Compito del 15 giugno 2011

1. Nello spazio con riferimento $RC(O, x, y, z)$, siano dati i punti $P_0(1+k, -1, 1)$, $P_1(-1, 1-k, -1)$, $P_2(3, -3, 3+k)$, $k \in \mathbb{R}$. Determinare i valori di k per cui i tre punti sono allineati. Per tali valori di k scrivere le equazioni cartesiane della retta r da essi individuata. Scrivere inoltre le equazioni cartesiane della retta s passante per il punto $Q(0, 1, 0)$ e perpendicolare al piano $\pi : x - y = 0$. Verificare che r e s sono rette sghembe.

2. Trovare una matrice P che diagonalizzi la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

e verificare che $P^{-1}AP$ è una matrice diagonale. Calcolare A^{15}.

3. Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare definita da

$$T(x, y, z, t) = (x - y + z + t, x + 2z - t, x + y + 3z - 3t)$$

Trovare una base e la dimensione dell'immagine di T e del nucleo di T.

4. Dimostrare che i tre vettori colonna

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti se e solo se

$$det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \neq 0$$

5. Calcolare l'area del triangolo di vertici $A(1, -1, 2)$, $B(3, 3, 2)$, $C(5, 0, -4)$

6. Esprimere la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ come prodotto di matrici elementari.