

Programma del Corso di GEOMETRIA E ALGEBRA-a.a. 1998-1999

Prof. P. Maroscia

Insiemi: Insiemi numerici. Relazioni di ordine. Insiemi bene ordinati. Relazioni di equivalenza. Classi di equivalenza. Partizioni di un insieme. Insiemi quoziente. Applicazioni tra insiemi. Applicazioni iniettive, suriettive, biiettive. Applicazione quoziente. Composizione di applicazioni. Insiemi equipotenti.

Gruppi-anelli-campi: Operazioni algebriche nell'insieme \mathbf{Z} degli interi relativi. La divisione euclidea con resto. Massimo comune divisore: esistenza e unicità. Identità di Bezout. Uso dell'algoritmo euclideo delle divisioni successive. Minimo comune multiplo. Numeri primi. Numeri relativamente primi. Numeri di Fibonacci. Il Teorema fondamentale dell'aritmetica e alcune sue conseguenze. Proprietà delle congruenze. Criteri di divisibilità. Sistemi di congruenze. Il teorema cinese dei resti.

Gruppi. Prime conseguenze degli assiomi. Tabella di moltiplicazione di un gruppo finito. Gruppi di simmetrie. Gruppi di permutazioni. Gruppo di Klein. Il gruppo delle classi resto degli interi modulo n . Il gruppo delle radici n -esime dell'unità. Gruppi di matrici. Sottogruppi. Sottogruppi ciclici generati da un elemento. Gruppi ciclici. Sottogruppi di un gruppo ciclico. Generatori e sottogruppi di \mathbf{Z}_n . Ordine di un elemento di un gruppo. Omomorfismi di gruppi. Nucleo e immagine di un omomorfismo. Isomorfismi tra gruppi. Il teorema di Lagrange e alcune conseguenze notevoli. Il teorema di Cauchy. Classificazione dei gruppi finiti di ordine < 8 . Il teorema di classificazione per i gruppi ciclici.

Anelli. Anelli unitari, commutativi, interi. Campi. Omomorfismi di anelli. Isomorfismi. L'anello delle matrici $M_n(K)$. L'anello \mathbf{Z}_n delle classi resto modulo n . L'anello \mathbf{Z}_n è un campo, se e soltanto se, n è un numero primo. L'anello dei polinomi in una variabile a coefficienti in un campo e sue principali proprietà. Divisione con resto. Polinomi irriducibili. Il Teorema fondamentale di fattorizzazione unica. Radici di un polinomio e loro molteplicità. Una caratterizzazione dei polinomi aventi una radice di molteplicità $\geq k$. Il Teorema fondamentale dell'Algebra.

Spazi vettoriali: Spazi vettoriali sopra un campo. Dipendenza e indipendenza lineare di insiemi di vettori. Dipendenza lineare di funzioni e relativo determinante wronskiano. Insiemi di generatori. Sottoinsiemi liberi. Basi. Spazi vettoriali finitamente generati. Il Teorema della base. Dimensione di uno spazio vettoriale. Il Teorema del completamento di una base. Sottospazi di uno spazio vettoriale. Operazioni tra sottospazi. La somma diretta di due o più sottospazi e sue principali proprietà. Sottospazi supplementari.

Applicazioni lineari o omomorfismi tra spazi vettoriali: nucleo, immagine. Insiemi di generatori dell'immagine di un'applicazione lineare. Isomorfismi. Endomorfismi, automorfismi. Caratterizzazione degli spazi vettoriali isomorfi mediante la dimensione. Teorema della dimensione. Sistemi di equazioni lineari. Teorema di Rouché-Capelli. Il determinante di Vandermonde.

La matrice associata ad un'applicazione lineare rispetto a due basi assegnate; il caso degli endomorfismi. Cambiamenti di base in uno spazio vettoriale. Matrici simili. Una proprietà delle matrici scalari. Due matrici quadrate sono simili tra loro, se e soltanto se,

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ -TEX

esse rappresentano uno stesso endomorfismo. Matrici diagonali. Matrici triangolari. Due matrici diagonali sono simili tra loro, se e soltanto se, esse hanno gli stessi elementi sulla diagonale principale (a meno dell'ordine).

Endomorfismi di spazi vettoriali: Autovalori, autovettori, autospazi di un endomorfismo o di una matrice quadrata. Sottospazi invarianti rispetto a un endomorfismo. Il polinomio caratteristico di un endomorfismo o di una matrice quadrata. Molteplicità algebrica e molteplicità geometrica di un autovalore. Endomorfismi diagonalizzabili e loro caratterizzazioni. Matrici circolanti a destra. Matrici circolanti a sinistra. Matrici simultaneamente diagonalizzabili. Matrici reali positive.

Polinomi che si annullano su una matrice o su un endomorfismo. Il Teorema di Cayley-Hamilton. Il polinomio minimo di una matrice quadrata o di un endomorfismo e sue principali proprietà. Il polinomio caratteristico e il polinomio minimo hanno gli stessi fattori irriducibili. Una notevole caratterizzazione degli endomorfismi nilpotenti mediante il polinomio caratteristico. Indice di nilpotenza e polinomio minimo di un endomorfismo nilpotente. Matrici diagonali a blocchi e loro principali proprietà. Il polinomio caratteristico e il polinomio minimo di una matrice diagonale a blocchi. La matrice compagna di un polinomio monico e sue principali proprietà.

Endomorfismi riducibili a forma triangolare. Le successioni dei nuclei e delle immagini delle potenze di un endomorfismo. Decomposizione di Fitting di uno spazio vettoriale rispetto a un endomorfismo. Blocchi di Jordan. Il polinomio minimo di un blocco di Jordan. Matrici di Jordan. Forma canonica di Jordan di una matrice quadrata o di un endomorfismo.

Sottospazi ciclici rispetto a un endomorfismo. Endomorfismi nilpotenti con indice di nilpotenza massimo. Ogni endomorfismo nilpotente possiede la forma canonica di Jordan. Autovettori generalizzati, autospazi generalizzati di un endomorfismo. Un endomorfismo è riducibile alla forma canonica di Jordan, se e soltanto se, tutti i suoi autovalori appartengono al campo base. Determinazione di una base opportuna per la riduzione a forma canonica. Indice di un autovalore di un endomorfismo riducibile alla forma canonica di Jordan; il polinomio minimo di un endomorfismo siffatto. Due matrici che possiedono la forma canonica di Jordan sono simili tra loro, se e soltanto se, hanno la "stessa" forma canonica di Jordan.

Spazi euclidei-Spazi unitari: Prodotto scalare in uno spazio vettoriale reale. Spazi reali euclidei. Prodotto hermitiano in uno spazio vettoriale complesso. Spazi complessi unitari. Ortogonalità. Norma di un vettore. Distanza tra due vettori. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Disuguaglianza triangolare. Angolo di due vettori. Il determinante di Gram. Sistemi ortogonali e sistemi ortonormali di vettori. Basi ortonormali e loro proprietà. Esistenza di basi ortonormali negli spazi euclidei o unitari di dimensione finita. Il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt. Il supplementare ortogonale di un sottospazio di uno spazio euclideo o unitario di dimensione finita. Approssimazione di una funzione reale continua mediante polinomi trigonometrici.

L'operatore aggiunto di un operatore lineare definito su uno spazio euclideo o unitario di dimensione finita. Prime proprietà. Matrici aggiunte. Matrici hermitiane. Operatori autoaggiunti: operatori simmetrici, operatori hermitiani. Proprietà degli autovalori e degli autospazi di un operatore autoaggiunto. Ogni operatore autoaggiunto possiede una base ortonormale di autovettori. Ogni matrice complessa hermitiana (risp. reale simmetrica) è

diagonalizzabile. Caratterizzazione degli operatori simmetrici mediante l'esistenza di una base ortonormale di autovettori.

Operatori normali su uno spazio complesso unitario. Matrici normali. Caratterizzazione degli operatori normali mediante l'esistenza di una base ortonormale di autovettori. Matrici ortogonali. Matrici unitarie. Operatori ortogonali. Operatori unitari. La fattorizzazione QR di una matrice reale invertibile. Ogni matrice reale simmetrica (risp. complessa normale) può essere diagonalizzata mediante una matrice ortogonale (risp. unitaria) e viceversa. Il caso notevole delle matrici circolanti a destra. Caratterizzazione degli operatori ortogonali e degli operatori unitari mediante la conservazione del prodotto scalare o hermitiano e mediante il comportamento rispetto alle basi ortonormali. Proprietà degli autovalori di un operatore ortogonale o unitario. Il teorema spettrale reale. Il teorema spettrale complesso.

Funzioni di matrici e applicazioni ai sistemi differenziali-Grafi: Polinomi di matrici. Alcune condizioni necessarie e sufficienti affinché due polinomi abbiano gli stessi valori su una matrice assegnata. Valori di una funzione sullo spettro di una matrice quadrata. Funzioni di matrici definite mediante il polinomio minimo. Il polinomio interpolatore di Lagrange-Sylvester di una funzione, relativo allo spettro di una matrice. Il caso notevole in cui lo spettro è costituito da n valori distinti. Funzioni di matrici simili. Funzioni di matrici diagonali a blocchi. Funzioni di matrici diagonalizzabili o riducibili alla forma canonica di Jordan. Il determinante della funzione di una matrice.

La funzione esponenziale di una matrice e sue principali proprietà. L'integrale generale di un sistema differenziale lineare omogeneo del primo ordine a coefficienti costanti. Orbite. Punti di equilibrio o punti critici. Stabilità. Il caso notevole dei sistemi differenziali in due variabili. Esempi.

Grafi finiti, semplici, non orientati. Grado di un vertice. Grafi regolari. Un'espressione esplicita del numero dei lati di un grafo. Cammini e circuiti. Cammini euleriani e circuiti euleriani. Grafi connessi. Grafi euleriani e loro caratterizzazione. Il problema dei ponti di Königsberg. Grafi connessi e alberi.

Testi consigliati:

1. P. Maroscia, *Problemi di geometria*, Masson 1994.
2. P. Maroscia, *Appunti di Geometria I*.
3. P. Maroscia, *Appunti di Geometria e Algebra*.
4. G. Accascina - V. Villani, *Algebra lineare*, ETS.
5. I. Cattaneo Gasparini, *Strutture Algebriche - Operatori lineari*, Ed. Veschi.
6. I. Cattaneo Gasparini, *Complementi di Geometria e algebra, Parte II*; Ed. Veschi.
7. L. Childs, *Algebra*, ETS
8. S. Lipschutz, *Algebra lineare*, Etas Libri.