x-2}$$

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2+3}$$

$$f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2}$$

$$f(x) = xe^{-2x^2}$$

$$f(x) = xe^x$$

$$f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$$

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x-1}$$

$$f(x) = \frac{e^x-1}{e^x}$$

$$f(x) = e^{\frac{|x-1|}{x}}$$

$$f(x) = xe^{\frac{|x-1|}{x}}$$

$$f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ (seno iperbolico)}$$

$$f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ (coseno iperbolico)}$$

$$f(x) = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \text{ (tangente iperbolica)}$$

$$f(x) = x \log x$$

$$f(x) = x \log^2 x$$

$$f(x) = x^x$$

$$f(x) = \frac{x}{|x|+|1-x|}$$

$$f(x) = \sqrt{2-x} - \sqrt{x}$$

$$f(x) = \sin^2 x - \sin x$$

specificandone dominio; segno e zeri di  $f$ ; limiti agli estremi degli intervalli costituenti il dominio; asintoti; continuità, esistenza e calcolo delle derivate prima  $f'$ ; segno e zeri di  $f'$ ; intervalli di monotonia di  $f$  e punti stazionari; massimi e minimi relativi; esistenza e calcolo della derivata seconda  $f''$ : intervalli di concavità e convessità e punti di flesso; grafico di  $f$ .

**Esercizio 10.25** Determinare massimo e minimo della funzione  $f(x) = \sin^2 x + \sqrt{2} \cos x$  in  $[0, 2\pi]$ .

**Esercizio 10.26** Determinare massimo e minimo della funzione  $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x$  in  $[0, 2\pi]$ .

**Applicazione delle derivate per l'approssimazione di una funzione regolare in un intorno di un punto tramite polinomi.**

**Teorema 10.27** La formula di Taylor.

**Definizione 10.28** Formula di Mac Laurin.

**Esercizio 10.29** Sviluppo delle funzioni elementari.

**Teorema 10.30** Condizioni sufficienti per massimi e minimi.

Uso della formula nel calcolo dei limiti.

**Esercizio 10.31** Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \sin x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + x \sin x}{x^2}$$

# 11 CALCOLO INTEGRALE PER LE FUNZIONI DI UNA VARIABILE

Introduzione.

**Definizione 1.1** *Partizione. Somme integrali.*

**Definizione 1.2** *Integrale definito di una funzione limitata  $f$  in un intervallo  $[a, b]$ .*

**Osservazione 1.3** *Interpretazione geometrica dell'integrale definito.*

**Proprietà dell'integrale.**

**Teorema 1.4** *Additività dell'integrale rispetto all'intervallo.*

**Teorema 1.5** *Linearità dell'integrale.*

**Teorema 1.6** *Confronto tra integrali.*

**Teorema 1.7** *Teorema della media integrale. (dim)*

**Teorema 1.8** *Integrabilità delle funzioni continue.*

**Definizione 1.9** *Funzione integrale.*

**Teorema 1.10** *Il teorema fondamentale del calcolo integrale. (dim)*

**Definizione 1.11** *Primitiva.*

**Teorema 1.12** *Caratterizzazione delle primitive di una funzione in un intervallo.*

**Teorema 1.13** *Formula fondamentale del calcolo integrale. (dim)*

**Definizione 1.14** *Integrale indefinito.*

**Osservazione 1.15** *L'integrale definito  $\int_a^b f dx$  è un numero reale. L'integrale indefinito  $\int f dx$  è un insieme di funzioni.*

Tabella degli integrali indefiniti.

Integrazione per decomposizione in somma.

Integrazione delle funzioni razionali.

Integrazione per parti.

Integrazione per sostituzione.

Formule di razionalizzazione tramite particolari sostituzioni ( $R(y)$  è una funzione razionale fratta)

$$\int R(e^x) dx \text{ con } t = e^x$$

$$\int R(\sin x) \cos x dx \text{ con } t = \sin x$$

$$\int R(\cos x) \sin x dx \text{ con } t = \cos x$$

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx \text{ con } x = a \sin t$$

$$\int R(\sin x, \cos x) dx \text{ con } t = \tan \frac{x}{2}$$

$$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \tan x) dx \text{ con } t = \tan x$$

**Esercizio 1.16** Calcolare i seguenti integrali

$$\int_1^2 (x^5 + 3x + 6) dx$$

$$\int_0^1 (x + 1)^4 dx$$

$$\int \cos x \sin x dx$$

$$\int \tan x dx$$

$$\int \frac{x}{x+1} dx$$

$$\int \tan^2 x dx$$

$$\int \frac{x^5 - 3x^4 + x + 3}{x^2 - 1} dx$$

$$\int \frac{x+7}{x^2 - x - 2} dx$$

$$\int \frac{x}{x^2 + 2x + 1} dx$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx$$

$$\int \frac{x}{x^2 + x + 1} dx$$

$$\int x e^x dx$$

$$\int \log x dx$$

$$\int \cos^2 x dx$$

$$\int x \cos x dx$$

$$\int x^2 \cos x dx$$

$$\int e^x \sin x dx$$

$$\int \tan 3x dx$$

$$\int x^4 \log x dx$$

$$\int e^{3x} \sin 2x dx$$

$$\int \frac{1}{5+x^2} dx$$

$$\int \sin^2 x dx$$

$$\int \sin^2 x \cos x dx$$

Calcolo di aree di figure piane.

Formula per il calcolo dell'area.

**Esercizio 1.17** Calcolare l'area di un cerchio di raggio  $r$ .

**Esercizio 1.18** Calcolare l'area della regione piana racchiusa dall'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

**Esercizio 1.19** Calcolare l'area della regione piana compresa fra le 2 parabole di equazioni  $y^2 = 9x$  e  $x^2 = 9y$ .

**Integrali impropri.**

**Definizione 1.20** Integrale improprio in  $[a, b)$  di una funzione  $f$  non negativa, continua in  $[a, b)$  e non limitata in un intorno sinistro di  $b$ .

**Definizione 1.21** Integrale improprio in  $(a, b]$  di una funzione  $f$  non negativa, continua in  $(a, b]$  e non limitata in un intorno destro di  $a$ .

**Esercizio 1.22** Studio dell'integrale improprio  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

**Esercizio 1.23** Studio dell'integrale improprio  $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$

**Definizione 1.24** Integrale improprio in  $[a, +\infty)$  di una funzione continua e non negativa.

**Definizione 1.25** Integrale improprio in  $(-\infty, b]$  di una funzione continua e non negativa.

**Esercizio 1.26** Studio dell'integrale improprio  $\int_1^\infty \frac{1}{x^3} dx$ .

**Esercizio 1.27** Studio dell'integrale improprio  $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$ .