# ANALISI MATEMATICA II (Ing. Energetica)
# III APPELLO 23.09.2014 A.A.2013/14

COGNOME E NOME .............................N.Ro MATR. ...............................................
LUOGO E DATA DI NASCITA .........................................................................

**MOTIVARE CHIARAMENTE TUTTE LE RISPOSTE** Tempo 2 ore 30 $'$ **COMPITO B**

1) Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme delimitato dalla semisfera centrata nell'origine di raggio 3 $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=9, z \geq 0\}$, e dalla porzione di paraboloide $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2+y^2-9, z \leq 0\}$.
Parametrizzare $\partial\Omega$ e scriverne (dove possibile) versore normale uscente e piano tangente.
Scrivere in particolare versore normale uscente e piano tangente nei punti
$$P = (0,0,3), \quad Q = (0,0,-9).$$
Calcolare il flusso del campo $F(x,y,z) = (1, y, 1)$
uscente dal bordo di $\Omega$, svolgendo sia un integrale triplo che un integrale di superficie. **(8 punti)**

2) Sia data la funzione $f(x,y) = x^2 - xy + y^3$.
Studiare i punti critici di $f$ e trovarne massimo e minimo globale, o eventualmente estremo superiore ed inferiore, nel suo dominio ed all'interno del triangolo chiuso $T$ di vertici $(1,0), (0,1)$ e $(0,0)$. **(8 punti)**

3) Rappresentare in serie di Fourier, la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica, **dispari**, di *periodo* $T = 2\pi$ individuata in $[-\pi, 0)$ da $f(x) = \cos\left(\frac{x}{4}\right)$.
Precisare, $\forall x \in [-\pi, \pi)$ il valore della somma di tale serie di Fourier. In tale intervallo la convergenza è uniforme ? E in $\mathbb{R}$? Perchè ? **Fornire adeguate motivazioni**. **(8 punti)**

4) Data la forma differenziale
$$\omega = \frac{x-1}{(x-1)^2+4(y+1)^2}dx + \frac{4y+\beta}{(x-1)^2+4(y+1)^2}dy, \quad \beta \in \mathbb{R} \tag{4}$$

1. determinare l'insieme di definizione $E \subset \mathbb{R}^2$.
2. Dato il compatto $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ 1 \leq (x-1)^2 + 4(y+1)^2 \leq 4\right\}$, pararametrizzarne la frontiera $\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2$;
3. calcolare, in corrispondenza al generico valore di $\beta \in \mathbb{R}$, $I = \int_{+\partial D} \omega$;
4. verificare il risultato ottenuto mediante le formule di Green-Gauss, cioè, dopo avere parametrizzato il compatto $D$, calcolare un *opportuno* integrale doppio esteso a $D$;
5. determinare $\beta \in \mathbb{R}$, se esiste, tale che essa sia chiusa in $E$; in corrispondenza al valore di $\beta$ determinato,
   - indicare un sottoinsieme di $E$ nel quale $\omega$ è esatta e dire se $\omega$ è esatta o meno in $E$. Indicare **chiaramente** le motivazioni teoriche della risposta;
   - calcolare $\widetilde{I} = \int_{+\widetilde{\gamma}} \omega$, dove $\widetilde{\gamma}$ indica il segmento che congiunge il punto $A \equiv (-1,-1)$ con il il punto $B \equiv (0,-1)$ e, se possibile, verificare il valore dell'integrale $\widetilde{I}$ calcolandolo in modo alternativo al calcolo diretto.

**(8 punti)**

Dichiaro di avere superato l'esame di Analisi Matematica I $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\text{NO}}$ FIRMA ..............................

**Riservato alla Commissione di Esame**

SCRITTO

ORALE