1. Siano date le rette

$$r_1 : \begin{cases} x = 2y \\ z = 2 - y \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} z = 4 - 2y \\ x + y + 2z = 8 \end{cases}$$

- Calcolare delle equazioni parametriche delle due rette.
- Calcolare i vettori di direzione $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ delle due rette.
- Calcolare il prodotto vettoriale $\vec{n}$ tra i due vettori direzione così trovati.
- Presi ad arbitrio un punto P_1 sulla retta r_1 e P_2 sulla retta r_2, Calcolare la proiezione ortogonale del vettore $\overrightarrow{P_1P_2}$ su $\vec{n}$.
- Dedurre dai punti precedenti la distanza (minima) tra le due rette date.

2. Consideriamo di nuovo le rette dell'esercizio precedente. Determinare delle equazioni per la retta che interseca entrambe ed è perpendicolare ad esse. (Suggerimento: Considerare un punto generico su A_1 ed un analogo punto generico su A_2 (a questo scopo saranno utili le equazioni parametriche delle due rette). Imporre la perpendicolarità del vettore $\overrightarrow{A_1A_2}$ con $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$. Utilizzare questo calcolo.)

3. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolare autovalori e autovettori di questa matrice. Stabilire se A è diagonalizzabile o meno.

4. Sia A una fissata matrice quadrata $n \times n$. Sia U l'insieme di matrici

$$U = \{B \in M(m \times n) | BA = 0\}$$

e sia W l'insieme di matrici

$$W = \{C = BA, B \in M(m \times n)\}.$$

Usando il Teorema delle Dimensioni dimostrare che U e W sono sottospazi di $M(m \times n)$ e che si ha $\dim U + \dim W = mn$.