Compito del 12 settembre 2011 Versione G

1. Nello spazio con riferimento $RC(O, x, y, z)$, siano dati il piano π di equazione: $3x - y + z - 1 = 0$ e la retta r di equazioni: $x + y - z = x - 2y + 1 = 0$. Determinare

(1) le coordinate di tutti i vettori paralleli a π e di tutti quelli perpendicolari a r;
(2) le equazioni della retta r' proiezione ortogonale di r su π;
(3) le equazioni della retta per il punto $P(1, 0, 1)$ complanare con r e parallela a π.

2. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare canonico, siano dati i vettori:

$$\mathbf{u} = (1, 0, 1, 1), \mathbf{v} = (1, 1, 2, 0), \mathbf{w} = (1, 3, 4, 0).$$

Determinare

(1) Una base e la dimensione del sottospazio U da essi generato
(2) un vettore $\mathbf{t} \in U$ tale che $\mathbf{t} \cdot \mathbf{u} = 2$ e $\mathbf{t} \cdot \mathbf{w} = 1$.

3. Determinare i valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ in modo che $(a, b, -37, -6) \in \mathbb{R}^4$ appartenga al sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ generato da $(1, 3, -5, 3)$ e $(2, 2, 4, 7)$.

4. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -21 & 2 & 8 \\ 20 & -3 & -8 \\ -60 & 6 & 23 \end{pmatrix}$$

Calcolare il polinomio caratteristico di A, gli autovalori e una base per gli autospazi. Decidere se A è diagonalizzabile ed eventualmente determinare una sua forma diagonale.

5. Calcolare la minima distanza tra le rette $r : 2x + z - 2 = 2x + 2y + 2z - 3 = 0$ e $s : x - y = 2y + z - 6 = 0$.

Compito del 12 settembre 2011 Versione C

1. Nello spazio con riferimento $RC(O, x, y, z)$, siano dati il piano π di equazione: $3x+y+z-1=0$ e la retta r di equazioni: $y-2(x+1)=z-2-y=0$. Determinare

(1) le coordinate di tutti i vettori paralleli a π e di tutti quelli perpendicolari a r;
(2) le equazioni della retta r' proiezione ortogonale di r su π;
(3) le equazioni della retta per il punto $P(1,0,1)$ complanare con r e parallela a π.

2. Nello spazio $M(2,2)$ delle matrici 2×2 siano date le matrici:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(1) verificare che esse costituiscono una base $\mathcal{B}$ di $M(2,2)$ e determinare le coordinate della matrice $E=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ rispetto a tale base.
(2) Sia P_2 lo spazio vettoriale dei polinomi nell'indeterminata x di grado minore o uguale a 2. Sia $f: M(2,2)\to P_2$ l'applicazione lineare definita da $f(A)=1+x, f(B)=1+x-x^2, f(C)=2+2x, f(D)=x^2$; determinare la matrice associata ad f sia rispetto alle basi $\mathcal{E}$ di $M(2,2)$ costituita dalle matrici (nell'ordine)

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

e $\mathcal{E}'=\{1,x,x^2\}$ di P_2, sia rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{E}'$.
(3) stabilire se f è iniettiva.
(4) Verificare se esiste la controimmagine del vettore $2+2x+3x^2$ ed eventualmente determinarla.

3. Calcolare la minima distanza tra le rette $r: 3x+2z-3=y-1=0$ e $s: 3x+2z-17=y-2=0$.

4. Determinare i valori dei parametri $a,b\in\mathbb{R}$ in modo che $(a,b,-37,-6)\in\mathbb{R}^4$ appartenga al sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ generato da $(1,2,-5,3)$ e $(2,-1,4,7)$.

5. Sia V lo spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare canonico. Sia U il sottospazio di equazione cartesiana $x-y+z=0$. Calcolare la migliore approssimazione del vettore $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 3\end{pmatrix}$ in U.