Prova scritta di Geometria Febbraio 2012

Istruzioni. Dopo aver svolto in brutta copia gli esercizi, riportare in bella forma negli spazi appositi qui sotto le soluzioni, evidenziando graficamente i risultati principali e dando le opportune, seppur sintetiche, giustificazioni.

1. In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $RC(O,x,y)$ sia data la conica di equazione

$$\frac{3x^2}{4} - \frac{5xy}{2\sqrt{3}} + \frac{19y^2}{12} = 1$$

Determinare un nuovo sistema di riferimento cartesiano ortogonale $RC'(O',x',y')$ in modo che l'equazione abbia forma canonica. Disegnare la conica nel sistema di riferimento $RC(O,x,y)$. (**Se è un ellisse trovare centro, fuochi, vertici, assi di simmetria; se è un iperbole trovare centro, fuochi, vertici e assi di simmetria; se è una parabola trovare vertice, fuoco e direttrice e asse di simmetria.**)

Nelle altre versioni:

$$7x^2 + 6\sqrt{3}xy + 13y^2 = 8$$

$$x^2 + 10\sqrt{3}xy + 11y^2 = -8$$

$$-\frac{x}{2} - \frac{9x^2}{4} + \frac{\sqrt{3}y}{2} - \frac{3\sqrt{3}xy}{2} - \frac{3y^2}{4} = 0$$

2. Nello spazio vettoriale $M(2\times 2)$, indichiamo con E_{ij} la matrice di ordine 2 che ha 1 nel posto (i,j) e 0 altrove. Scrivere la matrice del cambiamento di base dalla base

$$\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{11}+E_{12}, E_{11}-E_{12}+E_{21}, -E_{11}+E_{12}-E_{21}+E_{22}\}$$

alla base

$$\mathcal{D} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$$

Calcolare quindi le coordinate della matrice generica $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nella base $\mathcal{B}$.

Nelle altre versioni:

$$\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{11}-E_{12}, E_{11}+E_{12}-E_{21}, E_{11}+E_{12}-E_{21}-E_{22}\}$$

$$\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{11}-E_{12}, E_{11}-E_{12}-E_{21}, E_{11}-E_{12}+E_{21}-E_{22}\}$$

$$\mathcal{B} = \{E_{11}, -E_{11}-E_{12}, -E_{11}+E_{12}+E_{21}, E_{11}+E_{12}+E_{21}+E_{22}\}$$

3. Calcolare l'angolo convesso θ formato dai vettori di $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ -a-b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -a-b \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

con a, b numeri reali qualunque.

Nelle altre versioni:

$$\begin{pmatrix} -x \\ -y \\ x+y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x+y \\ -x \\ -y \end{pmatrix}$$

con x, y numeri reali qualunque.

$$\begin{pmatrix} a \\ -a-b \\ b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b \\ a \\ -a-b \end{pmatrix}$$

con a, b numeri reali qualunque.

$$\begin{pmatrix} -x \\ x+y \\ -y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -y \\ -x \\ x+y \end{pmatrix}$$

con x, y numeri reali qualunque.