di 1 a 3 dal punto P. La lunghezza q è inoltre legata alla curvatura di (M) ed all'angolo ω di (M) con AB dalla relazione

$$\omega' = -\frac{1}{\rho} + \frac{\operatorname{sen}\omega}{q}.$$

Il baricentro dell'area limitata dagli archi A_0A, B_0B, e dalle rette A_0B_0, AB, coincide col baricentro dell'arco M_0M, nell'ipotesi che la densità della massa distribuita lungo (M) sia

$$h = \frac{pl}{q} \operatorname{sen}\omega .$$

Sopra la compatibilità o incompatibilità di più equazioni di primo grado fra più incognite.

1. In un'opera da me pubblicata in collaborazione col prof. G. Garbieri (*) ho già avuto occasione di mostrare i vantaggi, così scientifici come didattici, della nozione di *caratteristica di una matrice*, quadrata o rettangolare, di numeri dati, come quella che permette di enunciare in modo assai semplice i teoremi relativi alla dipendenza o indipendenza di più equazioni lineari omogenee ed al grado di multiplicità dei loro sistemi di soluzioni.

Dato infatti un sistema di m equazioni lineari omogenee

$$(1)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

fra le n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$, se h è la caratteristica della matrice:

$$(2)\quad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{matrix}$$

cioè *il massimo ordine di determinanti minori diversi da zero contenuti in essa* si ha quanto segue:

(*) *Corso di Analisi algebrica.* Vol. I: Teorie introduttorie, p. 373 e seg.

1°) Delle m equazioni (1) soltanto h sono indipendenti e le altre $m - h$ sono una semplice conseguenza di esse e possono quindi trascurarsi.

2°) Le h equazioni indipendenti che equivalgono all'intero sistema (1) si potranno, in generale, scegliere fra le (1) in più modi diversi. A tale oggetto è necessario e sufficiente di scegliere fra le (1) h equazioni tali che la caratteristica della loro matrice sia eguale ad h.

3°) Per soddisfare poi alle h equazioni indipendenti, e quindi anche all'intero sistema (1), si potranno assegnare ad arbitrio i valori di $n - h$ incognite (che però non si possono sempre scegliere a piacere) dopodichè i valori delle h rimanenti incognite resteranno perfettamente determinati.

La semplicità di questi enunciati mi fece pensare, alquanto più tardi, che la nozione di caratteristica potesse anche applicarsi con eguale vantaggio all'enunciato delle condizioni per la *compatibilità* o *incompatibilità* di più equazioni lineari non omogenee con un numero qualunque di incognite, cioè per la possibilità o impossibilità di risolverle con valori *finiti* delle incognite. Nel fatto mi riuscì facile di stabilire il seguente teorema:

Dato un sistema qualunque di m *equazioni di* 1° *grado con* n *incognite*

$$(\mathrm{I})\quad \left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = \alpha_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = \alpha_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = \alpha_n \end{array}\right.$$

affinchè esso sia compatibile con valori finiti delle incognite è necessario e sufficiente che le due matrici

$$(\mathrm{A})\quad \left\{\begin{array}{llll} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{array}\right. \qquad \text{e} \qquad (\mathrm{B})\quad \left\{\begin{array}{lllll} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & \alpha_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & \alpha_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & \alpha_n \end{array}\right.$$

abbiano la stessa caratteristica.

Ho stimato far cosa grata ai lettori di questa *Rivista* comunicando loro questo teorema, che io ho pubblicato già da tre anni nel corso litografato delle mie lezioni universitarie (*), perchè la forma del suo

---

(*) *Lezioni di Algebra complementare date nella R. Università di Napoli* nell'anno accademico 1888-89, presso Vincenzo Cavaliere libraio nella R. Università. Vedi cap. III, § 6, p. 159 e seg.

enunciato mi sembra, anche dal punto di vista didattico, non privo d'importanza. In vista di ciò mi permetto di aggiungere qui la dimostrazione che io ne ho data nelle mie lezioni, togliendola quasi per intero dal corso già citato.

2. Il problema di ricercare se il sistema di equazioni lineari non omogenee (I) siä risolubile con valori finiti delle $x_1, x_2, \dots x_n$ equivale, come sappiamo, a quello di ricercare se il sistema omogeneo:

$$(\mathrm{I})' \left\{ \begin{array}{l} a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \dots + a_{1n} y_n + \alpha_1 y_{n+1} = 0 \\ a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{2n} y_n + \alpha_2 y_{n+1} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} y_1 + a_{m2} y_2 + \dots + a_{mn} y_n + \alpha_m y_{n+1} = 0 \end{array} \right.$$

sia risolubile con valori finiti delle $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$, dei quali l'ultimo y_{n+1} sia inoltre *diverso da zero.*

Si comincierà dunque, servendosi degli stessi criterii esposti nell'art. precedente per le equazioni (1), dal cancellare nel sistema (I)' quelle equazioni che possono ritenersi come conseguenza delle rimanenti. Se la matrice (B) ha per caratteristica h, il sistema (I)' si ridurrà a sole h equazioni che, senza nuocere alla generalità della questione, possiamo sempre supporre essere le prime h del sistema, cioè:

$$(\mathrm{I})'' \left\{ \begin{array}{l} a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \dots + a_{1n} y_n + \alpha_1 y_{n+1} = 0 \\ a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{2n} y_n + \alpha_1 y_{n+1} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{h1} y_1 + a_{h2} y_2 + \dots + a_{hn} y_n + \alpha_h y_{n+1} = 0 \end{array} \right.$$

e la caratteristica della matrice:

$$(\mathrm{B})' \left\{ \begin{array}{lllll} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \alpha_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h1} & a_{h2} & \dots & a_{hn} & \alpha_h \end{array} \right.$$

corrispondente a questo sistema sarà precisamente eguale ad h.

Supponendo ora, dapprima, che anche la matrice (A) abbia per caratteristica lo stesso numero h, è evidente che le h equazioni (I)'' si potranno sempre scegliere in modo che almeno uno dei determinanti di ordine h contenuti nella matrice parziale:

$$(\mathrm{A})' \left\{ \begin{array}{llll} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h1} & a_{h2} & \dots & a_{hn} \end{array} \right.$$

sia diverso da zero. In tale supposto il sistema (I)'' sarà certamente risolubile con valori finiti delle $y_1, y_2, ..., y_{n+1}$, l'ultimo dei quali diverso da zero. Sia infatti per esempio:

$$(C) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1h} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2h} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{h1} & a_{h2} & \dots & a_{hh} \end{vmatrix} \gtrless 0$$

Allora, scritte le (I)'' sotto la forma:

$$\begin{array}{l} a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \dots + a_{1h} y_h = -(a_{1,h+1} y_{h+1} + \dots + a_{1n} y_n + \alpha_1 y_{n+1}) \\ a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{2h} y_h = -(a_{2,h+1} y_{h+1} + \dots + a_{2n} y_n + \alpha_2 y_{n+1}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{h1} y_1 + a_{h2} y_2 + \dots + a_{hh} x_h = -(a_{h,h+1} y_{h+1} + \dots + a_{hn} y_n + \alpha_h y_{n+1}) \end{array}$$

è chiaro che si potranno assegnare ad arbitrio dei valori finiti quali si vogliano alle $y_{h+1}, ..., y_n, y_{n+1}$, dopodichè le altre h incognite, dovendo soddisfare ad h equazioni di 1° grado col determinante (C) che è diverso da zero, saranno date da altrettanti valori finiti determinabili in un unico modo. Nella ipotesi fatta il sistema (I) sarà dunque compatibile con valori finiti delle incognite.

3. Se invece la matrice (A) avesse la sua caratteristica inferiore ad h, il sistema (I) sarebbe incompatibile. Supponiamo infatti, se è possibile, che, essendo nulli tutti i minori di ordine h contenuti in (A), e quindi a maggior ragione tutti quelli contenuti in (A)', si potessero cionondimeno soddisfare le (I)'' con valori finiti delle $y_1, y_2, ... y_{n+1}$, l'ultimo dei quali *diverso da zero*. Si avrebbe allora per questi valori

$$\begin{vmatrix} a_{1,i_1} & a_{1,i_2} \dots a_{1,i_{h+1}} & a_{11} y_1 + \dots + a_{1n} y_n + \alpha_1 y_{n+1} \\ a_{2,i_1} & a_{2,i_2} \dots a_{2,i_{h+1}} & a_{21} y_1 + \dots + a_{2n} y_n + \alpha_2 y_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{h,i_1} & a_{h,i_2} \dots a_{h,i_{h+1}} & a_{h1} y_1 + \dots + a_{hn} y_n + \alpha_h y_{n+1} \end{vmatrix} = 0$$

comunque si scelgano gli indici $i_1, i_2, ..., i_{h-1}$ fra i numeri 1, 2, ..., n, poichè gli elementi dell'ultima colonna, che sono i primi membri delle (I)'' sono nulli per supposto. Ma, decomponendo il determinante del primo membro in tanti determinanti quanti sono i termini dei polinomî dell'ultima colonna, quest'equazione prende la forma:

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=n} y_\rho \begin{vmatrix} a_{1,i_1} & a_{1,i_2} \dots a_{1,i_{h-1}} & a_{1\rho} \\ a_{2,i_1} & a_{2,i_2} \dots a_{2,i_{h-1}} & a_{2\rho} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{h,i_1} & a_{h,i_2} \dots a_{h,i_{h-1}} & a_{h\rho} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,i_1} & a_{1,i_2} \dots a_{1,i_{h-1}} & \alpha_1 \\ a_{2,i_1} & a_{2,i_2} \dots a_{2,i_{h-1}} & \alpha_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{h,i_1} & a_{h,i_2} \dots a_{h,i_{h-1}} & \alpha_h \end{vmatrix} y_{n+1} = 0$$

Considerando ora che i determinanti sotto il segno Σ sono tutti compresi nella matrice (A)' e quindi nulli per supposto, e che y_{n+1} è per supposto diverso da zero, si vede che l'equazione si riduce ad

$$\begin{vmatrix} a_{1,i_1} & a_{1,i_2} & \dots & a_{1,i_{h-1}} & \alpha_1 \\ a_{2,i_1} & a_{2,i_2} & \dots & a_{2,i_{h-1}} & \alpha_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{h,i_1} & a_{h,i_2} & \dots & a_{h,i_{h-1}} & \alpha_h \end{vmatrix} = 0$$

Poichè gli indici $i_1, i_2, \dots, i_{h-1}$ possono poi scegliersi a piacere, quest'equazione ci dice che nella matrice (B)' corrispondente al sistema (I)'' anche quei determinanti di ordine h nella cui composizione entra l'ultima colonna sono come gli altri eguali a zero. La matrice del sistema (I)'' avrebbe dunque la sua caratteristica inferiore ad h contro il supposto. Il teorema resta così dimostrato completamente.

Napoli, Gennaio 1892. ALFREDO CAPELLI.

Dimostrazione dell'impossibilità di segmenti infinitesimi costanti.

Si dice che una grandezza u è infinitesima rispetto alla grandezza v, se ogni multiplo di u, secondo un numero intero finito, è minore di v. L'esistenza o meno di grandezze infinitesime dipende dal significato che attribuiamo alla parola *grandezza*. Ed effettivamente si sono formate delle categorie di enti, sui quali si possono definire le relazioni e operazioni analoghe a quelle dell'algebra sui numeri, nelle quali categorie di enti si trovano degli infinitesimi. Così l'ordine di infinità d'una funzione può essere infinitesimo rispetto all'ordine di infinità d'un'altra. In un mio scritto (*) già feci vedere che nella stessa formula di Taylor i successivi termini si possono considerare a nostro arbitrio come infinitesimi variabili o costanti d'ordine diverso.

In tutti questi casi l'ente è determinato da una funzione reale di una variabile reale. Ma fra le grandezze comuni, p. e. fra i segmenti rettilinei, esistono degli infinitesimi?

(*) *Sulla formula di Taylor*, Atti R. Acc. Scienze di Torino, 22 novembre 1891.